普通高等教育“十五”国家级规划教材

Functions of One Complex Variable

复变函数

郑建华 编著

Zheng Jianhua

清华大学出版社 Springer

Functions of One Complex Variable

复变函数

郑建华 编著

Zheng Jianhua

清华大学出版社 Springer

北京

内 容 简 介

本书用一小半篇幅介绍19世纪中叶建立的经典复变函数的基本结论：复数域、解析函数、Cauchy定理、Cauchy积分公式、Laurent级数展开、辐角原理、留数定理及其在实积分计算中的应用等。另一大半篇幅主要介绍复解析函数所特有的基本结论，同时涉及到最新发展的一些结论和相关学科。主要内容有：在最大模定理后介绍了Nevanlinna理论；在正规族的基本结论后用Zalcman最新方法简明地讨论了正规族，并得到Picard大、小定理与Montel定理间的等价关系；介绍了共形映照和单叶函数的基本结论；在初等Riemann曲面后进一步介绍了Riemann曲面的思想、概念和基本结论；通过圆盘上的Drichlet边值问题，介绍调和函数的基本知识，通过一般的Drichlet边值问题，介绍调和测度、Green函数等；最后，从双曲度量的角度介绍了双曲几何及其应用，用几何的观点来认识复解析函数。

本书内容丰富，逻辑严谨，循序渐进，可作为大学数学系、应用数学系本科生同名课程的教材以及相关专业的研究生、教师的参考书，并可供相关科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/郑建华编著. —北京：清华大学出版社，2005.1
ISBN 7-302-09693-7

Ⅰ.复…　Ⅱ.郑…　Ⅲ.复变函数—高等学校—教材　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第106565号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：王海燕
版式设计：刘祎淼
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：170×230　**印张**：14.5　**字数**：266千字
版　　次：2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-09693-7/O·413
印　　数：1～3000
定　　价：22.00元

前言

Foreword

复变函数理论创立于19世纪,是当时最独特的创造,到20世纪还在不断地发展,成为不仅是当时也是现在的一门优美的学科.这个学科时常称之为函数论,被誉为19世纪的数学享受.我们在享受数学的美妙成果的时候,可能会忽略了创造这些成果的数学家们每迈出一步所付出的艰辛.这里想简要回忆一下复变函数发展的历史,因为当我们了解一段历史后,也许会更深一步地感受到它的魅力,增强对它的学习兴趣和研究勇气.

从1776年起,Euler利用复函数来计算实积分值.更早些时候,D'Alembert在流体力学的研究中就用到复函数,而Laplace从1782年起像Euler那样,把实积分转换为复积分来计算实积分的值.他们的分析工作是通过把复函数的实部和虚部分开来进行的,所以复函数还没有成为真正的基本实体.这种情况还发生在Gauss身上.Gauss在证明代数基本定理(见定理3.2.4)时用到复数,他将涉及的复函数分为实部和虚部.到1825年,Gauss还明确地说"$\sqrt{-1}$的真正奥妙是难以捉摸的".

从所作的贡献来看,复变函数理论的奠基人是Augustin-Louis Cauchy,Karl Weierstrass和George Friedrich Bernhard Riemann. Cauchy是把复函数当作基本实体来研究的第一人.他自1821年起,花了约25年的时间,以导数和积分为出发点,发展了复变函数理论,在复函数有连续导数的情形下建立了Cauchy定理;引入了留数,建立了留数定理,并用留数来计算实积分等.到1843年,Alphonse Laurent继续Cauchy的工作,建立了Laurent级数展开,这是Taylor级数展开的一个推广.也许起初Cauchy研究复函数时是考虑实积分的计算,但到后期他改变了这个观点,不再关心这种计算,而是转到复变函数理论本身的研究上,并建立了这个理论的基础. Weierstrass则开辟了一条新的探索途径,在幂级数的基础上建立起解析函数理论以及解析开拓的方法(见节9.2)等.Riemann于1851年在他的博士论文中研究了Riemann曲面上的共形映照,为共形映照的研究开辟了新的篇章.他在论文的结尾给出了Riemann映照定理(见定理6.4.1),虽然他的

