文科与经济类

高等数学

（下册）

■ 刘金舜 羿旭明 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

文科与经济类

高等数学

（下册）

■ 刘金舜 羿旭明 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册:文科与经济类/刘金舜,羿旭明编著.—武汉:武汉大学出版社,2005.1

ISBN 7-307-04406-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…　②羿…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材

Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 129248 号

责任编辑:李汉保　　　责任校对:刘　欣　　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉凯威印务有限公司

开本:880×1230　1/32　印张:9.75　字数:266 千字

版次:2005 年 1 月第 1 版　　　2005 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04406-4/O・312　　　定价:18.00 元

内容简介

本书是大学经济管理类(包括文科)的高等数学教材,列为武汉大学"十五"规划教材之一。

全书分上、下两册,共十四章。

上册介绍一元函数的微积分学,包括函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分以及导数在经济学中的应用,定积分的应用等。下册介绍空间解析几何、二元(多元)函数的微积分学、无穷级数、微分方程及差分方程等。

本书在传统的经济类高等数学的基础上内容稍有拓宽,主要是加强了空间解析几何和无穷级数方面的内容。

本书的最大特色是:每一章都按时下流行的考试命题模式,配备一套针对本章内容的综合练习题。此外,在全书最后,还配有两套综合全书内容的综合练习题。这些试题,既有深度,又有一定的难度。熟练地掌握这些试题的解题思路及证明方法,对将来考研将起到很好的桥梁作用。

前　言

为了使高等教育教材建设更好地适应经济建设、科技进步和社会发展，更好地适应教学与改革的需要，武汉大学确定并公布了“十五”规划教材，本书为“十五”规划教材之一。是面向大学经济管理类、财经类(包括文科)的高等数学教材。

实践已经证明，高等数学不仅在物理学、力学、天文学、计算机科学、生命科学、工程学等自然学科领域内得到广泛的应用，在经济领域中，高等数学也越来越活跃。无论是经济理论的研究，或是对某种经济现象的定性分析，高等数学已成为最有力的工具。因此，《高等数学》成为高等学校财经类、管理类等专业本科生必修的核心课程之一，也是硕士研究生入学考试中的一门必修科目。对于文科类的学生来说，通过《高等数学》的学习，对于提高自身的抽象思维能力，严格的逻辑推理能力，空间想象能力等都有极大的帮助。

本教材在基本保持传统经济类高等数学体系和经典内容的同时，注重渗透现代数学思想的概念和方法，在内容的取舍与编排上力求大胆创新。此外，本书在现有经济类高等数学内容的基础上稍有拓宽与加深，其主要目的，是为了满足读者在学习后续课程的需要。同时，本书突出经济类高等数学的特点和数学在经济中的应用。本教材在编写的过程中，始终贯彻教学建模的思想，使学生在学习数学的同时，自然领略到数学的精髓和数学对经济研究的作用。

本教材分上、下两册出版，总课时为144学时，上册除对初等数学进行重点复习与归纳外，着重介绍了一元函数的微积分学。它包括函数的极限、连续、导数、不定积分与定积分、广义积分等。此外，还介绍了导数在经济学中的应用，定积分的应用等。下册首先介绍了空间解析几何。为了给学生一个较为完整的空间几何的概念，使

学生在学习二重积分时,不致因缺乏空间几何的概念而产生困难,我们用较大篇幅系统地讲授了空间解析几何的基础知识。此外,下册还介绍了二元函数的偏导数、全微分、二元函数的极值、二重积分、无穷微分、常微分方程初步以及差分方程等。书中有些章节,作者打了"*"号,在讲授时可视具体情况予以灵活处理。

本套教材的每一章后都配备了大量的基本练习题。此外,每一章还精心编写了一套针对本章内容的综合练习题。在全书最后还编写了两套综合全书的综合练习题。这十六套综合练习题,倾注了作者的大量心血。它既有广度,又有深度,当然还有一定的难度。这些练习为有志于考研的学生提供了一个较为广阔的平台。套用一句时下最流行的话:与考研接轨。

本教材第一章由韦光贤编写;第二~七章由刘金舜编写;第八~十四章由羿旭明编写。除第一章的习题由韦光贤编写外,其余 13 章的习题及综合练习题均由刘金舜编写。全套教材最后由刘金舜审核定稿。在编写过程中,我们参阅了国内外部分院校的相关教材,主要参考书目列于参考文献;部分内容取自中国人民大学赵树源教授编写的《微积分》一书。

本教材从立项、编写到出版,一直得到武汉大学数学与统计学院的领导及武汉大学出版社的关心与支持,在此一并表示衷心地感谢!

