华章数学译丛

HZ BOOKS

9

ELSEVIER

Mathematical Modeling

(Second Edition)

数学建模方法与分析

（原书第2版）

（新西兰）Mark M. Meerschaert 著

刘来福 杨淳 黄海洋 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

9

Mathematical Modeling
(Second Edition)

数学建模 方法与分析

（原书第2版）

（新西兰） Mark M. Meerschaert 著

刘来福 杨淳 黄海洋 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍数学建模的理论及应用，作者将数学建模的过程归结为五个步骤（即“五步方法”），并贯穿全书各类问题的分析和讨论中．阐述了如何使用数学模型来解决实际问题．提出了在组建数学模型并且进行分析得到结论之后如何进行模型的灵敏性和稳健性的分析．将数学建模方法与计算机使用密切结合，不仅通过对每个问题的讨论给予很好的示范，而且配备了大量的习题训练．本书适合作为高等院校相关课程的教材和参考书，也可供参加国内外数学建模竞赛的人员参考，以及数学应用相关的专业人员参考．

本书版权登记号：图字：01-2004-2087

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法与分析（原书第 2 版）/（新西兰）米尔斯切特（Meerschaert, M. M.）著；刘来福等译．—北京：机械工业出版社，2005.6
（华章数学译丛）
书名原文：Mathematical Modeling, Second Edition
ISBN 7-111-16440-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．①米…②刘…　Ⅲ．数学建模方法与分析—高等学校—教材　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 030413 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：隋　曦　索津莉
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・16.75 印张
印数：0 001-4000 册
定价：33.00 元

译者简介

刘来福 北京师范大学数学科学学院教授，博士生导师．北京数学会副理事长，全国大学生数学建模竞赛北京赛区组织委员会副主任．从事应用数学方面的教学和科学研究工作．著有《作物数量遗传》、《生物统计》、《数学模型与数学建模》、《问题解决的数学模型方法》等书．译著：《用 Maple 和 Matlab 解决科学计算问题》(W. Gander)．在国内外发表研究论文 80 余篇．

黄海洋 北京师范大学数学科学学院教授，博士生导师．北京师范大学数学科学学院副院长，全国大学生数学建模竞赛北京赛区组织委员会副秘书长．从事基础数学和应用数学方面的教学和科学研究工作．译著：《用 Maple 和 Matlab 解决科学计算问题》(W. Gander)．在国内外发表研究论文 30 余篇．

杨　淳 北京师范大学数学科学学院副教授．从事计算数学和应用数学方面的教学和科学研究工作．在国内外发表研究论文 40 余篇．

第 2 版前言

这本教材的第 2 版反映了若干学生和教师很有见解的批评和建议，最显著的变化是增加了广泛提议的两个新的小节. 在第 3 章“最优化计算方法”增加了关于离散最优化的新的一节，这里我们给出了整数规划的分支定界方法的实用的介绍，我们还探讨了线性规划和整数规划之间的联系，这样较早地引入了对连续模型离散化的重要的设想. 在第 6 章“动态模型的模拟”增加了关于混沌和分形的新的一节. 我们应用分析和模拟两种方法探讨了离散的和连续的动态系统的特性，以便理解在确定的条件下它们如何变成混沌，这一节为此课题提供了一个实际的易于理解的介绍. 学生获得了关于对初始条件的敏感依赖性、周期加倍和奇怪吸引子，也就是分形集等概念的体验. 最重要的是，在研究这些实际问题中，不断增加了学生对数学的兴趣.

第 2 版还反映了当前技术的进步，包括了计算机代数系统 MAPLE 和 MATHEMATICA 的最新的版本的应用. 在第 3 章介绍了电子表格的线性和整数规划求解软件，以及流行的线性规划软件包 LINDO 产品. 所有的计算机图像和适当应用技术的讨论都已更新. 在本书中涉及的算法在不同平台上的计算机实现，以及本书包括的所有图像和计算结果的计算机文件可以从作者那里获得.

