科学版学习指导系列

医用高等数学学习指导

马建忠 主编

科学出版社
www.sciencep.com

科学版学习指导系列

医用高等数学学习指导

马建忠　主编

* 教育科学“十五”国家规划课题研究成果
* 按教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会起草的五年制临床医学专业高等数学教学基本要求编写

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书按教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会起草的五年制临床医学专业高等数学教学基本要求编写的. 全书共分 8 章，内容有函数、极限与连续，一元和多元微积分学，常微分方程，概率论基础，线性代数初步；每章由教学基本要求、知识要点与重点内容和侧重例题分析、章节同步习题全解、客观模拟试题与答案或提示、章节模拟试题及试题答案或提示五部分组成，书末附一套医科高等数学模拟试题. 本书引导学生系统归纳总结基础知识，抓住主要内容，力求短时间内使学生顺利通过考试；同时提高学生分析和解决问题的能力.

本书是高等医学院校学生使用的辅导教材，也是医科夜大、网络本、专科生和考硕士研究生的辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导/马建忠主编. —北京：科学出版社，2004.10

科学版学习指导系列

ISBN 7-03-014428-7

Ⅰ. 医…　Ⅱ. 马…　Ⅲ. 医用数学-医学院校-教学参考资料　Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 099379 号

责任编辑：周　辉　张　娟/责任校对：张怡君

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

涿海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004 年 10 月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2004 年 10 月第一次印刷　印张：12

印数：1—3 000　字数：223 000

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

《医用高等数学学习指导》编委会

主编 马建忠

编委 （按姓氏笔画排序）

王　颖　申笑颜　辛　宁

李　海　李　新　张天良

郭东星

编 写 单 位

中国医科大学　吉林大学　四川大学

山西医科大学　河南新乡医学院　沈阳医学院

前　言

教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会于2002年6月在吉林大学召开教育部全国高校文科医科数学教学改革研讨会；又于2003年3月在东南大学召开医科数学教学基本要求制定小组工作会议，会后组成制定小组，组长乐经良（上海交通大学），组员有金蒙伟（浙江大学）、管平（东南大学）、张选群（武汉大学）、马建忠（中国医科大学）、祝国强（上海第二军医大学）．本书按教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会起草的五年制临床医学专业高等数学教学基本要求编写，包括了《医学高等数学》、《医用高等数学》和《医科高等数学》教材精髓内容，适合全国医学院校．本书可作为高等医学院校本科生，夜大和网络学院本、专科生以及考研的辅导教材，也是讲授医科高等数学教师的参考书．

医学院校的高等数学课程是必修课之一．临床医学各专业课程门数较多，医科高等数学教学学时数少，内容相对的多，为了适合医科学生实际状况，更好地学好高等数学，本书启发学生系统归纳一般和重点知识要点与主要内容之间的关系，并通过解题分析和正确加深理解所学知识，指导学生掌握基本概念、基本理论、基本方法，突出抓住主要内容，力求节省时间，顺利通过考试，同时提高学生分析和解决问题的能力，达到培养学生抽象思维能力和创新意识．本书不具体针对哪本配套教材，是按教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会起草的五年制临床医学专业高等数学教学基本要求编写的，适合所有的高等医学院校的高等数学教材．全书分为8章，包括函数、极限与连续，一元函数微积分学，多元函数微积分学，常微分方程，概率论基础和线性代数初步内容．各章分别以下列5部分内容编写：

一、教学基本要求：它是医科高等数学课最低的教学目的和要求，也是学生必须掌握的知识内容及要点．五年制临床医学专业高等数学教学基本要求是：针对概念、性质和理论要求学生知道、了解、理解；针对运算、方法、应用分为会、掌握、熟练掌握．

二、知识要点与重点内容和侧重例题分析：该部分分两个层次，一个层次总结教学基本要求中的“知道”、“了解”和“会”关联的一般知识要点；第二个层次系统归类总结教学基本要求中的“了解”、“理解”、“掌握”和“熟练掌握”相关联的重要内容，并系统沟通和分析重要概念、理论与方法相关内容．