限于作者自身的文化修养及水平,书中错漏之处在所难免,殷切希望读者指正。

刘金舜

2004 年 3 月

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

在后面相关章节中，我们将讨论多元函数微积分学，而空间解析几何学作为多元函数微积分学的基础是不可或缺的，考虑到后面只涉及空间解析几何的部分内容，因此本章并不准备详细地介绍有关空间解析几何学与向量代数的全部内容，而只就相关知识作些介绍。

§8.1　向量及其线性运算

8.1.1　向量的概念及几何表示

许多量如质量、长度、面积、体积等，它们在取定一个单位后，可用一个数来表示，这种量称为标量（或数量）；有一类量如速度、加速度、力等，除了要用数量来表示其大小外，还必须指出其方向，这种既有大小，又有方向的量称为向量（或矢量）。通常我们习惯用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{s}$ 等。

在几何学中，常常用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，其中，A 为向量的起点，B 为向量的终点（如图 8-1 所示）。用有向线段的长度表示向量的大小（或称向量的模），常用 $|\overrightarrow{AB}|$（或 $|\boldsymbol{a}|$）表示，有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向表示该向量的方向。对于起点不同的向量，除非向量的大小或向量的方向不同，否则我们认为是同一向量，并称这种向量为自由向量。后面我们仅限于讨论自由向量。例如，在图 8-2 中，$ABCD$ 为一平行四边形，对于自由向量，则有

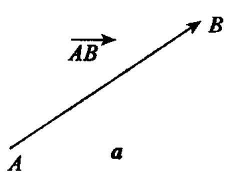

图 8-1

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

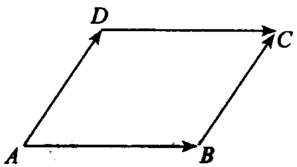

图 8-2

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同,方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量(或反向量),记做 $-\boldsymbol{a}$;模等于1的向量称为单位向量;模等于0的向量称为零向量,记做$\mathbf{0}$;零向量没有确定的方向,或者说零向量的方向可以任意选取。

将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平行移动到相同的起点,这时向量所在的射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记做$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,如图 8-3 所示。并规定零向量与其他任意向量的夹角为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 中的任意值。如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π,我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行,并记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,同时规定零向量与任意向量平行。如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于$\frac{\pi}{2}$,我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直,并记做 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,并规定零向量与任意向量垂直。

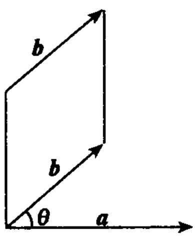

图 8-3

8.1.2 向量线性运算的几何方法

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点平行移动到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点,此时,我们把从向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点到向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 8-4 所示。这种定义向量和的法则称为向量加法运算的三角形法则。显然,若将两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点,并以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则其对角线上的向量同样可以定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(见图 8-4),这种定义向量和的法则称为平行四边形法则。

两个向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量加法的情形:将所有向量依次平移,使之首尾相连,这样,从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是这些向量的和,如图 8-5 所示。

向量的减法定义为向量加法的逆运算,对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{c}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。从图8-6

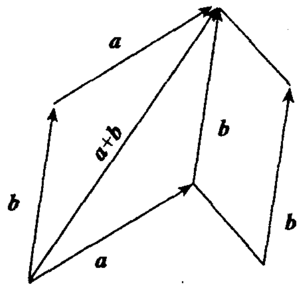

图 8-4

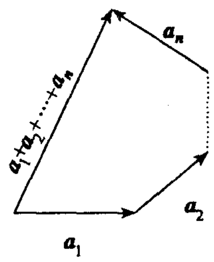

图 8-5

容易看出

$$a - b = a + (-b)$$

即向量 $a-b$ 等于向量 a 与 b 的反向量之和。而且，当向量 a 和 b 在同一起点时，向量 $a-b$ 等于从向量 b 的终点到向量 a 终点的向量。

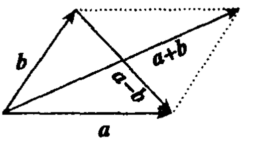

图 8-6

2．向量的数乘

对于任意实数 λ 和向量 a，定义 λ 与 a 的乘积（简称数乘）是一个向量，记为 λa，它的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda a| = |\lambda||a|$；

(2) 当 $\lambda > 0$ 时，λa 与 a 同方向；当 $\lambda < 0$ 时，λa 与 a 反方向；当 $\lambda = 0$ 时，$\lambda a = \mathbf{0}$。

由数乘定义知，对于任意非零向量 a 和任意实数 $\lambda \neq 0$，总有 $a /\!/ \lambda a$；反过来，若非零向量 a 和 b 平行，必存在实数 λ，使 $b = \lambda a$。此时我们就有结论：非零向量 a 与 b 平行的充分必要条件是存在实数 λ，使 $b = \lambda a$ 成立。

