

数理解题方法与技巧丛书

# 初中数学解题方法与技巧

刘绪占 李绍法 李佐玉 编

## 说 明

为了帮助广大中学生提高数学思维的能力,熟练运用各种解题方法与技巧,根据现行教学大纲的要求,紧扣现行中学数理化各科教材,我们组织编写了这套《数理化解题方法与技巧丛书》。

本书以例题为载体,对解初中数学题的思路与方法进行了多方探讨,本书所讲的 19 个专题,既介绍一般的数学方法,又重视数学思想的培养。这些方法与思想,不仅是解决初中数学问题所常用的,而且,也是进一步学习高中数学、高等数学乃至其他学科所必须具备的。

本书对各种思路、方法与数学思想的讲授,力求深入浅出,对例题的讲解,侧重于思考途径的分析和一般方法的归纳,以利于读者领会这些思路与方法的要领,培养举一反三的能力。我们相信,这样做对提高初中学生的数学素养将颇有裨益。

本书所选例题,源于课本,适当拓宽与加深,内容丰富,知识覆盖面广,方法全面、灵活,技巧性强。每讲后面附有习题,供读者练习,书后附有答案或提示,便于读者自学。

本书可作为初中学生学习数学之参考;也可以作为数学竞赛辅导材料;对初中数学教师,也有一定的参考价值。

由于我们的水平有限,缺点错误在所难免,望读者不吝赐教。

编 者

1994 年 11 月

# 目 录

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 一、配方法 .....     | 1   |
| 二、因式分解法 .....   | 15  |
| 三、换元法 .....     | 26  |
| 四、待定系数法 .....   | 39  |
| 五、判别式法 .....    | 53  |
| 六、面积法 .....     | 65  |
| 七、反证法 .....     | 78  |
| 八、分析法与综合法 ..... | 89  |
| 九、坐标法 .....     | 100 |
| 十、归纳法 .....     | 113 |
| 十一、对称与配对 .....  | 125 |
| 十二、降维与升维 .....  | 139 |
| 十三、转化与联想 .....  | 148 |
| 十四、形数结合 .....   | 162 |
| 十五、分类与讨论 .....  | 174 |
| 十六、特殊与一般 .....  | 188 |
| 十七、递推与逆推 .....  | 200 |
| 十八、尝试与猜想 .....  | 214 |
| 十九、构造法 .....    | 226 |
| 习题提示或解答 .....   | 237 |

## 一、配 方 法

让我们先看一道数学题:

当  $a, b$  为何值时, 方程  $x^2 + 2(1+a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$  有实根.

这是 1987 年全国初中数学竞赛的一道试题.

学生往往这样入手: 由

$$\Delta = (2+2a)^2 - 4(3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) \geq 0$$

$$\text{即} \quad -8a^2 - 16b^2 - 16ab + 8a - 4 \geq 0 \quad (*)$$

往下, 许多学生束手无策. 因为对初中学生来说, 寻求使  $(*)$  这个二元不等式成立的  $a, b$  之值的问题, 已远远超出了他们知识的范围.

让我们高兴的是, 有些学生对  $(*)$  采取了如下变形:

$$2a^2 + 4b^2 + 4ab - 2a + 1 \leq 0$$

$$\text{即} \quad (a+2b)^2 + (a-1)^2 \leq 0 \quad (**)$$

$(**)$  当且仅当  $a-1=0, a+2b=0$  同时成立, 即  $a=1, b=-1/2$  时, 原方程有实根.

还有学生一开始就对原方程作如下变形:

$$\begin{aligned} & [x^2 + 2(1+a)x + (1+a)^2] + (a^2 + 4ab + 4b^2) \\ & + [2a^2 + 2 - (1+a)^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad (x+1+a)^2 + (a+2b)^2 + (a-1)^2 = 0$$

$$\text{因此} \quad \begin{cases} a-1=0 \\ a+2b=0 \\ x+1+a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

故当  $a=1, b=-1/2$  时, 原方程有实根  $x_1=x_2=-2$ .

以上的成功, 应归功于“配方”.

所谓配方, 就是把一个多项式配成若干个多项式正整数次幂的和形式. 通过配方解决数学问题的方法叫配方法. 其中, 用得最多的是配平方. 配方法是数学中的一种重要方法, 它的应用非常广泛, 常见于各种数学问题的解法之中, 现相对集中如下.