我们很高兴读者对第 1 版提出了众多反馈意见，我们最希望听到使用这本书的学生与教师的意见. 请别客气，随时向我提出任何批评和建议.

Mark M. Meerschaert
数学系
内华达大学
Reno，NV 89557-0045

电话：(702) 784-6077
传真：(702) 784-1478
Email：mcubed@unr. edu
http：//unr. edu/homepage/mcubed/

第 1 版前言

这本书是为数学专业及相关专业大学高年级的学生或刚入学的研究生提供的一本数学建模领域的入门读物. 大学数学中一、二年级通常掌握的一元微积分、多元微积分、线性代数和微分方程是必需的. 优先接触过计算、概率和统计是有用的，但不是阅读本书的前提.

本书与某些专注于某一类数学模型的教科书不同，覆盖了从最优化到动态系统到随机过程中有关建模问题的广泛领域. 本书也与另外一些仅仅要求掌握微积分知识的书籍不同，它将鼓励学生使用他们所学的全部的数学知识来解决问题(因为这些都是解决实际问题时需要的).

占绝对优势的数学模型可以归于如下的三大类：最优化模型、动态模型和概率模型. 在实际应用中模型的类型可能由所遇到的问题决定，但更多的是与使用者对模型的选择有关. 在许多实例中都可以使用若干不同类型的模型. 例如：一个大规模的蒙特卡罗模拟模型也可能会与一个小的易于处理的基于期望值的确定性模型结合起来使用.

与数学模型的三个主要类别相对应，本书也分为三个部分. 我们从最优化模型开始. 第 1 章的第一节在一个变量的最优化问题的内容中介绍了数学建模的五步方法. 在这一章的其余部分还介绍了灵敏性分析和稳健性分析. 全书贯穿使用了这些数学建模的基本原理. 每一章后面的习题也要求学生掌握. 第 2 章，关于多变量最优化，我们介绍了决策变量、可行解、最优解和约束条件. 在这一章介绍的拉格朗日乘数法主要是为了在多元微积分中没有接触过这一重要的技术的学生. 在关于问题对于约束条件的灵敏性分析的这一节，我们会了解到拉格朗日乘子可用来表示影子价格（有些作者称它为对偶变量). 这些被放在第 3 章稍后的关于线性规划的讨论当中. 第 3 章包含了一些重要的计算技术，包括单个和多个变量的牛顿法和线性规划.

这本书的第二部分是关于动态模型的，介绍状态和平衡态的概念. 随后的关于状态空间、状态变量和随机过程的平衡态的讨论都与这些概念密切相关. 还讨论了离散和连续时间的非线性动态系统. 在书中的这一部分很少强调严格的解析解，因为许多这类模型容许非解析解.

在书的最后一部分我们介绍了概率模型. 学习这部分内容不需要事先了解概率的知识，我们在本书前两部分的基础上进行讲解，以自然和直观的方式介绍实际问题中有关概率的概念.

这本书的每一章都配有挑战性的习题. 这些习题不但要求学生付出巨大的努力还需要一定的创造性. 书中的问题不是编造的，它们都是现实问题. 这些问题

没有被设计去阐明特定数学技术的应用，相反，由于问题的需要，书中有时将会偶尔使用某些新的数学技术．我决定在书中不安排任何内容使学生产生疑问："这个内容是干什么用的?"尽管虚构的问题过于典型化、过分简化或严重不实际，但是虚构的问题还是包含了应用数学去解决实际问题时的基本的挑战．对于许多学生来说，虚构的问题提供了足够的挑战．这本书教授了学生如何去解决这些虚构的问题．本书提供了一种通用方法，可以使得有能力的学生成功地运用它去解决这些虚构的问题，它出现在第 1 章的第 1 节．这个方法同样可用于全书所有类型的问题．