三、章节同步习题全解：根据不同的教学内容，选择适量的不同难易程度的有序习题，进行习题全解，检查和巩固教学中的基础知识和主要内容．

四、客观模拟试题与答案或提示：该部分包括判断题、选择题和填空题，指导学

生注意常见错误，正确加深理解概念、理论及相关的数学内容．这样可使计算题、证明题和应用题包含的知识要点更加全面化．

五、模拟试题及试题答案或提示．该部分是针对教学基本要求筛选的和必须掌握的考试试题，其中大部分是计算题、证明题和应用题，它是教师教学过程中多年积累的考试题，涉及到基本内容和重要知识要点．

书后给出一套完整考试样题及参考答案．

由于水平有限，时间仓促，本书难免存在欠妥之处，衷心欢迎广大读者批评指正．

编　者

2004 年 6 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求

1. 理解函数的概念，了解复合函数、分段函数、初等函数的定义，掌握函数复合与分解的方法；

2. 理解极限(包括单测极限)的描述性定义，熟练掌握极限的四则运算法则；

3. 理解无穷小量的概念，了解无穷小与无穷大的关系，掌握无穷小量的性质；

4. 理解两个重要的极限$\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\right)$，熟练掌握用两个重要的极限，无穷小量的性质及初等方法计算各类函数的极限；

5. 理解连续与间断的概念，知道闭区间上连续函数的性质.

二、知识要点与重点内容和侧重例题分析

(一) 知识要点

1. 函数的概念和简单性质

(1) 函数的定义　设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量，D 为某一给定的非空数集，如果对于每个 $x\in D$，y 按照一定的对应规则 f 有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫自变量，y 叫因变量，数集 D 叫函数的定义域，y 的取值范围 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 叫函数的值域.

在函数的定义中，定义域 D 与对应规则 f 为两要素，两个函数相等当且仅当这两个要素完全相同.

(2) 函数的简单性质　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D

1) 单调性　I 为 D 的子区间，若对任意两点 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少). $f(x)$ 的图像随自变量 x 的增大上升(或下降).

2) 奇偶性　设 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

3) 有界性　设 I 为 D 中的某一子区间，若存在正数 M，对任意 $x\in I$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数，否则称为无界函数. 有界函数的图像

介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

4) 周期性　若存在常数 $T\neq 0$,使得对任意 $x\in D$,$f(x+T)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$在 D 上为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.通常所说的周期是指最小正周期.周期函数的图像在每个长度为 T 的区间上对应曲线的形状相同.

2. 复合函数与反函数

(1)复合函数　设函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$的值域全部在 $f(u)$的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$为这两个函数的复合函数.其中 x 为自变量,u 称为中间变量.

复合函数必须使内层函数的值域属于外层函数的定义域方可.例如,$y=\arcsin u$,$u=2+u^2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 R.若对任意的 $y\in R$,在 D 上至少可以确定一个x 值,使 $f(x)=y$ 成立,则称新的对应规则 $x=\varphi(y)$为 $y=f(x)$的反函数.也可记作 $x=f^{-1}(y)$.函数与其反函数($y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$) 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的复合运算而构成,且能用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

4. 极限的概念

(1) 数列极限　对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$中的通项 x_n 无限接近某一确定的常数A(即$|x_n-A|$要多小有多小,无限接近于 0),则称 A 为数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于 A.记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或$x_n\to A(n\to\infty)$.否则称数列$\{x_n\}$的极限不存在或发散(即 $x_n\to\infty(n\to\infty)$或 x_n 不趋近于同一个确定的常数).

(2) 函数极限

1) $x\to\infty$时的定义.如果当$|x|$无限增大(记为 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限趋近于某一确定的常数 A(即$|f(x)-A|$要多小有多小,无限接近于 0),则称 A 为函数$f(x)$的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to\infty)$.若 x 只取正值无限增大,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to+\infty)$;若 x 只取负值无限减小,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

2) $x\to x_0$ 时的定义　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义(在 x_0 点可以无定义),如果当 x 无限接近点x_0(但 $x\neq x_0$)时,函数 $f(x)$的值无限接近某一

确定的常数 A(即 $|f(x)-A|$ 要多小有多小,无限接近于 0),则称 A 为 $f(x)$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$. 如果 x 仅从 x_0 的左侧($x<x_0$)趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 的左极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$;如果 x 仅从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 的右极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

函数 $f(x)$ 的极限不存在,通常指当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)\to\infty$ 或 $f(x)$ 不趋近同一确定值 A(如左,右极限不相等). 函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 变化趋势有六种:$x\to x_0$;$x\to x_0^-$;$x\to x_0^+$;$x\to\infty$;$x\to+\infty$;$x\to-\infty$.

5. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小　极限为 0 的变量称为无穷小量,简称为无穷小. 即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=0$, 则 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量.

无穷小与极限的关系　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为无穷小,即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\alpha(x)=0$.

(2) 无穷大　绝对值无限增大的变量称为无穷大量,简称为无穷大. 即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$, 则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量.

注意:无穷小与无穷大都是变量,"0"作为变量是作为无穷小的唯一常数,任何一个绝对值很小或很大的数都不能作为无穷小或无穷大;无穷小与无穷大与自变量变化过程绝对相关. 另外,在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;如果 $f(x)$ 为无穷小($f(x)\neq0$),则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

6. 函数的连续与间断

(1) 在一点连续的定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 与此等价的定义是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 并且,左连续 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$;右连续 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. 可把任一点连续扩展到区间上讨论连续.

(2) 间断点的定义　函数 $f(x)$ 的间断点,在点 x_0 处必出现以下三种情况之

一:

1) $f(x)$在点 x_0 无定义;

2) $f(x)$在点 x_0 有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

3) $f(x)$在点 x_0 有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

7. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续:

(1)(介值定理) 若 $f(a)\neq f(b)$,则对介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个实值 C,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$. 其几何意义:连续曲线 $y=f(x)$与水平直线 $y=C$(C 位于$f(a)$与 $f(b)$之间)至少相交于一点.

(2)(零点定理) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$. 其几何意义:连续曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少相交于一点. 这时方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个实根.

(3)(最大值,最小值定理) $f(x)$在$[a,b]$上至少取得最大值 M 和最小值 m 各一次. 其几何意义:连续曲线 $y=f(x)$必有最高点和最低点.

(4)(有界性定理) $f(x)$在$[a,b]$上有界,即存在正数 M,对任意的 $x\in[a,b]$,有$|f(x)|\leqslant M$.

(二) 知识要点与重点内容和侧重例题分析

1. 函数计算中的基本问题

(1) 函数的定义域与表达式的求法.

例 1.1 设 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域.

解 为使 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$有意义,必须使 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 与 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 同时成立,即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$ 与 $a\leqslant x\leqslant 1+a$ 同时成立. 即 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域 $D=[-a,1-a]\cap[a,1+a]$. 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,$D=[a,1-a]$; 当 $a>\dfrac{1}{2}$时,D 为空集.

例 1.2 ① 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$, 求 $f(x)$;

② 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$, 求 $f(x)$.

解 ① 利用“变量无关性”,令 $t=1-x$,即 $x=1-t$,代入原方程,得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.$$

解联立方程组

$$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2,\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,\end{cases}$$

得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

② 根据原函数左边的形状，对右边配方变形为 $f(e^x+1)=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$. 令 $t=e^x+1$，得 $f(t)=t^2-t+1$，即 $f(x)=x^2-x+1$.

(2) 复合函数的分解

例 1.3 复合函数 $y=\sin^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}$是由哪些基本初等函数或多项式复合而成的?

解 $y=\sin^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}$是由 $y=u^3, u=\sin v, v=w^{-\frac{1}{2}}, w=x^2+3x-4$ 复合而成的.

(3) 分段函数　如果一个函数在其定义域内，对于不同的区间段由不同的解析式表示，则称这函数为分段函数. 分段函数一般不属于初等函数，但在各个区间段内，通常为初等函数.

2. *极限的计算*

(1) 极限的四则运算法则. 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

法则 1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

法则 2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

法则 3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$.

推论 1.1　$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=CA$，其中 C 是常数;

推论 1.2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$，其中 n 为正整数.

注意：上述法则成立的条件是：$\lim f(x)$与$\lim g(x)$都存在，对于法则 3 还要求 $B\neq 0$，当这些条件不满足时，不要贸然使用这些法则. 另外在使用法则时，通常要先对函数作某些恒等变形或化简，如分式的约分或通分，分解分式，分子分母有理化，三角函数的恒等变换等.

例 1.4　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x+4)}-x)$.