证明是不完整的，但这个定理确定了一般单连通区域间共形映照的存在性．对于特殊的情形，Schwarz(1869 年)和 Christoffel(1867 年)给出了多边形区域到上半平面的共形映照的积分表示式(见定理 6.5.3)．多值函数对我们来说是棘手的，然而我们经常不可避免地会遇到它，例如在研究代数函数时就会遇到．Riemann 研究了多值函数，建立了 Riemann 曲面的概念(见第 9 章)．Riemann 曲面不仅是描绘多值函数的一个方法，而且在这个曲面上多值函数可单值化，并与 z 平面上的情形相对应．Lobatchevsky 和 Bolyai 在研究 Euclid 几何中的第 5 公理时，果敢地放弃了这条平行公理，而建立了一种非 Euclid 几何，后来 Klein 称其为双曲几何，而 Euclid 几何则称为抛物几何．为了证明双曲几何的相容性，Poincare 给出了一个模型，这是几个模型中的一个．通过模型，双曲几何的相容性归结为 Euclid 几何的相容性．Poincare 的模型可以通过单位圆盘上 Poincare 度量给出的度量几何来建立(见节 10.1)．Poincare 度量的一个重要性质是在共形映照下不变，在一般的解析映照下是缩小的，这就是 Poincare 度量原理(见节 10.2)，因此这个度量在解析函数理论中也是重要的，最重要的是它引出从几何的角度来看解析函数．的确，Ahlfors 用超双曲度量导出了 Bloch 常数的一个下界．数学家们花费了约半个世纪的时间才得到好于 Ahlfors 的界，但 Bloch 常数的精确下界至今仍是个未解决的问题．

20 世纪，复变函数理论在各个方面都有全面的发展．Nevanlinna 引入了亚纯函数的特征函数，给值分布理论的研究带来了飞跃．Montel 给出了函数族正规性的概念以及一些基本正规族判别定则．这些正规定则有许多应用，例如，应用于 Riemann 映照定理等一些经典定理的证明中；Fatou 和 Julia 通过函数迭代下的正规性创立了复动力系统理论．到 80 年代，由于其他学科的相互渗透，以及本学科中一些重大问题的解决，同时又由于计算机图形化，复动力系统在国际上备受关注．Bieberbach 在单叶函数研究的基础上，提出了单叶函数幂级数展开的系数估计的 Bieberbach 猜想(见定理 6.6.1)．为证明这个重要的猜想，许多数学家付出了辛勤地努力，直到 1985 年才由法国数学家 de Brange 证明了这个猜想．此外，多复变函数理论、拟共形映照理论、Teichmüller 理论、位势理论等都有了迅速地发展．

从复变函数理论的发展简史出发，作者以为可以更好地了解本书的内容和编排．在编写中不仅没有放弃对计算训练的要求，而且强调复分析基本结论的严密推演．作者以为后者对素质教育和数学理性的培养都是必要的，而且更能使读者掌握复分析的独特内涵．我们还试图在介绍复分析基本内容的基础上，以拓宽学生的知识面，展示新知识为本书编写的原则．本书篇幅不算长，但内容丰富，而且有一定的深度．在现有的学时下，要教完本书似乎是困难的，但可以在教学中

针对学习的对象对本书的内容有所取舍.考虑到这一点,在本书的编排上,我们把较难的定理或定理的证明放在一节中(如一般形式的Cauchy定理的证明)或一节或一章的最后,读者可以根据需要取舍.为了使这种取舍不会影响内容的连贯性,我们对一些概念的定义作了适当的重复.总之,对本书内容的取舍在教学和学习中不会有困难,这使得本书能够适应更多的读者.的确,我们力图使得本书不仅是一本教科书,也是一本很好的参考书.随着21世纪的到来以及我国提倡的科教兴国,都对教育提出了更高的要求,希望本书的编写能为此做一点贡献.