每一章的习题的后面列出了建议的进一步阅读的参考文献．其中包括了若干与该章内容有关的应用数学的 UMAP 模块．UMAP 模块能够提供对本书材料的有价值的补充．所有的 UMAP 模块可以从 COMAP 公司得到（COMAP Inc.，57 Bedford St.，Suite 210，Lexington MA，02173；电话为 1-800-772-6627；电子邮件为 order@comap. com；网址为 http：//www. comap. com)．

本书的主要论题之一是使用适当的技术去解决数学问题．计算机代数系统、图像和数值方法都是数学工具，许多学生还没有接触到这些工具．我们把当代新技术引入了本书，因为这些新技术更加便于解决现实世界中的问题，从而激励学生去学习它．计算机代数系统和二维图形在全书都会用到，第 2、3 章关于多元最优化的问题涉及三维图形，接触过三维图形的学生可以尝试使用已掌握的知识．课文中的数值方法包括牛顿方法、线性规划、欧拉方法和线性回归．

书中除了介绍绘图工具在数学中的恰当使用之外，还包括大量用计算机绘制的图形．计算机代数系统广泛地用于明显地需要代数计算的那些章节．本书第 2、4、5 章包含了从计算机代数系统 MAPLE 和 MATHEMATICA 得到的实际的计算机输出．关于计算技术的章节（第 3、6、9 章）讨论了对于求解允许非解析解的问题时数值算法的恰当使用．关于线性规划的第 3.3 节中包括了从流行的线性规划软件包 LINDO 得到的实际的计算机输出．关于线性回归的第 8.3 节包括了从通用的统计软件包 MINITAB 得到的输出．

学生需要具备这些专用的技术以便他们充分地利用本书．我尽量方便各种教师使用这本书．有些人有办法使学生接触这些复杂的计算工具，但有些人办法较少．最起码的需要包括：(1) 绘制二维图形的工具，(2) 一台能使学生执行简单的数值算法的计算机．计算机电子表格软件或者可编程的图形计算器都可以做这些事情．理想的状况是为学生提供机会接触较好的计算机代数系统、线性规划软件包和统计计算软件包．下面提供了关于最流行的计算机软件包的信息，对于那些没有接触过这些专门软件的学生和教师来说是有帮助的．

本书中的数值算法是以伪代码的形式表示的．有些教师喜欢让学生自己实现这些算法．另一方面，如果不打算要求学生去编写程序，我们希望教师很方便地提供给学生适当的软件．本书中所有的算法都在各种计算机的平台上实现过，对

于本书的使用者非常方便，无须附加的费用．如果你想得到这些算法的拷贝，请与作者联系．同样，如果你愿意与另外的教师和学生共享你自己的算法，请送一份你的拷贝给我．如过你允许的话，我将免费将它拷贝给其他的人．

数学建模是连接数学和现实世界的桥梁．从提出问题，思考、优化这个问题，到用精确的数学语言叙述这个问题．一旦问题变成数学问题，就可以使用数学去求得解答．最后，需要倒转这个过程，把数学的解答翻译成对于原问题来说是易于了解的、有意义的答案．（这是很多人经常忽略的部分．）有些人擅长语言，而另一些人则擅长计算，我们需要具备两种能力的人．我们需要更多的人既擅长语言又擅长计算，并且愿意和能够进行翻译．这些人就是将来解决问题的有影响力的人．

