现代物理基础丛书 6

理论力学

张建树　孙秀泉　张正军　编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是西北大学“面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”重点课程项目研究成果，全书以经典力学基本内容为基础，较好地融合了该学科内容的最新进展，系统地阐述了经典力学的基本理论，简要介绍了非线性力学最基本的内容。材料取舍主要考虑物理学专业后继理论物理课程的所需内容，加大了与近代物理有紧密联系的分析力学的比例。基础理论部分以对称性为主线组织教材内容，强调了对称性在物理学中的重要性；应用部分多以分析力学方法处理，以加深对分析力学的理解。非线性力学部分介绍了分形、分维、混沌和奇异吸引子等概念。全书共七章：牛顿力学、拉格朗日力学、哈密顿力学、有心力场中运动、非惯性系中的运动、刚体力学、非线性力学。

本书可作为综合大学、高等师范大学物理学专业及有关专业理论力学课程的教材，也可作为相关理工科专业师生和科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/张建树，孙秀泉，张正军编著. —北京：科学出版社，2005
（现代物理基础丛书；6）
ISBN 7-03-014356-6

Ⅰ. 理… Ⅱ. ①张…②孙…③张… Ⅲ. 理论力学 Ⅳ. 031

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第101575号

责任编辑：胡 凯 鄢德平/责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2005年8月第一次印刷 印张：20
印数：1—3 000 字数：380 000

定价：42.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

前　　言

近年来非线性力学的蓬勃发展，赋予了古老的经典力学新的活力。经典力学曾经被视为“确定论”的典范，这种思维定式曾统治物理学界达250年。现在我们知道，牛顿力学具有内在随机性，因此，有必要以现代观点重新审视理论力学的内容，并反映本学科的最新进展。

为适应我国高等教育发展的需要，国家在创建面向21世纪百所重点高校“211工程”的同时，为了加强理科基础科学研究和教学，为其输送高质量的合格人才，经过严格评选，在一些重点大学建立了“物理学专业国家理科基础科学研究和教学人才培养基地”，即所谓“物理学基地”，以加强物理学人才的培养。本书是在编者多年来在西北大学“物理学基地”讲授理论力学课程讲义的基础上逐渐修改补充而成的。

本书具有以下主要特点：

1．目标明确，针对性和适用性更强。本书主要读者是物理学专业的师生和科技工作者，特别是物理学专业“国家理科基础科学研究和教学人才培养基地”的学生。针对这一特定目标，本书是按公理化体系编写的。理论力学是物理学专业一门必修的基础理论课，也是学习其他理论物理课程的入门课，材料取舍主要考虑后继理论物理课程［热力学、统计物理、量子力学和场的理论（如电动力学、量子场论等）］的需要，详略适度。

2．以对称性为主线组织基本理论部分的内容。对称性在现代物理学中起着极其重要的作用。本书的基础理论部分，以对称性为主线，从时空对称性导出守恒量，并经过牛顿力学和分析力学两个循环，逐步深化对于对称性的认识。

3．加大了与近代物理有紧密联系的分析力学内容的比重。本书兼顾牛顿力学和分析力学，侧重点在分析力学。中心力场的运动和刚体力学，国内大部分理论力学用书都是用牛顿力学方法处理，本书则用分析力学方法处理。因为，分析力学是近代物理学的接口，能为掌握理论物理学的概念、方法、模型和技巧提供必要的基础。本书对近代物理中那些重要的分析力学表述都给予了充分的强调，以减少向量子理论过渡的困难。

4．力图采用严谨的数学方法，启发抽象思维。理论力学是与普通物理力学不同的一门理论课程。理论物理有自己独特的研究方法，这就是运用数学语言，

进行严密逻辑推理过程。本书用坐标变换的性质阐明矢量和张量，尽可能采用近代物理中的数学方法，如本征值方程、矩阵代数、变分法等，以适应物理学发展的需要，并便于和后继理论物理课程衔接。

