高校经典教材配套辅导系列

数学分析（下册）

习题精解

吴传生 主编

涵盖课程重点

精炼方法技巧

精解课后习题

4

中国科学技术大学出版社

高校经典教材配套辅导系列

数学分析（下册）习题精解

主　编　吴传生　张小柔
副主编　余新华　黄小为
主　审　朱　勇

中国科学技术大学出版社
2004·合肥

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下册)习题精解/吴传生主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2004.9

(高校经典教材配套辅导系列丛书)

ISBN 7-312-01731-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.数学分析—高等学校—解题　Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第093903号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

华中师范大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:787×960/16　印张:40.125　字数:705千字

2004年9月第1版　　2004年9月第1次印刷

ISBN 7-312-01731-2/O·295　　定价:48.00元(上、下册)

前　言

本书是华东师范大学数学系所编写的《数学分析》(第三版)上册和下册的习题全解。

本书在每章的习题解答之前,简要地介绍本章的教学基本要求及教学的重点和难点。习题解答按每章每节的顺序编排,与教材的题号一致,所用符号与教材相符,有些题目有一题多解。

通过本书的参考和学习,可使读者提高分析问题和解决问题的能力,加深对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握,还会增强学好本门课程的信心和提高对本门课程的学习兴趣。

《数学分析》是数学类各专业及其他一些对数学要求较高的专业的一门重要基础课程,每位学生只有经过认真学习课程内容,独立思考和严格的解题训练,才有可能在数学素质上有较大的提高。我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解进行对照比较,达到对问题的更深刻和更透彻的理解的目的。如果自己不亲自动脑筋思考,不亲手动手做题,而是照抄,那将是绝对无益的。

本书可作为大学生学习数学分析课程的参考书,也可供报考研究生的读者作为复习参考书。

本书的不足之处,诚恳地希望读者批评指正!

编者

2004.05

目　录

第十二章　数项级数

第十三章　函数列与函数项级数

第十四章　幂级数

第十五章　傅里叶级数

第十六章 多元函数的极限与连续

第十七章 多元函数微分学

第十八章 隐函数定理及其应用

第十九章 含参量积分

第二十章　曲线积分

第二十一章　重积分

第二十二章　曲面积分

第二十三章 流形上微积分学初阶

第十二章　数项级数

一、教学基本要求

要求：

1. 理解无穷级数的收敛，发散，绝对收敛与条件收敛等概念；
2. 能正确叙述收敛级数的性质；
3. 能够应用正项级数与任意项级数的敛散性判别法判断级数的敛散性；
4. 熟悉几何级数，调和级数与 p 级数.

主要内容：

1. 数项级数的收敛性，无穷级数收敛、发散等概念，柯西准则，收敛级数的基本性质；
2. 正项级数收敛原理：比较原理，达朗贝尔判别法，柯西判别法；
3. 任意项级数：交错级数与莱布尼兹判别法，条件收敛，绝对收敛定理.

重点：正项级数敛散性判断

难点：任意项级数敛散性判断

二、习题解答

§1　级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性，并求其和数：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$

解
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}\\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)\\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{5n+1}\right)=\dfrac{1}{5}$. 级数收敛且其和数是$\dfrac{1}{5}$.

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$

解 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)=\frac{3}{2}$.级数收敛且其和是$\frac{3}{2}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

解 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$.级数收敛,且和为$\frac{1}{4}$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)$$

$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$.级数收敛且其和为$1-\sqrt{2}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

解 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\Rightarrow S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\xlongequal{令 j=k-1}1+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{2j+1}{2^j}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$(n\geqslant 2)$. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$.级数收敛,且其和为3.

2. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c \neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

证 级数 $\sum u_n$ 发散 $\Longrightarrow$ 存在某个正数 ε_0. 对任何 $N \in \mathbf{N}_+$，总存在 $m_0 \in \mathbf{N}_+$. $m_0 > N$ 及 $p_0 \in \mathbf{N}_+$ 有 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$

$\Longrightarrow |cu_{m_0+1} + cu_{m_0+2} + \cdots + cu_{m_0+p_0}| = |c||u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant |c|\varepsilon_0$.

$\Longrightarrow$ 级数 cu_n 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum(u_n + v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 $v_n(n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数，则解得出什么结论？

解 (ⅰ) $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，但不能断定 $\sum(u_n + v_n)$ 的敛散性.

如 $\sum 1, \sum 2$ 均发散，显然 $\sum(1 + 1) = \sum 3$ 发散.

而 $\sum 1, \sum(-1)$ 均发散，$\sum[1 + (-1)] = \sum 0$ 是收敛的.