软件

下面是与本书内容有关的相关软件包的部分清单．

计算机代数系统

DERIVE，Soft Warehouse，Inc.，http：//www. derive. com

MAPLE，Waterloo Maple，Inc.，http：//www. maplesoft. com

MATHCAD，Mathsoft，Inc.，1-800-628-4223，http：//www. mathsoft. com

MATHEMATICA，Wolfram Research，Inc.，http：//www. mathematica. com

MATLAB，The Math Works，Inc.，http：//www. mathworks. com

统计软件包

MINITAB，Minitab，Inc.，1-800-322-1377，http：//www. minitab. com

SAS，SAS Institute，Inc.，http：//www. sas. com

SPSS，SPSS Inc.，http：//www. spss. com

线性规划软件包

LINDO，The Scientific Press，1-800-451-5409，http：//www. lindo. com

MPL，Maximal Software，Inc.，http：//www. maximal-usa. com

AMPL，Compass Modeling Solutions，Inc.，http：/www. modeling. com

致谢

我很感谢 Academic Press 的 Chuck Glaser、Joe Clifford、Cindy Kogut 和 Nancy Priest 对本书第 1 版所做的工作，Robert Ross、Amy Fulton、Linda Ratts Engelman 和 Vanessa Gerhard 对第 2 版所做的工作．还要感谢 Annie Todd 向 Academic Press 推荐这本书，我的秘书 Diane Hines 出色的打印，以及所有提出有见解意见的读者．感谢 Peter Cherry 和在 Vector Research，Inc. 的所有人、

Steve Wheatcraft 和 Wallace Whiting 以及他们在 Reno 的内华达大学 Mines 的 Mackay 学校的学生，他们教我实际问题. 感谢 Ron Fryxell、Chaitan Gupta，以及我的所有在 Albion 学院和在 Reno 的内华达大学的同事，在我努力进行实际问题的教学中给予的大力支持. 特别是，感谢我的学生踊跃地参加课堂实践，最终形成这本书，本书的成功，大部分归功于他们.

目　录

第一部分　最优化模型

解决最优化问题是数学的一些最为常见的应用. 无论我们进行何种工作，我们总是希望达到最好的结果，而使不好的方面或消耗等降到最低. 企业管理人员试图通过对一些变量的控制使收益达到最大，或在达到某一预期目标的前提下使成本最低. 经营渔业及林业等可更新资源的管理者要通过控制产量以达到长期效益的最大化；政府机构需要建立一些标准，使生产生活消费品的环境成本降到最低；计算机的系统管理员要使计算机的处理能力达最大，而使作业的延迟最少；农民会尽量调整种植空间从而使收获最高；医生则要合理使用药物使其副作用降到最低. 这些以及许多其他的应用都有一个共同的数学模式：有一个或多个可以控制的变量，它们通常要受一些实际中的限制，通过对这些变量的控制，从而使某个目标达到最优. 最优化模型正是要给定问题的约束条件，确定受约束的可控变量的取值，以达到最优结果.

第1章　单变量最优化

我们对最优化模型的讨论从单变量优化问题开始．大多数学生对此已经有了一些实际的经验．单变量优化问题又称极大-极小化问题，通常在大学第一学期的微积分课程中已有介绍．很多方面的实际应用问题仅用这些方法就可以处理．本章的目的一方面是对这些基本方法进行回顾，另一方面是介绍数学模型的常见形式等基础知识．

1.1　五步方法

本节概要地介绍用数学模型解决问题的一般过程，我们称之为五步方法．我们以解决一个典型的单变量极大-极小化问题为例来介绍这个过程．这类问题大多数学生在第一学期的微积分课程中都是接触过的．

例 1.1　一头猪重 200 磅[⊖]，每天增重 5 磅，饲养每天需花费 45 美分．猪的市场价格为每磅 65 美分，但每天下降 1%，求出售猪的最佳时间．

解决问题的数学模型方法包括五个步骤：

1. 提出问题
2. 选择建模方法
3. 推导模型的数学表达式
4. 求解模型
5. 回答问题

第一步是提出问题，而问题需要用数学语言表达，这通常需要大量的工作．在这个过程中，我们经常要根据问题的特点做一些假设．在这里不必担心需要做出推测，因为我们总可以在后面的过程中随时返回、用更好的推测进行调整．在我们用数学形式提出问题之前，我们要定义一些术语．首先列出整个问题涉及的变量，包括恰当的单位，然后写出关于这些变量所做的假设，列出我们已知的或假设的这些变量之间的关系式，包括等式和不等式．这些工作做完后，就可以提出问题了．用明确的数学语言写出这个问题的目标的表达式，再加上前面写出的变量、单位、等式、不等式及所做假设．就构成了完整的问题．