有了数乘的概念后，对于向量 a 的反向量 $-a$，也可以理解为 $(-1)\cdot a$。同时，$a-b$ 也可以理解为 $a+(-1)\cdot b$。而且，对于任意非零向量 a，向量 $a^0 = \frac{1}{|a|}a$ 为与向量 a 同方向且模为 1 的单位向量，由此即有 $a = |a|a^0$，即任一非零向量都可以表示成其单位向量的数乘。

根据定义及几何作图法,可以验证向量的加法和数乘具有如下基本运算规律:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(加法交换律);

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(加法结合律);

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(4)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(5)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(数乘结合律);

(6)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(数乘分配律);

(7)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(数乘分配律)。

其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意向量,λ 和 μ 为任意实数。

向量的加法和数乘满足上述运算规律,如此定义的向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算。

§8.2 空间直角坐标系与向量的坐标

8.2.1 空间直角坐标

为了建立空间中的点与数的关系,我们采用类似于平面解析几何的办法引进空间直角坐标系。

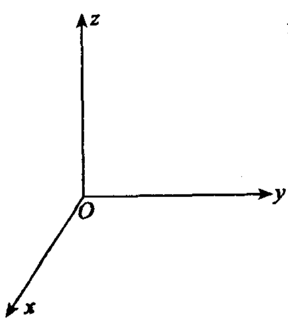

图 8-7

在空间中任取一定点 O,过 O 点作三条相互垂直的数轴,各数轴的原点均位于 O 点,且都具有相同的长度单位,这三条轴分别称为 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴。为了确定起见,我们同时还规定其中的 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的正方向符合右手规则:即以右手握住 Oz 轴,当右手的四个手指从正向 Ox 轴以 90° 角转向正向 Oy 轴时,竖起的大拇指的指向就是 Oz 轴的正方向,如图 8-7 所示。图中箭头的指向表示 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正向。这样的三条数轴就组成了一个以 O 点为原点的空间直角坐标系 $Oxyz$,Ox 轴、Oy 轴

和 Oz 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴，并统称为坐标轴。

由 Ox 轴和 Oy 轴所确定的平面称为 xOy 平面，其他两个由 Ox 轴和 Oz 轴、Oy 轴和 Oz 轴所确定的平面分别称为 xOz 平面和 yOz 平面，这三个平面统称为坐标平面。

三个坐标平面把整个空间分成八个部分，每一个部分称为一个卦限。含有 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限。在 xOy 平面上方，并按逆时针方向分别是第二、第三和第四卦限。在 xOy 平面下方，并和第一、第二、第三、第四卦限上下对应的四个卦限分别是第五、第六、第七、第八卦限。八个卦限的位置如图 8-8 所示，在图中分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示。

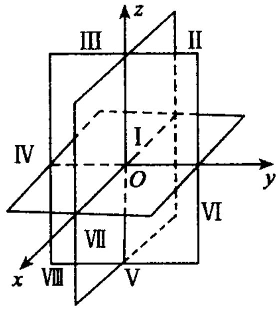

图 8-8

8.2.2 点和向量的投影

在空间中自点 A 向平面 π 作垂线，所得的垂足 A' 称为点 A 在平面 π 上的投影，如图 8-9 所示。

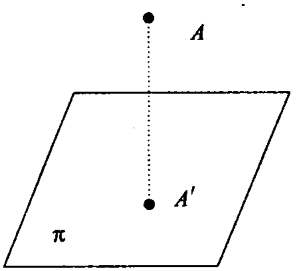

图 8-9

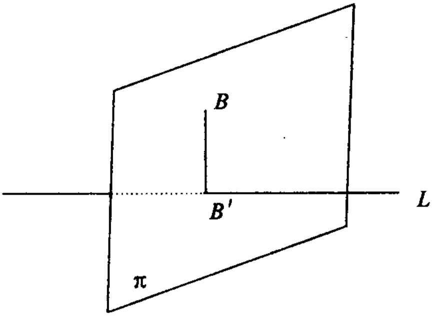

图 8-10

过空间一点 B 作平面 π 垂直于直线 L，相交于点 B'，称点 B' 为点 B 在直线 L 上的投影，如图 8-10 所示。

设$\overrightarrow{AB}$为一空间向量,起点 A 和终点 B 在某个 u 轴上的投影分别为点 A' 和 B',且 A' 和 B' 在 u 轴上的坐标分别是 u_A 和 u_B,则称向量$\overrightarrow{A'B'}$为向量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影向量,同时称 u_B-u_A 为向量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影,记做 $P_u\overrightarrow{AB}$,即

$$P_u\overrightarrow{AB}=u_B-u_A。$$

由定义知,设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量,则有

$$\overrightarrow{A'B'}=(u_B-u_A)\boldsymbol{e}=(P_u\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}。$$