5. 反映本学科的最新进展。近些年来，经典力学这门古老学科又焕发了青春，取得了长足进步。这就是以混沌的发现为代表的非线性力学的巨大进展。本书用一章的篇幅简要介绍了分形和分维、混沌及奇异吸引子等概念。这部分内容对于开拓视野，大有裨益。

本书突出了基本知识、基本理论和基本技能，全书共分七章。前三章是基础理论部分，其中第一章为牛顿力学，第二、三章为分析力学。第四章讲述有心力场中的运动。第五章为非惯性系中的运动，为第六章做准备。第六章为刚体力学。第七章为非线性力学。书末编入了矢量、张量和矩阵运算等数学附录，以方便查阅。

书中有 * 号的内容，相对独立，可作为选学内容。

编写本书过程中西北大学谢大来、何宗海、董庆彦和姚合宝等教授提出过许多宝贵意见和建议，使本书增色不少。此外还得到陆江、唐泉和史小延等同志的帮助，在此谨致感谢。

本书属于西北大学面向 21 世纪教学内容改革研究计划首批重点课程教材之一，得到了校系领导的关怀和支持，特别感谢学校在编写、出版经费方面所给予的支持。

由于时间仓促，又限于学识水平，不当之处甚至错误在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

2004 年 9 月于西北大学

目　　录

第一章　牛顿力学

1687年牛顿划时代的巨著《自然哲学[①] 的数学原理》一书问世，这是力学发展史上一个重要的里程碑。自此以后，力学有了一个普遍的理论体系，并且成为物理学的基础。牛顿创立的力学的特点是用矢量形式建立起力学的基本定律，然后按作用于每个质点的力去确定每个质点的运动规律。通常称牛顿力学为**矢量力学**。

由牛顿同时代的学者莱布尼兹开始，后经拉格朗日、哈密顿、欧拉等人的努力，力学也沿着另外一条途径发展，逐渐地形成了另一套方法，这就是将力学的基本定律表示为分析数学的形式，并运用分析的方法去解决任意力学系统的运动问题。这种处理力学问题的方法叫做**分析力学**。

由于矢量方法较纯分析的方法直观，所以我们先从矢量力学开始学习。

1.1　牛顿第一定律

1.1.1　参考系

为了研究一个物体的运动，必须选择其他物体（一般指三维刚体）作参考。显然，若无参考物体，运动也就无从谈起。我们说一物体运动时，总是相对于其他物体而言的。不讲相对于另一些物体的所谓绝对运动是毫无意义的。这种选作参考标准的物体或物体的集合，叫做**参考系**。由参考物体刚性延伸得到的三维空间称为**参考空间**。

运动的相对性是和空间概念本身的相对性相联系的。

1.1.2　坐标系

选定了适当的参考系后，只能定性地判断物体是否运动，要定量地描述物体相对于参考系的位置变化，还必须在参考系上选择一个适当的**计算系统**，即**坐标系**。[②] 坐标系是描述运动的重要工具，是观察者用以观察运动假想的基架。

---

① “自然哲学”是以前英国对物理学的习惯称呼。现在英国某些刊物仍然沿用这个称呼。

② 有人只把三维空间坐标称为坐标系，除确定空间坐标外，再配以记载时间的方法，认为构成计算系统，在四维时空连续区，时间和空间处于同等地位。为了便于概念推广，我们在谈到坐标系时，一般包含时间在内。也正是在这种意义上本书把计算系统和坐标系等同看待。

参考空间也可以用坐标系来确定。以后凡说“相对于某个坐标系运动”意思总是指“相对于某个坐标系所确定的参考空间运动。”

坐标系的选择可以有无穷多种方法。一个物体的运动在不同的坐标系中，一般来说是不同的。如果坐标系选在物体的自身上，那么在此坐标系中物体将是静止的，而相对于其他坐标系将是运动的。而且在不同的坐标系中运动情况也不相同，也就是说按不同的轨道运动。例如，列车沿着轨道行驶时，对于固连于车厢的坐标系来说，车厢里坐着的乘客是静止的；但对于固连于地球上的参考系来说，则乘客又在随着车厢一起运动。又如，当无风下雨时，雨点对于地面来说是铅直下落的，对于行驶着的汽车来说则是向后偏斜的。