在例 1.1 中，全部的变量包括：猪的重量 w(磅)，从现在到出售猪期间经历的时间 t(天)，t 天内饲养猪的花费 C(美元)，猪的市场价格 p(美元/磅)，售出生猪所获得的收益 R(美元)，我们最终获得的净收益 P(美元)．这里还有一些其他的有关量，如猪的初始重量(200 磅)等，但它们不是变量．这里把变量和参量区分开是很重要的．

下面我们要列出对步骤 1 中所确定的这些变量所做的假设．这里考虑到了参

⊖　1 磅＝0.454kg

量在模型中的影响. 猪的重量从初始的 200 磅按每天 5 磅增加，我们有：

$$(w\ 磅) = (200\ 磅) + \left(\frac{5\ 磅}{天}\right)(t\ 天).$$

这里我们把变量的单位包括进去，从而可以检查所列式子是否有意义.

该问题中涉及到的其他假设包括：

$$\left(\frac{p\ 美元}{磅}\right) = \left(\frac{0.65\ 美元}{磅}\right) - \left(\frac{0.01\ 美元}{磅 \cdot 天}\right)(t\ 天)$$

$$(C\ 美元) = \left(\frac{0.45\ 美元}{天}\right)(t\ 天)$$

$$(R\ 美元) = \left(\frac{p\ 美元}{磅}\right)(w\ 磅)$$

4 $$(P\ 美元) = (R\ 美元) - (C\ 美元).$$

我们还要假设 $t \geqslant 0$，在这个问题中，我们的目标是求净收益 P 的最大值. 图 1-1 对第一步所得的结果进行了归纳，以便于后面参考.

变量：

- t=时间(天)
- w=猪的重量(磅)
- p=猪的价格(美元/磅)
- C=饲养 t 天的花费(美元)
- R=售出猪的收益(美元)
- P=净收益(美元)

假设：

- $w=200+5t$
- $p=0.65-0.01t$
- $C=0.45t$
- $R=p \cdot w$
- $P=R-C$
- $t \geqslant 0$

目标： 求 P 的最大值

图 1-1 售猪问题的第一步的结果

5

第一步中的三个阶段(变量、假设、目标)的确定不需要按特定的顺序. 比如在第一步中首先确定目标常常更有帮助. 在例 1.1 中，我们定义了目标 P 和列出等式 $P=R-C$ 后，才能容易看出 R 和 C 应该为变量. 一个考查第一步是否完整的方法是检查 P 是否可以最终表示成变量 t 的函数. 关于步骤 1 的一个最好的一般性建议就是首先写出所有显而易见的部分. (例如对有些变量，只需阅读对问题的说明，并找出其中的名词，即可得到.)随着这个过程的进行，其他部分会逐渐补充完整.

第二步是选择建模方法. 现在我们已经有了一个用数学语言表述的问题，我们需要选择一个数学方法来获得解. 许多问题都可以表示成一个已有有效的一般求解方法的标准形式. 应用数学的多数研究，包含确定问题的一般类别，并提出解决该类问题的有效方法. 在这一领域有许多的文献，并且不断取得许多新的进

展. 一般很少有学生对选择较好的建模方法有经验或熟悉参考文献. 在这本书里，除了极少的例外，我们都会给定所用的建模方法. 我们将例 1.1 定位为单变量优化问题，或极大-极小化问题.

我们只给出所选建模方法的主要内容，细节请读者参考微积分入门教科书.