复变函数是数学专业以及相关专业本科生必修的基础课.本书编写理念是:教材是教与学的一个环境,它应具有多层次的包容性,由浅入深,突出重点和学科框架。作者认为教与学的关系对本科生来说,教是引导,而学是主体,教材是环境,引导式的教与主体式的学在广阔的环境里更能得心应手。本科生必修的复变函数理论主要内容包括三个方面:

(1) 解析函数,围道积分(Cauchy定理,Cauchy积分,Laurent级数,留数等);

(2) 共形映照(包括线性变换、Riemann映照定理和多边形区域上的共形映照);

(3) Riemann曲面(包括根式函数,对数函数的Riemann曲面,一般性Riemann曲面对多值函数单值化的思想等).

本书以这三点为主线展开,同时突出了与复分析近代发展相关的其他方面,如正规族,单叶函数,调和函数,Nevanlinna理论,双曲几何等.如果全书以(1)为中心的话,作者认为不能更好地突出复变函数的独特之处,这是因为(1)主要与线积分,Green公式,Taylor级数很相近,主要讨论的内容是微积分相应内容的复化,不能领会到复变函数的精髓.本书主要将与微积分相近的经典复变函数的内容进行了压缩,避免了在方法和内容上与微积分的重复.

本书用一小半的篇幅,介绍了19世纪中叶建立起来的复变函数的基本结论:Cauchy定理、Cauchy积分公式、Laurent级数展开、留数定理、辐角原理、留数定理在实积分计算中的应用等.这部分内容与高等数学中介绍的第二类曲线积分有一定的关系,例如,可以用Green公式证明具有连续导数的复函数的Cauchy积分定理.本书的另一半篇幅主要介绍复解析函数所特有的进一步的基本结论,这是复变函数理论中精彩的地方,同时涉及到最新发展的一些结论和学科分支.我们试图在打下良好的基础前提下,为读者打开一个进一步学习的窗口:在最大模定理后面介绍了Nevanlinna理论;介绍了正规族的基本结论之后用Zalcman的最新方法简明地讨论了正规族,并得到Picard大、小定理与

Montel 定理间的等价关系;在共形映照的后面介绍了单叶函数的基本结论;在初等 Riemann 曲面的后面进一步介绍了 Riemann 曲面的思想、概念和基本结论;以 Dirichlet 边值问题为主线,通过圆盘上的 Dirichlet 边值问题介绍调和函数的基本知识,通过一般的 Dirichlet 边值问题,讨论 Green 函数等,这些都是本书的特色.本书定理的逻辑证明力图展示一些复分析处理问题的方法、思想和一定的技巧.

参考文献中所列的文献对本书的编写都有一定的影响,尤其是文献[1,4,11,14,20]和[21]对本书的编排有直接的影响.最后衷心感谢清华大学出版社为本书的出版给予的支持和帮助.由于本人的水平有限,在本书的选材和处理上,难免有不足和错误,敬请读者批评指正.

郑建华

2004年8月1日于清华园

目录

Contents

复变函数

Chapter 第1章 复数系统及复平面

1.1 复数域和复平面

本章我们要引入复数，并在复数集上引入度量，也就是两个复数间的距离，使其成为一个**度量空间**，并将复数集与复平面对应起来，然后在此基础上讨论复数集和复平面的一些基本性质. 关于一般度量空间的讨论，为了读者阅读的便利，我们在附录上作了介绍.

我们知道方程

$$x^2+1=0 \tag{1.1}$$

在实数域内无解. 这样我们有必要扩充实数域产生一个新的数域，使得在这个数域内，方程(1.1)有解(这是引入复数的动力之一，详细内容请参阅 M. 克莱因著《古今数学思想》第 3 册第 27 章). 为此，引入符号 i 使得 $i^2=-1$，称之为单位虚数. 置

$$\mathbb{C}=\{x+iy: \forall x,y\in\mathbb{R}\}.$$

显然，实数集$\mathbb{R}$是它的一个子集. $\mathbb{C}$的元素 $z=x+iy$ 称为复数，x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部，记为 $\mathrm{Re}z=x$ 和 $\mathrm{Im}z=y$. 约定 $\forall z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$，$z_1=z_2$ 当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$，也就是两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 在$\mathbb{C}$上定义两复数的加、减、乘、除四则运算如下：

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$；

(2) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$；

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1^2+y_1^2}$.