(ⅱ) 若 $\sum u_n, \sum v_n$ 发散，且 $u_n \geqslant 0, v_n \geqslant 0, (n = 1,2,\cdots) \Longrightarrow \exists\, \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$. 对任何正整数 N. 总存在正整数 $m_0(> N)$ 和 p_0 及 $m_1(> N)$ 及 p_1 有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0$$

$$|v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1}| \geqslant \varepsilon_1$$

$\Longrightarrow |(u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0})| = (u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}) + (v_{m_0+1} + v_{m_0+2} + \cdots + v_{m_0+p_0}) \geqslant \varepsilon_0$.

由柯西准则推得：$\sum(u_n + v_n)$ 也发散.

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

证 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - a$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1} - b_n)$ 发散；

证 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_1) = \infty$.

所以级数 $\sum(b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时,级数 $\sum(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1}$.

证 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1}$.

所以 $\sum(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1}$.

6. 应用第4,5题的结果,求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}]$

若记 $b_n = a+n-1$.(不妨假定 $a>0$),则数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. 由5(2)推得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

解 $S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}] = (1+\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) - (\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}) - (\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1})$
$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}) + (\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}) = \sum_{k=1}^{2m}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

记 $a_k = \frac{1}{k}$. $\Longrightarrow$ 数列 $\{a_k\}$ 收敛于0,而 $a_1 = 1$. 由第4题

$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = a_1 - a = 1$

而 $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}[S_{2m} + \frac{2(2m+1)+1}{(2m+1)(2m+2)}] = 1+0 = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$

解 因为 $\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$,若记 $b_n = n^2+1$. 则数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$,且 $b_n \neq 0$,由第5题(2),推得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right] = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$

解　对 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}]$,(不妨设 $\varepsilon < 1$).则对 $\forall n > N$ 及 $\forall p \in \mathbf{N}_+$.

因为 $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.则

$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin 2^{n+p}}{2^{n+p}}| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}$

$+ \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

由柯西收敛准则推得:级数 $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) $\sum \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2n^2 + 1}$

解　对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$,恒有 $(n+1)^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow 4(n+1)^2 > 2(n+1)^2 + 1 \Rightarrow$

$\frac{(n+1)^2}{2(n+1)^2 + 1} > \frac{1}{4}$.

所以对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$.对任何正整数 N,总存在正整数 $m_0(> N)$ 和 $p_0 = 1$,有

$$|U_{m_0+1}| = \frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2 + 1} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

由柯西准则推得:级数 $\sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2 + 1}$ 发散.

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

解　因为对 $\forall i, j \in \mathbf{N}_+ . i < j \Rightarrow (n+i)(n+i+1) < (n+j)(n+j+1) \Rightarrow$

$\frac{1}{(n+i)(n+i+1)} > \frac{1}{(n+j)(n+j+1)}. \Rightarrow$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}_+, \forall p \in \mathbf{N}_+$.

当 $p = 2m + 1$.

$\left|\sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k} \frac{1}{n+k}\right| = (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) + \cdots +$

$(\frac{1}{n+2m-1} - \frac{1}{n+2m}) + \frac{1}{n+2m+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} +$

$\frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(n+2m-1)(n+2m)} + \frac{1}{n+2m+1}$

$$< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+m)(n+m+1)} + \frac{1}{n+2m+1}$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m+1} + \frac{1}{n+2m+1} < \frac{1}{n+1}.$$

当 $p = 2m$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k} \frac{1}{n+k} \right| < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m+1} < \frac{1}{n+1}.$$

所以对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$(不妨设 $\varepsilon < 1$).则当 $n > N$ 对 $\Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$,这时对 $\forall p \in \mathbf{N}_+$,恒有

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (-1)^{n+k} \frac{1}{n+k} \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

由柯西准则推得:级数 $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

(4) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

解 存在 $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$,对 $\forall N \in \mathbf{N}_+$,只要 $n > N$ 及 $p = n$,就有

$$\left| \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{(n+k)+(n+k)^2}} \right| > \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2(n+k)^2}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2}(n+k)}$$
$$> \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2}(n+n)} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \varepsilon_0$$

由柯西准则推得:级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$ 发散.

8. 证明:级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,存在某个正整数 N,对一切 $n > N$ 总有

$$| u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n | < \varepsilon.$$

证 “必要性”.若级数 $\sum u_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ 对 $\forall\ n > N_1$ 及 $\forall p \in \mathbf{N}_+$.有

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} | < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow \exists N = N_1 + 2$.取 $n_0 = N_1 + 1$ 及 $p = n - (N-1) = n - N_1 - 1$. $(n > N)$.就有

$$| u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p_0} | = | u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n | < \varepsilon.$$

“充分性”,若任给正数 ε,存在某个正整数 N,对一切 $n > N$,总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$ 对任意 $m > N$ 及正整数 p,有

$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| \leqslant |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_{m+p}| + |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m| < 2\varepsilon$.