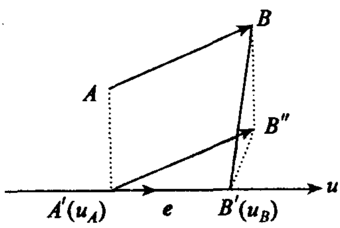

图 8-11

在图 8-11 中,若将$\overrightarrow{AB}$的起点 A 平移到 u 轴上的 A',此时向量$\overrightarrow{AB}$平移到$\overrightarrow{A'B''}$,由图可知

$$P_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\boldsymbol{e}})。$$

即一个向量在某轴上的投影等于该向量的长度与此向量和该轴夹角的余弦的乘积。

根据投影的定义,我们还可以定义向量 $\boldsymbol{a}$ 在非零向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影。当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时,

$$P_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时,$P_b\boldsymbol{a}=0$。并给出如下定理:

定理8.1 (1)两个向量的和在某轴上的投影,等于这两个向量在此轴上的投影之和,即

$$P_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=P_u\boldsymbol{a}+P_u\boldsymbol{b};$$

(2)一个数与向量的数乘在某轴上的投影,等于该数与此向量在该轴上的投影之积,即

$$P_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\cdot P_u\boldsymbol{a}。$$

证 (1)作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 点为起点作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}。$$

设点 A、B、C 在 u 轴上的投影分别为点 A'、B'、C',且各自在 u 轴上的坐标分别为 u_A、u_B、u_C,如图 8-12 所示,则

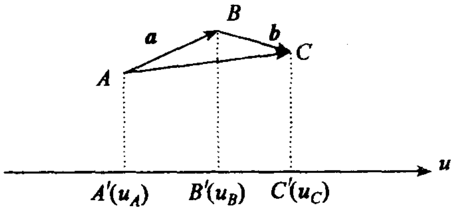

图 8-12

$$P_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=P_u\overrightarrow{AC}=u_C-u_A$$
$$=(u_C-u_B)+(u_B-u_A)=P_u\boldsymbol{a}+P_u\boldsymbol{b}。$$

(2)根据向量投影的定义(u 轴可以看做是一个向量,在此不妨记做 $\boldsymbol{u}$),则

$$P_u(\lambda\boldsymbol{a})=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$$
$$=\begin{cases}|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}),\text{当 }\lambda\geqslant 0\\ -|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}),\text{当 }\lambda<0\end{cases}$$
$$=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})=\lambda\cdot P_u\boldsymbol{a}。$$

8.2.3 空间点的坐标与向量的坐标

1. 空间点的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下,空间中任一点可以用它的坐标来表示。具体地,设 M 为空间任一点,过 M 点分别作三个坐标轴的垂直平面,如图 8-13 所示,与 Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴分别交于 P、Q 和 R 点(即点 M 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影点),这三个点在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的坐标依次为 x,y 和 z,称有序数组 (x,y,z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标;反过来,已知一有序数组 (x,y,z),在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上分别找到相应的点 P、Q 和 R,使点 P、Q 和 R 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的坐标分别为 x,y,z。通过点 P、Q 和 R 分别作 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的垂直平面,相交于惟一一点 M,即惟一确定了空间中的一点 M。这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系,并称其中的 x、y 和 z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标,常记为

$M(x,y,z)$。

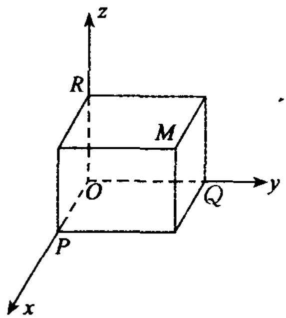

图 8-13

特别地,在坐标平面和坐标轴上的点,其坐标具有一定的特征。如原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上点的坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$和$(0,0,z)$;xOy 平面、xOz 平面和 yOz 平面上点的坐标为$(x,y,0)$、$(x,0,z)$和$(0,y,z)$。

2. 空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间中任意两点,过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图 8-14 所示,易知长方体的棱长分别为$|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$和$|z_2-z_1|$,于是对角线 M_1M_2 的长度,即空间任意两点 M_1 和 M_2 之间的距离为

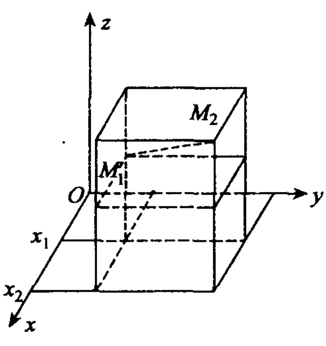

图 8-14

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。$$

特别地,点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d=|MO|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

3. 向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