这个定义与实数的四则运算相吻合，当 z_1 和 z_2 的虚部为零，也就是 z_1 和 z_2 为实数时，上面四则运算的公式就退化为实数的四则运算. 容易验证，在$\mathbb{C}$上的四

则运算满足算术基本运算律，即交换律、结合律和乘法对加法的分配律等，并且 $\mathbb{C}$ 在上述加、减、乘、除运算下构成域，称之为**复数域**.

现在将$\mathbb{C}$中任一元素 $x+\mathrm{i}y$ 与直角坐标系确定的平面上的点(x,y)相对应，则$\mathbb{C}$与该平面就建立了一一对应，我们将这个平面称为**复平面**. $\mathbb{C}$ 中每个复数视为复平面上的一点，而复平面上的点可用复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 来表示，即复数是复平面上点的坐标，因此$\mathbb{C}$与复平面视为一个统一体而不加以区别. 这样处理有一个好处，就是在考虑有关复数的一些问题时可以在复平面上做一些直观的处理. 例如，两个复数之和、差 $z_1 \pm z_2$ 可按图 1-1 所示. 这里复数对应一个从原点出发的矢量. z_1 和 z_2 的和 z_1+z_2 就是以 z_1 和 z_2 为邻边的平行四边形的对角线上的矢量；而它们的差 z_1-z_2 则为从 z_2 指向 z_1 的矢量.

设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$，称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 易见 z 是实数当且仅当 $z=\bar{z}$；称$\sqrt{x^2+y^2}$为 z 的**模**或**绝对值**，记为$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 显然 $z\bar{z}=|z|^2$. 将向量$\overrightarrow{Oz}$与 x 轴正向的夹角 θ 以及 $\theta+2n\pi$ 称为 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$. 见图 1-2. 因此一个非零复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 是无穷多值的，请读者留意这一点，后面将会看到正是辐角的这种多值性产生了一些有趣的现象. 在辐角中，介于$-\pi$ 和 π 之间的称为主辐角，记为 $\arg z$，这样

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

复数 0 则没有辐角.

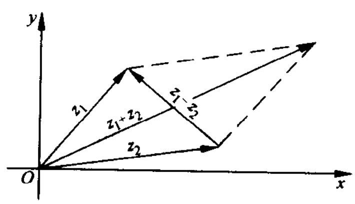

图 1-1

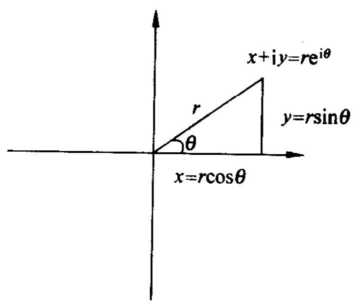

图 1-2

接下来引入复数的另一种表示形式——指数形式或极坐标形式. 已知直角坐标系上的点可由极坐标，即极长和辐角所组成的序对来表示. 复平面上的点也可由它的模和辐角来表示. 为此，设 θ 为实数，置

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

这是与指数函数的定义相吻合的(见第 2.4 节). 设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ 的模为 r，辐角为 θ，如图 1-2 所示.

有 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta},$$

其中 $re^{\mathrm{i}\theta}$ 称为 $x+\mathrm{i}y$ 的指数形式. 可通过三角函数和差公式，简单验证得

$$e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\varphi}=\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\varphi)=e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}.$$

特别地

$$e^{\mathrm{i}n\theta}=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

设 $z_1=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}$，有 $z_1z_2=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，因此

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

上面关于辐角的等式是指左右两边的像值集相等. 利用复数的指数形式易见复数乘除的几何意义，如图 1-3 所示.