依柯西准则,级数 $\sum u_n$ 收敛.

9. 举例说明:若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

解 例调和级数 $\sum \frac{1}{n}$,对每个固定的 p.

$$\frac{p}{n+p} \leqslant u_{n+1} + u_{u+2} + \cdots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1}.$$

这里:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+p} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+1} = 0. \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) = 0$,但级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足:加括号后级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛 $(n_1 = 0)$,且在同一括号中为 $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同,证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

证 因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛.由定理 1 的推论知:

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}}) = 0.$$

再由括号内各项同号,推得

$\lim\limits_{k\to\infty}(u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + \cdots + u_{n_k+j}) = 0. j = 1,2,\cdots,(n_{k+1} - n_k)$.

若记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i, S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k}(u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}})$.

则对任何正整数 n,总存在正整数 k,使 $n = n_k + j, 1 \leqslant j \leqslant n_{k+1} - n_k$.

$$\Longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{k-1}(u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}}) + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_k+j})$$

$$= S'_{k-1} + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_k+j})$$

而当 $n \to \infty$ 时,$k - 1 \to +\infty$.从而有

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{k\to\infty} S'_{k-1} + \lim\limits_{k\to\infty}(u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_k+j}) = \lim\limits_{k\to\infty} S'_{k-1}$.

所以 $\sum u_n$ 收敛,且其和不变.

§2 正项级数

1. 应用比较原则判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$

解 因为 $\frac{1}{n^2+a^2}<\frac{1}{n^2}$. 而正项级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow$ 正项级数 $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$ 收敛.

(2) $\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

解 当 $n\geqslant 1$ 时, $0<\frac{\pi}{3^n}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}>0$.

而 $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}=\pi(\frac{2}{3})^n$. 正项级数 $\pi\sum(\frac{2}{3})^n$ 收敛($|q|<1$)$\Rightarrow \sum 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

解 因为 $n\geqslant 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}>\frac{1}{1+n}$. 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ 发散(调和级数)所以按比较原则,正项级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

解 当 $n>e^2$ 时, $\ln n>2\Rightarrow(\ln n)^n>2^n\Rightarrow\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}$. 而正项级数 $\sum\frac{1}{2^n}$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛.

(5) $\sum(1-\cos\frac{1}{n})$

解 $0<1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}<2(\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}, n\geqslant 1$. 而级数 $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以级数 $\sum(1-\cos\frac{1}{n})$ 收敛.

(6) $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\Rightarrow$ 存在正整数 N. 当 $n>N$ 时,就有 $\sqrt[n]{n}<2$.

$\Rightarrow$ 当 $n > N$ 时 $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2n}$. 而级数 $\sum \frac{1}{2n}$ 发散,由定理 1,2,3

所以级数 $\sum\limits_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(7) $\sum(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>1)$

解 设 $f(x)=a^x-1-x\ln a, x\geqslant 0, f(0)=0, f'(x)=a^x\ln a-\ln a$
$=\ln a(a^x-1)>0\ (x>0)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增,故对 $\forall x>0$,有 $f(x)=a^x-1-x\ln a$
$>f(0)=0$.

$\Rightarrow a^x-1>x\ln a \Rightarrow \sqrt[n]{a}-1>\frac{\ln a}{n}\ (n\geqslant 1)$.

因为正项级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum \frac{\ln a}{n}$ 发散,按照比较原则

正项级数 $\sum(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散.

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln}}$

解 因为 $\ln n$ 随 n 增加严格递增,当 $n>e^{e^2}$ 时, $\ln n>\ln e^{e^2}=e^2 \Rightarrow (\ln n)^{\ln n}>$
$(e^2)^{\ln n}=n^2 \Rightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$,取 $N=[e^{e^2}]$.

因为正项级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(9) $\sum(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)\ (a>0)$.

解 因为 $(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)=(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2\geqslant 0$. 所以上述级数是正项级数.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2(\ln a)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(a^x-a^{-x})\ln a}{2x(\ln a)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(a^x+a^{-x})\ln a}{2\ln a}=1$.

由归结原则 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{(\ln a)^2/a^2}=1$.

$\Rightarrow$ 存在正整数 N,当 $n>N$ 时,就有 $\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{(\ln a)^2/n^2}<$
$\frac{3}{2} \Rightarrow (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)<\frac{3(\ln a)^2}{2}\frac{1}{n^2}$.

因为级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum \frac{3(\ln a)^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收