1.1.3 牛顿第一定律

既然坐标系的选择有无穷多种，很自然，选择坐标系应该使自然现象的力学规律在其上显得最简单。如果我们所研究的物体距其他物体很远，以致于后者对它的运动毫无影响，称这样的物体运动为**自由运动**。

当然，自由运动的条件只有在某种精确度的情况下才能实现，自由运动像其他类型运动一样，在不同的坐标系中观察的结果也往往不同。但是，选择坐标系固定在某个自由运动的物体上，则在此坐标系中观察其他物体的自由运动就特别简单：它们在做匀速直线运动。换句话说，它们的速度大小和方向都是不变的。这个结论就是所谓**惯性定律**的内容。惯性定律也叫**牛顿第一定律**，是伽利略在牛顿之前确立了的。所以该定律亦称**伽利略-牛顿第一定律**。

关于什么是惯性坐标系的问题，还可换个角度来看。下面的论述会牵涉到质点、速度、初位置等概念。我们假定读者在基础物理的学习中已经有了这些概念。当然，本章有关部分还会对这些概念再做详细阐述。我们可以把距其他物体极远的质点视为**孤立质点**。其他物体能使孤立质点获得的加速度是无穷小的。同时，实验也表明，对于某些坐标系而言，孤立质点的加速度为零；对另一些坐标系而言时，孤立系统却可以做加速运动。所谓**惯性坐标系**，相对于它来说，一孤立质点或者处于静止状态，或者将从任一初始位置出发，沿任一方向做匀速直线运动。在惯性坐标系中，孤立质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间的**线性**函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{1.1.1}$$

其中，$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 可取任意常数值。凡对孤立质点条件式（1.1.1）不能满足的坐标系，叫做**非惯性坐标系**。关于非惯性坐标系问题将在第五章进行专题讨论。

骤然看来，似乎惯性系的引进，除了给出计算系统本身的性质以外，还给出了绝对空间和相对于这个坐标系绝对静止的概念的可能性。实际上并不是这样，这是因为惯性坐标系有无穷多个。事实上，若某个坐标系相对于另一惯性坐标系以恒定速度（大小和方向都不变）运动，则它也是惯性坐标系。

必须强调指出，惯性坐标系的存在并不是纯粹逻辑上的必然性。从原则上说，惯性坐标系的存在和相对于惯性坐标系物体的自由运动是匀速直线运动，是一个基本的自然定律。

1.1.4 伽利略相对性原理

很显然，研究自由运动的时候，我们不可能把不同的惯性坐标系区分开。是否可能产生这样的问题：是否在研究其他物理现象时，可以把某一个惯性坐标系和其他惯性坐标系区分开，这样就可以从惯性坐标系中分出一个特殊的？如果这样分出是可能的，那么我们就可以说存在着绝对空间和相对于这个特殊坐标系绝对静止的概念。但是，这样选择的坐标系是不存在的，因为所有的物理现象在不同的惯性坐标系中都是一样的。

一切自然定律在所有惯性坐标中具有相同的形式，因而这些惯性系实际上彼此无法区别，或者说是完全等价的。这是物理学中一个极为重要的原理，称为**运动的相对性原理**，或称为**伽利略相对性原理**。从而，绝对空间、绝对静止和绝对运动的概念就完全失去了意义。

因为一切物理定律在所有惯性坐标系中都以相同的方式表达（虽然在不同的惯性坐标系中这些具体表述有区别），因而，很自然地，一般研究物理现象都乐于采用惯性坐标系。以后我们若未加特别说明，都是指惯性坐标系而言的。

事实上，物理学上所用的实验室坐标系仅在一定精确度范围内是惯性坐标系。因为坐标系固定在地球上，这个坐标系不是惯性系的原因是地球绕着自身的轴自转并绕着太阳公转。在地球上不同地点的运动是不相同的，速度也不是恒定的，因而固定在地球上的坐标系不是惯性坐标系。但是，因为地球绕地轴自转和绕太阳公转都比较慢，实际上引起的误差是微不足道的，对于大部分实验的影响可以忽略不计，因而我们往往把固定在地球上的坐标系当作惯性坐标系看待。尽管固定在地球上的坐标系上的运动与真正惯性系中的运动相差甚微，但还是可以观察到的。例如，借助傅科摆就可以做到这一点（参见5.6节）。