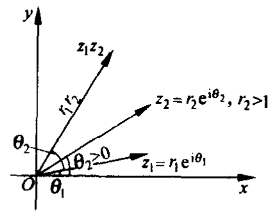

图 1-3

乘积由旋转和相似构成.

1.2 度量、开集、区域

借助复数的模，我们在ℂ上引入一个度量如下：$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$，定义

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{1.2}$$

要确定 d 是一个度量，需验证它满足度量定义的条件（更多的内容可见本书的附录），即 $\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$，如下各条成立：

(1) $d(z_1,z_2)\geqslant 0$; $d(z_1,z_2)=0$ 当且仅当 $z_1=z_2$；

(2) $d(z_1,z_2)=d(z_2,z_1)$（对称性）；

(3) $d(z_1,z_2)\leqslant d(z_1,z_3)+d(z_3,z_2)$（三角不等式）.

由(1.2)式，直接得到 d 满足(1)和(2). 要验证三角不等式，只须证明 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$，有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1|\cdot|\bar{z}_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

这样$\mathbb{C}$在模诱导的度量下构成了度量空间，进而能够按照度量来定义$\mathbb{C}$上点列的极限、开球、闭球、开集、闭集、连通性、紧性和完备性等重要概念（一般度量空间上这些概念的定义请见附录）.

在本书中，总是用$B(z_0,\delta)$表示集合$\{z:|z-z_0|<\delta\}$，它是复平面上的以z_0为中心δ为半径的开圆盘；$B_0(z_0,\delta)$表示去心圆盘$\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$；$\bar{B}(z_0,\delta)$则表示以z_0为中心δ为半径的闭圆盘$\{z:|z-z_0|\leqslant\delta\}$. 两个集合$G_1$和$G_2$间的距离定义为

$$d(G_1,G_2)=\inf\{|z-w|:z\in G_1,w\in G_2\}.$$

一个集合G的直径则定义为

$$\operatorname{diam}(G)=\sup\{|z-w|:z\in G,w\in G\}.$$

明显，$\operatorname{diam}(G)=0$当且仅当G是空集或者由单点所构成. 那么$d(G_1,G_2)=0$说明G_1与G_2有何关系呢？请读者考虑.

首先给出极限的ε-N语言式的定义：一列给定的复数$\{z_n\}$以复数c为极限，如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，总有$|z_n-c|<\varepsilon$. 我们使用符号

$$\lim_{n\to\infty} z_n=c.$$

根据复平面上度量的定义(1.2)式，则

$$\lim_{n\to\infty} z_n=c \text{ 当且仅当 } \lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 和} \lim_{n\to\infty} y_n=b, \tag{1.3}$$

其中$z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$，$c=a+\mathrm{i}b$. 因此，复数列极限的定义是实数列极限的自然推广，实数列极限的基本结论对于复数列也成立，例如极限的四则运算对于复数列也成立.

一个点$c\in\mathbb{C}$称为集合K的一个**极限点**，如果K中可以找到一个点列以c为极限. 很明显，一个复数列收敛当且仅当它有惟一的极限点.

$\mathbb{C}$上的一个子集Ω称为开集，如果对任意一点$z_0\in\Omega$，都有以z_0为中心的圆盘整个含在Ω内，即$\Omega=\operatorname{int}\Omega$；而一个子集称为**闭集**，如果它是一个开集关于$\mathbb{C}$的补集. 我们可以用极限点来刻画闭集：一个集合K是闭集当且仅当它包含它的所有极限点；我们用$\overline{K}$表示K的**闭包**，它是由K以及K的所有极限点所构成的集合，等价于$\overline{K}=K\cup\partial K$，因此我们可以推导出$K$是闭集当且仅当$K=\overline{K}$且闭包$\overline{K}$总是闭集.