### (一) 在代数式运算中的应用

**例 1** 设  $x, y, z$  为任意实数, 若

$$\begin{aligned} & (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 \\ &= (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2 \end{aligned}$$

试求  $\frac{yz+1}{x^2+1} \cdot \frac{zx+1}{y^2+1} \cdot \frac{xy+1}{z^2+1}$  的值.

**分析** 此题题设条件、结论都较繁, 能否通过对条件式的整理、配方, 以明朗的显示  $x, y, z$  间的关系, 以利于求解呢?

**解** 将已知式两边同时展开, 整理得

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - \\ & 6xy - 6yz - 6zx \end{aligned}$$

即  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz - 4zx = 0$

即  $2[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$

所以  $x=y=z$

故  $\frac{yz+1}{x^2+1} \cdot \frac{zx+1}{y^2+1} \cdot \frac{xy+1}{z^2+1} = 1$

**例 2** 已知实数  $x, y, z$  满足  $x=6-y, z^2=xy-9$ , 试求  $x, y, z$  之值.

**分析** 注意题设条件等式只有 2 个, 而未知元有 3 个, 要想求出这三个未知量, 还应挖掘条件等式中隐含的某种特殊关系. 配方是常用的手段.

解 把  $x=6-y$  代入  $z^2=xy-9$  中,得

$$z^2=(6-y)y-9=-(y-3)^2$$

即  $z^2+(y-3)^2=0$

(i)

因为  $y, z$  是实数,故有

$$z^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

欲使(i)式成立,必须  $z=0, y=3$ ,此时  $x=6-3=3$ .

故实数  $x, y, z$  的值是  $x=y=3, z=0$ .

例3 已知  $x^2+x+1=0$ ,试求有理式  $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$  的值.

解 因为  $x^2+x+1=0$ ,所以  $x \neq 0$ ,故

$$x+x^{-1}=-1$$

$$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=-1$$

$$x^3+x^{-3}=(x^2+x^{-2})(x+x^{-1})-(x+x^{-1})=2$$

$$x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=-1$$

所以  $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=(x^7+x^{-7})^2-2$

$$=[(x^4+x^{-4})(x^3+x^{-3})+1]^2-2=-1$$

例4 设  $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$  ( $n$  为自然

数),则当  $n$  为何值时,等式  $x^2+1504xy+y^2=1986$  成立.

分析 观察题设条件中,  $x$  与  $y$  互为倒数,易于求出  $x+y$  和  $xy$  的值;再将要求的等式左边式利用配方法变化成含  $x+y$  和  $xy$  的形式求解.

$$\begin{aligned}\text{解 } x+y &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2 + (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= 4n+2\end{aligned}$$

$$x \cdot y = 1$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad x^2 + 1504xy + y^2 &= (x+y)^2 + 1502xy \\ &= (4n+2)^2 + 1502 = 1986 \end{aligned}$$

解得  $n=5$ .

**例 5** 已知  $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) = (ax+by+cz)^2$ , 求证  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ .

**证** 由已知可得

$$\begin{aligned} &a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx \end{aligned}$$

整理配平方, 得

$$(bx-ay)^2 + (cy-bz)^2 + (az-cx)^2 = 0$$

因为  $(bx-ay)^2 \geq 0, (cy-bz)^2 \geq 0, (az-cx)^2 \geq 0$ , 可得

$$bx-ay=0, cy-bz=0, az-cx=0$$

即  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$ , 从而

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

**注** 应用配方法构造若干非负数的和, 是解题中常用的技巧.

## (二) 在根式运算及证明等方面的应用

**例 6** 化简:  $\sqrt{x+2} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \sqrt{x-1} \quad (x \geq 1)$

**分析** 利用配方法, 将根式中的代数式配成完全平方式以便求其算术根.

**解** 原式

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x-1)+2} \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{(x-1)-2} \sqrt{x-1} + 1 \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \\
 &= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & (x \geq 2) \\ 2 & (1 \leq x < 2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

**注** 善于将  $x$  改写为  $x-1+1$  的形式而利于配方,是解决本题的关键.这种技巧,解时常用(不限于用于配方).

**例 7** 若  $a < b < 0$ , 化简  $\sqrt{-a-b-2\sqrt{ab}}$ .

**解** 因为  $a < b < 0$ , 所以  $-a > -b > 0$ , 故  $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ , 故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \sqrt{(\sqrt{-a})^2 - 2\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} + (\sqrt{-b})^2} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})^2} = \sqrt{-a} - \sqrt{-b}
 \end{aligned}$$