下面再来进一步探讨一下惯性系的问题。因为一般说来，不同坐标系中运动规律有着不同的形式，假如选取一个任意的坐标系，则可能使很简单的现象的规律在这个坐标系中看起来却很复杂。自然就产生了一个寻找这样一种坐标系的课题，在这种坐标系中力学规律要显得特别简单。

对于任意一个坐标系来讲，空间并不是均匀和各向同性的。这就是说，即使某一物体不与其他物体相互作用，但它在空间的不同位置和它的不同指向在力学意义上也并非等效的。在一般情况下，这也适于非均匀的时间。也就是说，不同的时刻也不等效。由于空间与时间的这些性质，在描写力学运动时的麻烦是显而易见的。例如，自由的（不受外界作用的）物体不可能静止，即使在某一时刻物

体的速度等于零，但在下一时刻物体就会在某一方向开始运动。

然而，**总可以找到这样的坐标系，相对于它来说，空间是均匀和各向同性的，而时间也是均匀的。这种坐标系叫做惯性坐标性系，简称惯性系。**

1.2 质点的速度和加速度

1.2.1 质点和质点系

质点的概念是力学中最基本的概念之一。质点是具有有限质量的几何点，是用来描述物体平动的概念。平动是指这样一种运动，物体的所有微小部分（简言之，它的所有质点）的运动速度，不论在数值上还是在方向上都是相同的。

质点应当理解成这样的物体，当描述它的运动时，可以忽略它的大小和内部结构。当然这样的忽略与问题的具体条件有关。例如，当研究行星围绕太阳运动时，可以把行星看成质点，然而在观察它们自转的时候，当然就不能这样看了。

一切物理概念都是实际的简化。在质点概念中，简化不在于为考察方便而划分某些特殊的物体，而在于划分出任何物体的一些特定的运动状态，或更确切地说是局部运动状态。质点的概念可用来描写任何大小、任何几何形状以及处于任何聚集态（固态、液态或气态）的物体的平动。

质点这一概念也可以用于物体的某些非严格平动的情形，即与平动的差别不重要的情形。如果物体的转动不影响其质心的运动，则物体可以看作质点。这些到有关章节再来讨论。

综上所述，当物体运动所涉及的空间尺度比它自身的尺度大得多，而且可以忽略物体自身的变形和转动时，在大多数问题中我们可以把它简化为质点来研究。

实际上，自然界中既不会有理想质点，也不会有绝对刚体和完全弹性体。这一切都不过是科学上所不得不使用的抽象概念，其目的在于用来把实在客体中那些在解决所给问题时必须考虑的性质正确地反映出来，采用抽象概念永远不可能完全地反映出实在客体的全部性质。但是抽象概念未反映的那些性质对所研究运动的特性并无明显影响，当然也没有必要去反映客体的全部性质。在研究物体的运动时，假如企图把该物体的全部性质都考虑进去，问题就会复杂得实际上无法解决。

我们要提醒读者注意，科学理论都是只对概念，而不是对现实进行讨论的。所有理论性结果都是从某些公理通过演绎逻辑推导出来的。在物理学中，理论的陈述在某种意义下符合现实世界，不管这意味着什么。然而，这种符合只是近似的，所有理论性的结论的物理验证则基于某种形式的归纳推理。

无论多么合乎逻辑和有连贯性的物理理论，都采用了不能反映客体全部性质的抽象概念。而这些概念是否合理，理论本身并不能做出结论。只有理论及其推论与实验一致才能提供这种证明。