定义 1.2.1 设$z\in\mathbb{C}$，$A\subseteq\mathbb{C}$.

(1) z称为A的**内点**，若$\exists\varepsilon>0$，使得$B(z,\varepsilon)\subseteq A$. A的所有内点之集称为A的内部，记为$\operatorname{int}A$；

(2) z称为A的**外点**，若z为$\mathbb{C}-A$的内点. A的所有外点之集称为A的外

部,记为 out$A$;

(3) z 称为 A 的**边界点**,若 $\forall \varepsilon>0, B(z,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ 且 $B(z,\varepsilon)\cap(\mathbb{C}-A)\neq\varnothing$. A 的所有边界点构成 A 的**边界**,记为 ∂A.

一个复数与 $\mathbb{C}$ 的子集 A 之间只可能存在以上三种关系.

从上述定义可知

$$\mathrm{int}A\cap\partial A=\varnothing,\quad \mathrm{out}A\cap\partial A=\varnothing,\quad \partial A=\partial(\mathbb{C}-A),$$

即 A 的边界点也是 $\mathbb{C}-A$ 的边界点,故 A 的边界点可以属于 A 也可以不属于 A,且 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{(\mathbb{C}-A)}$.

一个集合 K 是一点的邻域,如果该点是集合 K 的内点. 开集就是它内的任意点的邻域. $\mathbb{C}$ 的所有开集之族赋予了 $\mathbb{C}$ 上一个拓扑,即具有如下性质.

定理 1.2.2 (1) $\mathbb{C}$ 和 $\varnothing$ 均为开集;

(2) 若 $G_1,\cdots,G_n$ 为 $\mathbb{C}$ 的开集,则 $\bigcap\limits_{j=1}^{n}G_j$ 也为 $\mathbb{C}$ 的开集;

(3) 若 $\{G_j:j\in J\}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一个开集族,其中 J 是指标集,则 $\bigcup\limits_{j\in J}G_j$ 仍为 $\mathbb{C}$ 的开集.

开集的这些性质建立了 $\mathbb{C}$ 上一种基本的集合关系,将它们抽象出来建立起拓扑学理论(初步内容见本书附录).

$\mathbb{C}$ 上的一个子集 D 称为是**连通**的,如果不存在两个非空开集 A 和 B,使得

$$D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\text{ 且 }(D\cap A)\cap(D\cap B)=\varnothing,\tag{1.4}$$

否则称为非连通. 为了理解这个定义,我们举一个例子.

例如,区间 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 都是连通的,但 $D=[-1,0)\cup(0,1]$ 是非连通的,因为我们可取到两个不相交的圆盘 $B(-1,1)$ 和 $B(1,1)$,使得

$$[-1,0)\cup(0,1]=(D\cap B(-1,1))\cup(D\cap B(1,1)).$$

关于连通性我们还有某种程度上是抽象的描述. D 的子集 A 称为(关于)D 的开集,如果存在一个开集 E,使得 $A=D\cap E$;(关于)D 的闭集就是某个 D 的开集关于 D 的补集. 那么 D 是连通的当且仅当 D 的任意一个非空既开又闭之集只能是 D 本身. 我们来推演这个结论: 如果 D 是连通的,而 G 是 D 的一个非空既开又闭的集合,那么 $D\backslash G$ 也是 D 的一个既开又闭的集合,有(1.4)式成立,从而 $D\backslash G$ 必须是空集,即 $G=D$;如果 D 是非连通的,那么(1.4)式中 $D\cap A$ 就是 D 的一个非空既开又闭的集合,并且不等于 D.

对于复平面上开集的连通性,我们有更深刻而又直观的描述.

定理 1.2.3 $G\subset\mathbb{C}$ 是连通开集当且仅当对任意 $a,b\in G$,在 G 内存在一条折线 P 连接 a 和 b,此时称 G 是**路径连通**的.