**注** 此题的关键是根据  $a < b < 0$  得  $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ , 从而正确地得到算术平方根.

**例 8** 已知  $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ , 求  $\sqrt{x^2+4x}$  的值.

**分析** 由题设条件正确求出  $x$  与  $a$  的关系, 并注意到所求结论可用配方法变形.

**解** 因为  $\sqrt{x} \geq 0$ , 所以  $\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \geq 0$ , 即  $\frac{1}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}$ , 所以

$$\frac{1}{a} \geq a \iff a - \frac{1}{a} \leq 0$$

因为  $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ , 所以  $x = \frac{1}{a} + a - 2$ , 故

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2+4x} &= \sqrt{(x+2)^2-4} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+a\right)^2-4} \\
 &= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = \left|a-\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a}-a
 \end{aligned}$$

### (三)在方程中的应用

**例9** 解方程:  $x^2 + 2x\sqrt{x} - 8\sqrt{x} - 7x - 48 = 0$

**分析** 如果以  $x^2 + 2x\sqrt{x}$  为前两项, 配方成  $(x + \sqrt{x})^2$ , 原方程可化为左边是关于  $x + \sqrt{x}$  的二次三项式, 右边为 0 的方程, 所以能用因式分解法来求解.

**解** 原方程变形为

$$(x + \sqrt{x})^2 - 8(x + \sqrt{x}) - 48 = 0$$

$$(x + \sqrt{x} - 12)(x + \sqrt{x} + 4) = 0$$

方程  $x + \sqrt{x} + 4 = 0$  无实数根.

由方程  $x + \sqrt{x} - 12 = 0$  得

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4) = 0$$

由此解得原方程的唯一根  $x = 9$ .

**例10** 解方程:  $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3}(\frac{x}{3} - \frac{4}{x})$

**分析** 方程左边的两项  $\frac{x^2}{9}$  和  $\frac{16}{x^2}$  分别是右边括号内的两项  $\frac{x}{3}$  与  $\frac{4}{x}$  的平方. 这启发我们通过“凑项”把左边配成右边括号的平方, 并引进新未知数  $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ .

**解** 因为  $\frac{x^2}{9} - \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2} = (\frac{x}{3} - \frac{4}{x})^2$ , 所以原方程可变为

$$(\frac{x}{3} - \frac{4}{x})^2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}(\frac{x}{3} - \frac{4}{x})$$

设  $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ , 代入上述方程, 得

$$y^2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}y \iff 3y^2 - 10y + 8 = 0$$

解得  $y_1 = 4/3, y_2 = 2$ .

再由方程

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \text{ 和 } \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2$$

解得原方程的四个根

$$x_1=6, x_2=-2, x_{3,4}=3 \pm \sqrt{21}.$$

**例 11** 解方程

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-4+2\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}} \\ & + \sqrt{x-6+2\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}} = 4 \end{aligned}$$

**分析** 注意到  $x-2=(x-3)+1$ , 则

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} = \sqrt{x-3}+1$$

可见配方易于去掉根号.

**解** 将原方程变为

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-4+2\sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2}} \\ & + \sqrt{x-6+2\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2}} = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = 4 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-3}+1=2 \Leftrightarrow x=4 \end{aligned}$$

经检验,  $x=4$  是原方程的根.

**例 12** 求方程  $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$  的实

数解.

**解** 原方程变为

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 2\sqrt{z-2} = x+y+z \\ \Leftrightarrow & (x-2\sqrt{x}+1) + [(y-1)-2\sqrt{y-1}+1] \end{aligned}$$

$$+[(z-2)-2\sqrt{z-2}+1]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$$

根据实数性质得

$$\begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y-1}=1 \\ \sqrt{z-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

经检验,  $x=1, y=2, z=3$  是原方程的解.

**注** 一般说来, 当未知数个数多于方程个数时, 方程(组)的解是不定的. 本题通过配方, 将左边凑成三个完全平方之和, 而右边为零, 利用非负数的性质, 显露了问题的特殊性:  $\sqrt{x}-1=0, \sqrt{y-1}-1=0, \sqrt{z-2}-1=0$  三者同时成立, 即原方程同解于三个方程组成的联立方程组, 使问题获得解决.

#### (四)在函数中的应用

**例 13** 求抛物线  $y=x^2-4x+1$  关于  $y$  轴对称的抛物线的解析式.

**解一** 原式可化为

$$y=(x-2)^2-3$$

所以, 已知抛物线的顶点为  $(2, -3)$ , 对称轴为  $x=2$ .