给定定义在实轴的子集 S 上的实值函数 $y=f(x)$. 设 f 在 S 的某一内点 x 是可微的. 若 f 在 x 达到极大或极小，则 $f'(x)=0$. 这一结论由微积分中的一个定理保证. 据此我们可以在求极大或极小点时不考虑那些 $x\in S$ 中 $f'(x)\neq 0$ 的内点. 只要 $f'(x)=0$ 的点不太多，这个方法就很有效.

第三步是推导模型的公式. 我们要把第一步得到的问题应用于第二步，写成所选建模方法需要的标准形式，以便于我们运用标准的算法过程求解. 如果所选的建模方法通常采用一些特定的变量名，比如我们的这个例子，那么把我们问题中的变量名改换一下常会比较方便. 我们有：

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= p \cdot w - 0.45t \\ &= (0.65 - 0.01t)(200 + 5t) - 0.45t. \end{aligned}$$

记 $y=P$ 作为需最大化的目标变量，$x=t$ 作为自变量. 我们的问题现在化为在集合 $S=\{x : x\geqslant 0\}$ 上求下面函数的最大值：

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= (0.65 - 0.01x)(200 + 5x) - 0.45x. \end{aligned} \tag{1}$$

第四步是利用第二步中确定的标准过程求解这个模型. 在我们的例子中，我们要对(1)式中定义的 $y=f(x)$ 在区间 $x\geqslant 0$ 上求最大值. 图 1-2 给出了 $f(x)$ 的曲线. 由于 f 关于 x 是二次的，因此这是一条抛物线. 我们计算出

$$f'(x) = \frac{(8-x)}{10},$$

则在点 $x=8$ 处 $f'(x)=0$. 由于 f 在区间 $(-\infty, 8)$ 上是单调上升的，而在区间 6
$(8, \infty)$ 是单调下降的，则点 $x=8$ 是整体最大值点. 在此点我们有 $y=f(8)=133.20$. 因此点 $(x, y)=(8\ 133.20)$ 是 f 在整个实轴上的整体最大值点，从而也是区间 $x\geqslant 0$ 上的最大值点.

第五步是回答开始在第一步中提出的问题：何时售猪可以达到最大的净收益. 由我们的数学模型得到的答案是在 8 天之后，可以获得净收益 133.20 美元. 只要第一步中提出的假设成立，这一结果就是正确的. 相关的问题及其他不同的假设可以按照第一步中的做法调整得到. 由于我们处理的是一个实际问题(一个农民决定何时出售他饲养的生猪)，在第一步中会有一个风险因素存在，因此通常有必要研究一些不同的可能，这一过程称为灵敏性分析，我们将在下一节中讨论.

这一节的主要目的是介绍数学建模的五步方法. 图 1-3 将这一方法总结归纳

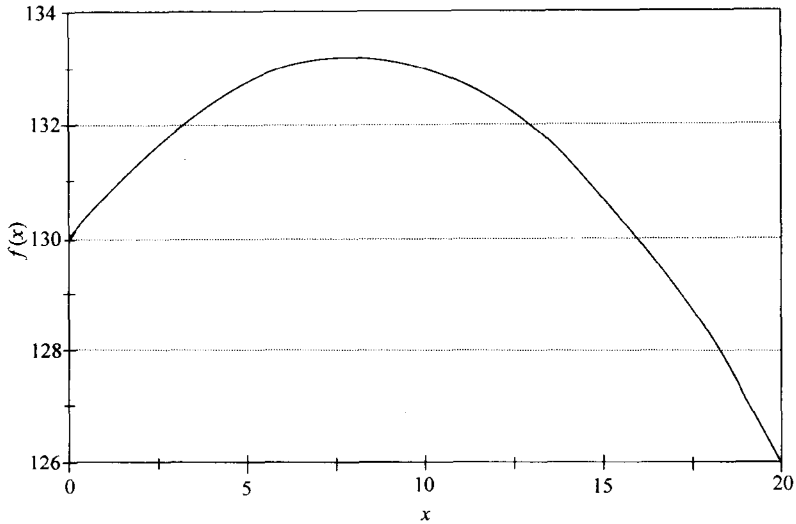

图 1-2　售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的曲线图

$f(x)=(0.65-0.01x)(200+5x)-0.45x$

第一步，提出问题.