证明 必要性：设 G 是连通的，取 G 中一固定点 a，且设

$$A=\{b\in G: \text{在 } G \text{ 中存在折线 } P \text{ 连接 } a \text{ 和 } b\}.$$

显然 $a\in A\neq\varnothing$. 由于 G 是开集，$\exists\delta>0$，使得 $B(a,\delta)\subset G$. 显然对 $B(a,\delta)$ 中任一点 y，存在 a 与 y 的连线整个包含在 $B(a,\delta)$ 中，故 $B(a,\delta)\subset A$. 下面只需证明 A 既开又闭，因为 G 为连通，由此得 $A=G$，这样必要性得证.

对 $\forall x\in A$，有 $x\in G$，$\exists\varepsilon>0$，使得 $B(x,\varepsilon)\subset G$. 另一方面，对 $\forall z\in B(x,\varepsilon)$，作一条线段 $\overline{zx}$ 连结 z 和 x. 又因为 $x\in A$，故存在折线 P 连接 a 与 x. 则 $P\cup\overline{zx}$ 折线连接 a 与 z，且 $P\cup\overline{zx}\subset G$，从而 $z\in A$，即 $B(x,\varepsilon)\subset A$. 这说明 A 是开集.

对 $\forall x\in G-A$，有 $x\in G$，但 $x\notin A$，因此 $\exists\varepsilon>0$，使得 $B(x,\varepsilon)\subset G$. 假设 $\exists y\in A\cap B(x,\varepsilon)\neq\varnothing$，则 $y\in A$. 存在连接 y 与 a 的折线，从而存在连接 a 与 x 的折线，即 $x\in A$，矛盾，所以 $A\cap B(x,\varepsilon)=\varnothing$，即 $B(x,\varepsilon)\subset G-A$，$A$ 是闭集.

充分性：假设 G 是不连通的，我们将导出矛盾. 存在两个非空的互不相交的既开又闭的集合 A 和 B，使得 $G=A\cup B$. 取 $a\in A$，$b\in B$，由条件，存在 G 内的折线 P 连接 a 和 b. 不妨设 $P=\overline{ab}$ 是连接 a 和 b 的直线段. 定义

$$S=\{s\in[0,1]: a\cdot(1-s)+s\cdot b\in A\},$$
$$T=\{t\in[0,1]: a\cdot(1-t)+t\cdot b\in B\}.$$

则 $S\cap T=\varnothing$，$S\cup T=[0,1]$ 且 $0\in S$，$1\in T$. 下面证明 S 和 T 为开集. $\forall s_0\in S$，$y=a(1-s_0)+s_0b\in A$. 因 A 为开集，故 $\exists\varepsilon>0$，使得 $B(y,\varepsilon)\subset A$. 从而线段 $\overline{ab}\cap B(y,\varepsilon)$ 所对应的 s_0 的邻域属于 S，即 S 为开集，同理 T 为开集，这与 $[0,1]$ 是连通的相矛盾. 充分性得证. □

区域是复变函数论中的重要概念.

定义 1.2.4 若 $G\subset\mathbb{C}$ 是连通开集，则 G 称为**区域**.

根据定理 1.2.3，区域也是路径连通的开集. 设 G 是 $\mathbb{C}$ 上的一个集合. $A\subseteq G$ 称为 G 的一个**分支**，若 A 是连通的且是最大的，即若 $B\subseteq G$ 是个连通集且 $B\supseteq A$，则 $A=B$. 因此一个开集的两个分支要么不相交要么完全相同. 关于复平面上开集的分支，我们有更进一步的结论.

定理 1.2.5 设 $G\subset\mathbb{C}$ 是开集，则 G 的每个分支都是区域，且 G 至多具有可数个分支.

证明 设 A 为 G 的一个分支. 因此 $\forall x\in A$，有 $x\in G$. 由于 G 是开集，$\exists\varepsilon>0$，使得 $B(x,\varepsilon)\subset G$. 显然 $B(x,\varepsilon)$ 为 G 的一连通集. $B(x,\varepsilon)\cup A$ 是连通的（见习题），故由 A 的分支定义，$B(x,\varepsilon)\cup A\subseteq A$，即 $B(x,\varepsilon)\subset A$，从而 A 是开集.