大家知道，力学的研究对象是物体，其任务是考察一给定的物体在其周围环境外力作用下的运动变化，并预言它将来的运动情况。因此，首先应当把要考察的物体从它周围环境中分离出来，这就是我们常说的分离体。刚才提到的“质点”就是最特殊的分离体。我们还经常以“粒子”替代质点这个词，但要注意经典力学中的质点并不是微观粒子。不要把我们这里“粒子”的概念和真实的微观粒子相混淆。

任何一个分离体都具有长度、体积及内部结构，一般情况下这些特性都必须加以考虑，因此通常不能把物体当成质点，而必须看成质点的集合，即**质点系**。所谓质点系是指许多（有限或无限）相互联系着的质点所组成的系统。质点和质点系是力学中两个基本模型。

若质点系中任意二质点距离始终不变，则我们把这一特殊质点系叫**刚体**。若以 $r_{\alpha\beta}$表示刚体中α 点和β 点的距离，则构成刚体的条件是

$$r_{\alpha\beta}=c_{\alpha\beta} \tag{1.2.1}$$

其中，$c_{\alpha\beta}$是常数。虽然在实际上并不存在这样理想的刚体，自然界实际存在的某些系统只可能近似地符合这个条件。但是，对于我们日常所碰到的很多固体来说，如果把它视为刚体，得到的力学结果是足够准确的；另一方面，这种近似可以大大地简化我们的研究工作和解题过程。

1.2.2 质点的速度和加速度

一个质点在空间中的位置由它的位矢 $\boldsymbol{r}$ 确定。一般来说 $\boldsymbol{r}$ 是时间的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.2.2}$$

我们假设矢量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是连续的（参阅 1.6 节）。设某一所考察的点在空间移动，从 $t=t_0$ 时开始计时，在 $t\geqslant t_0$ 的时间进程中，质点位置的连续序列称为质点的**轨道**，它是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的**矢端曲线**。

位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的微商叫**速度**

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.3}$$

矢量的微商沿矢量矢端曲线的切线方向，所以，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿轨道的切线方向，指向质点的运动方向。

质点的速度对时间的一次微商，或者质点位矢对时间的二次微商叫做质点的**加速度**

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.2.4}$$

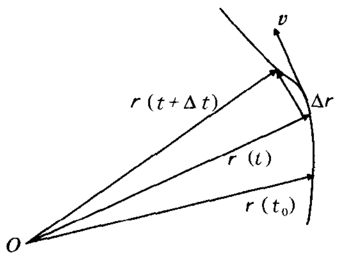


图 1.1 速度矢量

按照一般理论物理的惯例，我们将常常用在字母上方的一个小圆点表示对时间的微商，例如，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$。

但是，在某种意义上说，给出坐标的数值还不能确定系统在该时刻的力学状态，因为我们并不能由此预言系统在下一个时刻的位置。在给定了坐标数值的情况后，系统可以有任意的速度。而由于速度的不同，系统在下一个时刻（也就是说，经过无穷小的时间时隔 $\mathrm{d}t$ 后）的位置也将不一样。

实验证明，**同时给定所有的坐标和速度就能完全确定系统的状态，并且在原则上可以预言它以后的运动。从数学的观点来看，这就是给定某一时刻的坐标和速度也就单值地确定了在该时刻的加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$。**

把加速度和坐标、速度联系起来的关系式叫**运动方程**。对函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 来说，这是一个**二阶微分方程**。这些方程的积分在原则上可以确定力学系统的**轨道**。

1.2.3 角速度和角加速度

一个在空间做任意运动的点或质点，在某一**瞬时**总是可以看成在一平面上绕某个轴做圆周运动，也就是说，质点在无限小的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内所走的路径可以表示为无限小的圆弧。通过圆心且垂直于运动的瞬时平面的直线称为**瞬时转动轴**。当质点做圆周运动时，角位置 θ 的变化率称为**角速度**

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta} \qquad (1.2.5)$$

考虑一质点，其瞬时运动是绕某个垂直于运动平面的轴做半径为 R 的圆周运动，如图 1.2 所示。质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 从位于旋转轴上作为原点的任一点 O 引出。根据式（1.2.3），位矢对时间的微商是质点的线速度矢量