解　当 $x\to\infty$时，$\sqrt{(x+1)(x+4)}$与 x 都趋于∞. 因含有根式，可将其有理化.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+4)-x^2}{\sqrt{(x+1)(x+4)}+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5x + 4}{\sqrt{(x+1)(x+4)} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 + \frac{4}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + 1} = \frac{5}{2}.$$

例 1.5 求极限$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}\right)$.

解 当 $n \to \infty$时,函数中的项数也无限增多,不是有限项,故不能直接应用法则 1.应先设法利用有关公式,将其变形后,再求极限.

$$原式 = \lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(2) 两个重要极限

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,特点:是$\frac{0}{0}$型不定式.

2) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

特点:类型 1^∞型;形式$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

例 1.6 求$\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

解

$$原式 = \lim_{x \to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a}\left[\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\frac{x+a}{2}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \to a}\cos\frac{x+a}{2}$$

$$= 1 \cdot \cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

例 1.7 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

解 类型$\dfrac{0}{0}$型. 令 $t = x-\dfrac{\pi}{2}$, $x = t+\dfrac{\pi}{2}$, 且 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时, $t\to 0$.

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t} = -1.$$

例 1.8 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解 类型 1^{∞}型

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

所以 原式$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.9 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}$.

解 类型$\dfrac{0}{0}$型, 可先引入变量替换, 令 $t = x-1$, 即 $x = t+1$, 且令 $x\to 1$ 时, $t\to 0$.

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\sin t}{\ln(1+t)}$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin\sin t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\right]$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\sin t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\ln \mathrm{e}} = 1.$$

(3) 单侧极限

在函数极限的计算中,有时要用到单侧极限,如函数中会有绝对值或分段函数在分段点处的极限等. 判断极限存在的准则为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

例 1.10 求 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明 $x\to0$ 时极限是否存在.

解

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

由于 $x\to0$ 时左、右极限不等,故$\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在.

3. 无穷小量的性质及其阶的比较

(1) 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

性质 2 有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小.

(2) 无穷小阶的比较

在自变量的同一变化过程中(即 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$),设 $\alpha=\alpha(x)(\alpha\neq0)$与 $\beta=\beta(x)$均为无穷小量,且$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$存在.

1) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是α 的高阶无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$,或称 α 是β 的低阶无穷小;

2) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C$(常数 $C\neq0,1$),则称 β 与α 是同阶无穷小,记作 $\beta=0(\alpha)$;

3) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与α 是等价无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$;

4) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^K}=C\neq0$($K$ 为正整数),则称 β 为α 的 K 阶无穷小,记作 $\beta=o(\alpha^K)$.

例 1.11 当 $x\to0$,试比较下列各无穷小量:

(1) $\tan x-\sin x$ 与x^3; (2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$与x.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

所以 $\tan x - \sin x = 0(x^3)$,或称 $\tan x - \sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小.

(2) 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$
$$= \frac{2}{1+1} = 1,$$

所以 $x \to 0$ 时,$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$.

4. 函数连续性质及间断点的讨论

(1) 连续函数的性质

性质 1 设函数 $f(x)$,$g(x)$都在点 x_0 连续,则 $f(x) \pm g(x)$,$f(x) \cdot g(x)$,$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$也在点 x_0 连续;

性质 2 若 $u = \varphi(x)$在点 x_0 连续,且 $u_0 = \varphi(x_0)$,而 $f(u)$在点 u_0 连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 连续. 并有推论:若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$($a$ 不一定为$\varphi(x_0)$),函数 $y = f(u)$在点 $u = a$ 连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$当 $x \to x_0$ 时,极限存在,且等于$f(a)$. 即

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f(a).$$

说明在上述条件下,求复合函数的极限时,函数符号 f 与极限符号可以交换次序.

性质 3 基本初等函数在其定义域上连续;初等函数在其定义域的区间内连续.

例 1.12 设

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ \mathrm{e}, & x = 0(a, b \neq 0), \\ \dfrac{\sin ax}{bx}, & x < 0. \end{cases}$$

问 a 和 b 各取何值时,$f(x)$在 $x = 0$ 处连续?

解 由连续定义知,$f(x)$在 $x = 0$ 处连续. 应有

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \mathrm{e},$$

而

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b},$$