设 $\mathscr{F}$ 为 G 的分支族. 由上述证明，已知 $\mathscr{F}$ 中每个元素都是开集. 设 $\forall A\in\mathscr{F}$，A 为开集. 由平面上有理点对的稠密性，A 中存在有理点对 (x,y)，即 x,y 均为有理数. 由于不同的分支互不相交（见习题），故 $\mathscr{F}$ 中的元素与有理点对集的某

个子集存在一一对应，而有理点对集是可数的，故 $\mathscr{T}$ 是至多可数的. □

根据定理 1.2.5，开集可分解为至多可数多个区域之并.

1.3　复球面以及球极投影

我们通过在复平面 $\mathbb{C}$ 上添加一个元素 ∞ 来紧致化复平面 $\mathbb{C}$，记 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上定义开集系统如下：

(1) $\mathbb{C}$ 的所有开集仍为 $\hat{\mathbb{C}}$ 的开集.

(2) 对 $\mathbb{C}$ 的任意闭集 A，$\hat{\mathbb{C}}-\overline{A}$ 为 $\hat{\mathbb{C}}$ 的开集，其中当 A 有界时，$\overline{A}=A$；当 A 无界时，$\overline{A}=A\cup\{\infty\}$.

则在这个开集系统下，$\hat{\mathbb{C}}$ 为**拓扑空间**，也就是 $\hat{\mathbb{C}}$ 的开集系统也具有定理 1.2.2 所述的性质. 此时称 $\hat{\mathbb{C}}$ 为扩充复平面. 对于任意 $\mathbb{C}$ 上的有界闭集 A，$\hat{\mathbb{C}}-A$ 就是 ∞ 的一个邻域.

定义 1.3.1　区域 $G\subset\hat{\mathbb{C}}$ 称为**单连通区域**，若 $\hat{\mathbb{C}}-G$ 是连通的；非单连通区域称为**多连通区域**. 进一步，若 $\hat{\mathbb{C}}-G$ 有 n 个分支，则 G 称为 n 连通区域；若 $\hat{\mathbb{C}}-G$ 有无穷多个分支，则 G 称为无穷连通区域.

注意定义中考虑**扩充复平面**是必要的，如上半平面，带形区域均为单连通区域，而复平面上的闭单位圆盘的外部则是二连通的，因为它关于扩充复平面的补集有两个分支 $\{\infty\}$ 和 $\overline{B}(0,1)$；区域 $\{z:0<|z|<1\}$ 是二连通的，这是容易理解的，因为 $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{z:0<|z|<1\}$ 由两个分支 $\{0\}$ 和 $\{|z|\geqslant 1\}\cup\{\infty\}$ 构成；注意到映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $\{z:0<|z|<1\}$ 连续地一一对应地映射到 $\{z:1<|z|<\infty\}$，因此 $\{z:1<|z|<\infty\}$ 应该是二连通的. 然而如果在定义 1.3.1 中使用 $\mathbb{C}$ 而不是 $\hat{\mathbb{C}}$，那么 $\{z:1<|z|<\infty\}$ 就不是二连通的，这样就不合理了.

在空间直角坐标系上作一个单位球面：$x^2+y^2+z^2=1$，且称此单位球面为复球面或 Riemann 球面. 在空间直角坐标系上，将 xOy 平面看成复平面，将复球面上的点 $(0,0,1)$ 称为(北)极点 N. 复平面上的任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 与极点 N 确定的直线

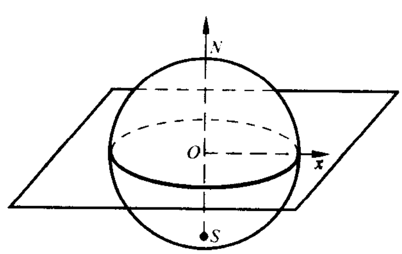

图　1-4