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

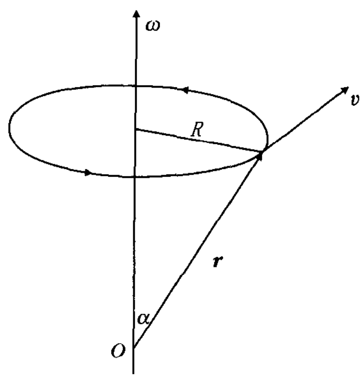


图 1.2 角速度的矢量表示

对于半径为 R 的圆周运动，线速度的数值为

$$v=R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega \qquad (1.2.6)$$

线速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向显然垂直于位矢 $\boldsymbol{r}$ 且在圆的平面内。

为了使质点运动中所有有关的量都在一个共同的基础上描述，也用一个矢量代表角速度是人们很自然的设想。矢量应有方向和量值。角速度的方向用下述方式定义：若质点某一瞬时在某一平面内运动，则这个平面的法线在空间规定出一个精确方向，或者说得确切些是两个方向。当右手螺旋的方向与质点转动的方向相同时，选螺旋前进的方向为角速度的方向，如图 1.2 所示。至于角速度的量值，原则上说，转动角度的任何函数都可以取作其量值。考虑到 $R = r\sin\alpha$，于是

$$v = \omega r\sin\alpha \tag{1.2.7}$$

可以作为角速度量值的定义。既然已定义了角速度的方向和量值，则可写作

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1.2.8}$$

这样，上述方向和量值① 的两个定义都可满足，而我们也就得到了角速度的矢量表示法。

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 对时间 t 的微商称为**角加速度**

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.9}$$

注意：由于 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是变化的，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不一定与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。

1.3 坐 标 系

描述质点运动所需要的物理量是质点的位置、速度和加速度。尽管这些量的定义与具体坐标系无关，然而这些矢量的具体形式却依赖于质点运动所用的坐标系和选取的参考系。坐标系的选取具有相当大的任意性，原则上只要三个基矢不共面就可以。我们将会看到在任何一个具体问题中，所要选取的坐标基矢取决于用来描述运动所使用的坐标。

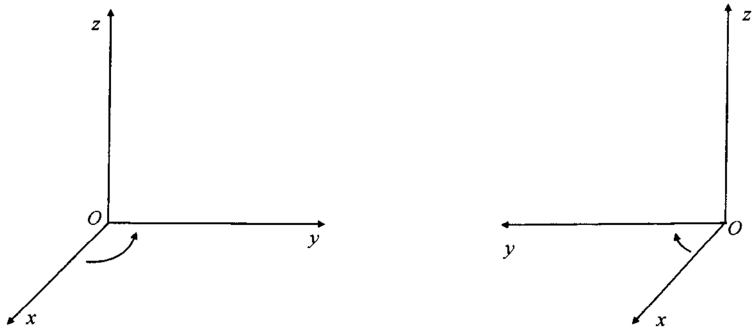
选取三个相互垂直的单位基矢来表示坐标轴是最简单的选择，此即所谓**正交坐标系**。当然这并非必需，而且也不是任何时候都是最方便的。有时根据物理问题的需要使用**非正交坐标系**才合适。非正交坐标系也叫**斜交坐标系**。比如，凝聚态物理中为描述某晶体的物理性质，利用根据晶体的轴选定的坐标系最为方便，这些轴经常是斜交的。本书只介绍正交坐标系，至于非正交标系读者在有关后继课程中再学习。

1.3.1 直角坐标系

直角坐标系通常叫**笛卡儿坐标系**。空间点与三个实数对应。

① 有量值和方向的量还不一定是矢量，矢量还必须遵从矢量加法的平行四边形法则。尽管无限小转动可用矢量（实际上是一个轴矢量）表示，但有限转动却不能用矢量表示（详见 6.3 节）。

直角坐标系可分为**右手系**和**左手系**（见图 1.3），它们互为镜像[①] 用任何移位操作也不能使这两种坐标系重合（这种性质称为**手征性**)。在右手系中，取逆时针方向为计算角度 φ 的正方向，在左手系中，则取顺时针方向为计算角度 φ 的正方向，今后我们均采用右手坐标系。