因为顶点  $(2, -3)$  关于  $y$  轴的对称点为  $(-2, -3)$ , 对称轴  $x=2$  关于  $y$  轴的对称直线为  $x=-2$ , 所以, 所求抛物线的解析式为  $y=(x+2)^2-3$ , 即

$$y=x^2+4x+1$$

**解二** 设抛物线  $y=x^2-4x+1$  上任意一点  $P$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ , 则  $P$  点关于  $y$  轴的对称点的坐标为  $(-x_1, y_1)$ . 因此, 求原抛物线关于  $y$  轴的对称抛物线的解析式, 只需用  $(-x)$  代

替原式中的  $x$  即可。所以, 所求抛物线的解析式为  $y = (-x)^2 - 4(-x) + 1$ , 即

$$y = x^2 + 4x + 1$$

**注** 前一种解法显得更简便, 更易于理解。

**例 14** 求函数  $y = x^4 + x^2 + 1$  的最值。

**解**  $y = (x^2)^2 + x^2 + 1 = (x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

因为  $x^2 \geq 0$ ,  $x^2$  最小是 0,  $x$  最小也是 0, 所以, 当  $x = 0$  时,

$$y_{\text{最小值}} = (0 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 1$$

**注** 如果套用二次函数求极值的公式  $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$  去求出  $y$  的最值, 那就错了。因为按此法, 当  $x^2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$  时,  $y$  取得极小值, 这是不可能的。因为  $x^2 \geq 0$ ,  $x^2$  不能取  $-1/2$ 。

一般地说, 当自变量取值范围有一定限制, 求  $y = ax^2 + bx + c$  的极值时, 不能轻易套用极值公式, 而应先通过配方, 再求极值, 这样做才不会得到错误的答案。

**例 15** 已知  $\alpha$  是三角形一内角, 且  $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 求

(1)  $\sin\alpha + \cos\alpha$  的值; (2)  $\alpha$  的度数。

**解** (1) 由  $\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{3}/4$ , 得

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

因为  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , 所以

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

所以  $|\sin\alpha + \cos\alpha| = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

因为  $0 < \alpha < 180^\circ$ , 且  $\sin\alpha\cos\alpha > 0$ , 所以  $\alpha$  是锐角, 故

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(2)由题设及(1)知,  $\sin\alpha$  与  $\cos\alpha$  是二次方程

$$x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

的两个根,解此方程得

$$x_1 = 1/2, x_2 = \sqrt{3}/2$$

即  $\sin\alpha = \frac{1}{2}$  且  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \alpha = 30^\circ$

或  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  且  $\cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = 60^\circ$

**注** 一般地,式子  $\sin\alpha\cos\alpha$ 、 $\sin\alpha + \cos\alpha$  及  $|\sin\alpha - \cos\alpha|$  中,任知其一,结合  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ,可求其余. 同学们应熟悉这种变换.

**例 16** 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  有最小值  $1/2$ , 且  $a : b : c = 1 : 3 : 2$ , 求此函数的解析式.

**分析** 由题设易知抛物线的顶点坐标是  $(-3/2, -1/2)$ , 故设二次函数为“配方式”求解较为方便.

**解** 设所求二次函数式为

$$y = a(x+h)^2 - \frac{1}{2} \quad (a > 0)$$

因为  $a : b = 1 : 3$ , 所以  $\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} = h$ . 此时, 函数解析式为

$$y = a(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2} = ax^2 + 3ax + \frac{9a-2}{4}$$

据题设条件  $c : a = 2 : 1$ , 得

$$\frac{9a-2}{4} : a = 2 \iff a = 2$$

故所求的二次函数式为  $y = 2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$ , 即

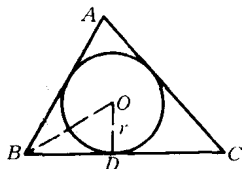
$$y=2x^2+6x+4$$

### (五)在平面几何中的应用

**例 17** 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle A + \angle C = 2 \cdot \angle B$ , 其中最大边与最小边分别是方程

$$3x(x-9)+32=0$$

的两根, 求 $\triangle ABC$ 的内切圆面积.



**解** 因为 $\angle A + \angle C = 2\angle B$ , 所以  $3\angle B = 180^\circ$ , 也就是 $\angle B = 60^\circ$ .

因为三角形中最大角不小于 $60^\circ$ , 最小角不大于 $60^\circ$ , 而 $\angle B = 60^\circ$ , 所以 $\angle B$ 必是最大边与最小边的夹角.