(a) 列出问题中涉及到的变量，包括适当的单位.

(b) 注意不要混淆了变量和常量.

(c) 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式.

(d) 检查单位从而保证你的假设有意义.

(e) 用准确的数学表达式给出问题的目标.

第二步，选择建模方法.

(a) 选择解决你的问题的一个一般的求解方法.

(b) 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和对相关文献有一定的熟悉程度.

(c) 在本书中，我们通常会给定要用的建模方法.

第三步，推导模型的公式.

(a) 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式.

(b) 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致.

(c) 记下任何补充假设，这些假设是为了使在第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的.

第四步，求解模型.

(a) 将第二步中所选方法应用于第三步得到的表达式.

(b) 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义.

(c) 采用适当的技术. 计算机代数系统，图形，数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误.

第五步，回答问题.

7~8 (a) 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述.

(b) 避免数学符号和术语.

(c) 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答.

图 1-3　五步方法

成了便于以后参考的图表形式. 在本书中，我们会运用这个五步方法求解数学模型中的大量问题. 第二步一般会包括对所选建模方法的描述并附带一、两个例子. 已经熟悉这些建模方法的读者可以跳过这一部分或只熟悉一下其记号. 图 1-3 中提到的其他内容，如适当技术的使用等，我们会在本书后面的章节中展开讨论.

每章最后的习题同样需要应用五步方法. 现在养成使用五步方法的习惯，今后就会比较容易解决我们遇到的复杂的模型问题. 这里对第五步要特别加以注意，在实际中，仅有结果正确是不够的，你还需要有把你的结论和其他人交流的能力，其中有些人可能并不像你一样对数学的知识有那么多的了解.

1.2 灵敏性分析

上一节概要地介绍了数学建模的五步方法. 整个过程从对问题做出一些假设开始. 但我们很少能保证这些假设都是完全正确的. 因此我们需要考虑所得结果对每一条假设的敏感程度. 这种灵敏性分析是数学建模中的一个重要方面. 具体内容与所用的建模方法有关，因此关于灵敏性分析的讨论会在本书中贯穿始终. 这里我们仅对简单的单变量优化问题进行灵敏性分析.

在上节中，我们用售猪问题(例 1.1)来说明数学模型的五步方法. 图 1-1 列出了我们在求解该问题中所做的所有假设. 在这个例子中，数据和假设都有非常详细的说明，即使这样，我们还要再严格检查. 数据是由测量、观察有时甚至完全是由猜测得到的，因此我们要考虑数据不准确的可能性.

我们知道有些数据要比其他的可靠性高得多，生猪现在的重量、猪现在的价格，每天的饲养花费都很容易测量，而且有相当大的确定性. 猪的生长速率则不那么确定，而价格的下降速率则确定性更低. 记 r 为价格下降的速率. 我们前面假设 $r=0.01$ 美元/天，现在让我们假设 r 的实际值是不同的. 对几个不同的 r 值
重复前面的求解过程，我们会对问题的解关于 r 的敏感程度有所了解. 表 1-1 给 9
出了选择几个不同的 r 值求出的计算结果. 图 1-4 将这些数据绘制在了图上. 我们可以看到售猪的最优时间对参数 r 是很敏感的.

表 1-1 售猪问题中最佳售猪时间 x 关于价格的下降速率 r 的灵敏性

r(美元/天)	x(天)	r(美元/天)	x(天)
0.008	15.0	0.011	5.5
0.009	11.1	0.012	3.3
0.01	8.0		

对灵敏性的更系统的分析是将 r 作为未知的参数，仍按前面的步骤求解. 写出

$$p = 0.65 - rt,$$

同前面一样，得到