(a) 右手坐标系　　(b) 左手坐标系

图 1.3

垂直于坐标轴 x，y，z 的平面称为**坐标面**，它们构成三个彼此垂直的平面族。空间中每一点的位置可由它们的交点确定。以 $\boldsymbol{r}$ 表示点 P 在空间的位矢，以 x，y，z 表示它们的分量，即该点的直角坐标。沿 x，y，z 轴分别引入单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$（或者 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$），可将 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.3.1}$$

$\boldsymbol{r}$ 是以 x，y，z 为棱的平行六面体的对角线。

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

点的元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可以表示为沿坐标轴的元位移 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 之和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.3.2}$$

空间曲线的元弧长 $\mathrm{d}s$，在二级小量的准确度内等于它所张的弦长

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.3.3}$$

---

① 若以 $y = 0$ 面作为镜面，镜像对称操作是将图形中任何一点 (x, y, z) 变成 $(x, -y, z)$，变换矩阵是

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

具有镜像对称性叫做**宇称守恒**，为了以后求和书写方便，经常以 x_1, x_2, x_3 代表 x, y, z 。

1.3.2 柱面坐标系

点 P 在空间的位置可以由三个量 ρ，φ，z 来确定。这里 ρ 是点 P 离轴 z 的距离：$\rho=OM$，φ 是以逆时针方向由轴 x 到 OM 的夹角，而 z 是点 P 离平面 xy 的距离。点的柱坐标 ρ，φ，z 变动的区间是

$$0\leqslant\rho<\infty,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\qquad -\infty<z<\infty$$

由图 1.5 可见直角坐标与柱面坐标的联系为

$$\left.\begin{array}{lll} x=\rho\cos\varphi, & y=\rho\sin\varphi, & z=z \\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}, & \varphi=\arcsin\dfrac{y}{\rho} & \end{array}\right\} \tag{1.3.4}$$

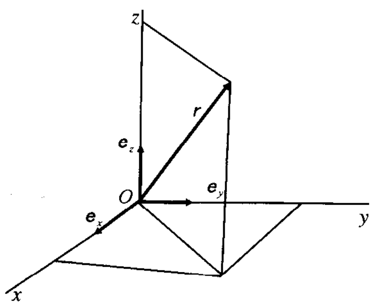


图 1.4　直角坐标系

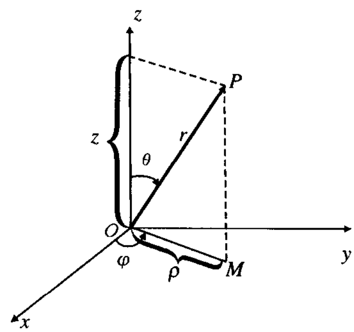


图 1.5　柱面坐标系

在柱面坐标系中，坐标面是：以 z 为轴，以 ρ 为半径的一簇圆柱面

$$\rho=c_1 \tag{1.3.5}$$

由轴 z 出发的，使位矢 $\boldsymbol{r}$ 和轴 z 位于其上的一簇平面

$$\varphi=c_2 \tag{1.3.6}$$

垂直于轴 z 的一簇平面

$$z=c_3 \tag{1.3.7}$$

不同簇的任意两坐标面的交线称为**坐标线**。沿每一坐标线只有一个坐标可以变动，因此，常以相应的坐标来称呼坐标线。

面（1.3.5）与（1.3.7）的交线给出一簇同心圆——坐标线 φ，而面（1.3.6）与（1.3.7）的交线给出由原点 O 出发的一簇半直线（射线）——坐标线 ρ（见图 1.5）。面（1.3.5）与（1.3.6）的交线给出坐标线 z，它是一族平行于直角坐标系 z 的直线。

坐标线 ρ 和 z 是直线，而坐标线 φ 是圆，所以柱面坐标系属于曲线坐标系。容易看出，确定空间点的三条坐标线 ρ，φ，z 是彼此成直角相交的，所以柱面