将方程整理为

$$3x^2 - 27x + 32 = 0$$

设最大边为 $a$ , 最小边为 $c$ , 而 $a, c$ 为方程的二根, 则由韦达定理知

$$a+c=9, ac=32/3$$

由余弦定理有

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ &= (a+c)^2 - 3ac = 9^2 - 3 \cdot \frac{32}{3} = 49 \iff b=7 \end{aligned}$$

所以 
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{3} \sqrt{3}$$

由公式  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} (a+b+c)r$  ( $r$  为三角形内切圆半径) 得

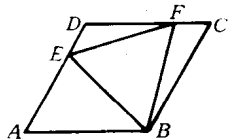
$$r = \frac{2S_{\triangle}}{a+b+c} = \frac{2 \cdot \frac{8}{3} \sqrt{3}}{9+7} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故三角形内切圆面积为

$$S = \pi r^2 = \frac{1}{3}\pi (\text{平方单位})$$

**注** 此例还可通过求方程的二根计算内切圆面积,但计算复杂.上述解法巧用根与系数的关系及配方法,使计算量大为减少.

**例 18** 边长为  $a$  的菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $E$  是  $AD$  上异于  $A, D$  两点的一动点,  $F$  是  $CD$  上的动点, 满足条件  $AE + CF = a$ .



(1) 证明, 不论  $E, F$  怎样移动,  $\triangle BEF$  总是正三角形;

(2) 求出  $\triangle BEF$  面积的最小值.

**解** (1)  $BE^2 = AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos \angle A$

$$= AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$$

$$= AE^2 + AB^2 - AE \cdot AB$$

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2BC \cdot CF \cdot \cos \angle C$$

$$= BC^2 + CF^2 - BC \cdot CF$$

$$= (BC - CF)^2 + BC \cdot CF = AE^2 + AB(AB - AE)$$

$$= AE^2 + AB^2 - AE \cdot AB$$

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cdot \cos 120^\circ$$

$$= (DE + DF)^2 - DE \cdot DF$$

$$= AB^2 - (AB - AE) \cdot AE = AB^2 + AE^2 - AE \cdot AB$$

所以  $BE = BF = EF$

故不论  $E, F$  怎样移动,  $\triangle BEF$  总是正三角形.

(2) 设  $AE = b$ , 则  $\triangle BEF$  每边的长为

$$\sqrt{b^2 + a^2 - ab}$$

当边长最小时, 其面积最小. 因为

$$b^2 - ab + a^2 = (b - \frac{a}{2})^2 + \frac{3}{4}a^2$$

所以,当  $b = \frac{a}{2}$  时,边长有最小值  $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

故  $S_{\text{最小值}} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 a \sin 60^\circ = \frac{3}{16} \sqrt{3} a^2$

**例 19** 若  $a, b, c, d$  皆为正数,且满足

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$$

求证,以  $a, b, c, d$  为边的四边形是菱形.

**分析** 只须证得  $a = b = c = d$  即可.

**证** 将条件式变形

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd = 0$$

即  $(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$

所以  $a^2 - b^2 = 0, c^2 - d^2 = 0, ab - cd = 0$

从而  $a = b = c = d$

故以  $a, b, c, d$  为边的四边形是菱形.

## 习 题 一

1. 已知  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ , 求下列各式的值.

(1)  $x + x^{-1}$ ; (2)  $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ .

2. 若  $3(a^2 + 4b^2 + 9c^2) = (a + 2b + 3c)^2$ , 求证  $a = 2b = 3c$ .

3. 证明, 若  $s = a + \frac{1}{a}$ , 则  $s^2(s^2 - 4) + 2 = a^4 + \frac{1}{a^4}$ .

4. 若  $4(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}) = x + y + z + 9$ , 那么  $xyz$  的值等于多少?

5. 解关于实数  $x, y, z$  的方程

$$(8zx^2 - 27y^2 + 9yz)^2 + (3y^2 - yz + 2z^2 - 8x)^2 + 9$$

$$=6x-x^2$$

6. 化简:  $(\frac{1+\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2})^4 + (\frac{1-\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2})^4$

7. 当  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$  时, 化简:  $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}$ .

8. 设方程  $x^2-1=1992x$  的两根为  $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ , 求代数式  $\alpha(\frac{27-8\beta^3}{3-2\beta})-5\alpha$  的值.

9. 已知三角形的一边长为 13cm, 该边上中线长为 6.5cm, 面积为  $30\text{cm}^2$ , 求三角形的周长.

10. 设  $a, b, c, d$  均为实数, 且

$$ad-bc=1, a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$$

求  $abcd$  的值.