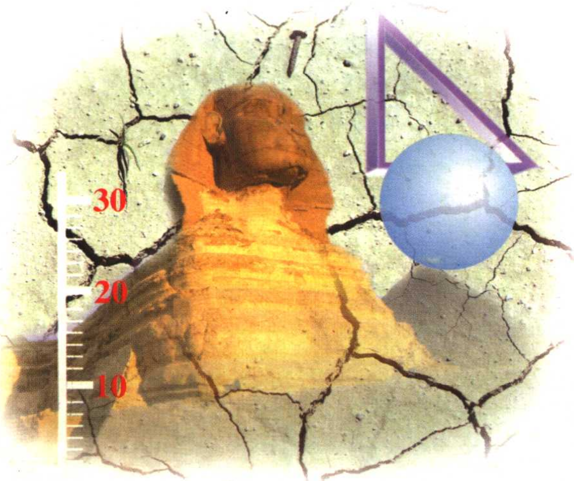
世界科技全景百卷书 100

科技大发现系列 38



数学大发现

章志彪 张金方 主编

中国建材工业出版社

世界科技全景百卷书 38
·科学大发现系列·

数学大发现

编写　刘耀刚

中国建材工业出版社

目　　录

圆面积求法

怎样求圆面积？这已是一个非常简单的问题，用公式一算，结论就出来了。可是你可知道这个公式是怎样得来的吗？在过去漫长的年代里，人们为了研究和解决这个问题，不知遇到了多少困苦，花费了多少精力和时间。

在平面图形中，以长方形的面积最容易计算了。用大小一样的正方形砖铺垫长方形地面，如果横向用八块，纵向用六块，那一共就用了 $8\times6=48$ 块砖。所以求长方形面积的公式是：长×宽。

求平行四边形的面积，可以用割补的方法，把它变成一个与它面积相等的长方形。长方形的长和宽，就是平行四边形的底和高。所以求平行四边形面积的公式是：底×高。

求三角形的面积，可以对接上一个和它全等的三角形，成为一个平行四边形。这样，三角形的面积，就等于和它同底同高的平行四边形面积的一半。因此，求三角形面积的公式是：$\frac{1}{2}$×底×高。

任何一个多边形，因为可以分割成若干个三角形，所以它的面积，就等于这些三角形面积的和。

4000 多年前修建的埃及胡夫金字塔，底座是一个正方形，占地 52 900m^2。它的底座边长和角度计算十分准确，误差很小，可见当时测算大面积的技术水平已经很高。

圆是最重要的曲边形。古埃及人把它看成是神赐予人的神圣图形。怎样求圆的面积，是数学对人类智慧的一次考验。

也许你会想，既然正方形的面积那么容易求，我们只要想办法做出一个正方形，使它的面积恰好等于圆面积就行了。是啊，这样的确很好，但是怎样才能做出这样的正方形呢?

你知道古代三大几何难题吗?其中的一个，就是刚才讲到的化圆为方。这个起源于古希腊的几何作图题，在2000多年里，不知难倒了多少能人，直到19世纪，人们才证明了这个几何题，是根本不可能用古代人的尺规作图法作出来的。

化圆为方这条路行不通，人们不得不开动脑筋，另找出路。

我国古代的数学家祖冲之，从圆内接正六边形入手，让边数成倍增加，用圆内接正多边形的面积去逼近圆面积。

古希腊的数学家，从圆内接正多边形和外切正多边形同时入手，不断增加它们的边数，从里外两个方面去逼近圆面积。

古印度的数学家，采用类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积。

众多的古代数学家煞费苦心，巧妙构思，为求圆面积作出了十分宝贵的贡献。为后人解决这个问题开辟了道路。

16世纪的德国天文学家开普勒，是一个爱观察、肯动脑筋的人。他把丹麦天文学家第谷遗留下来的大量天文观测资料，认真地进行整理分析，提出了著名的“开普勒三定律”。开普勒第一次告诉人们，地球围绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。

开普勒当过数学老师，他对求面积的问题非常感兴趣，曾进行过深入的研究。他想，古代数学家用分割的方法去求圆面积，所得到的结果都是近似值。为了提高近似程度，他们不断地增加分割的次数。但是，不管分割多少次，几千几万次，只要是有限次，所求出来的总是圆面积的近似值。要想求出圆面积的精确值，必须分割无穷多次，把圆分成无穷多等分才行。

开普勒也仿照切西瓜的方法，把圆分割成许多小扇形；不同的是，他一开始就把圆分成无穷多个小扇形。

因为这些扇形太小了，小弧$\overset{\frown}{AB}$也太短了，所以开普勒就把小弧$\overset{\frown}{AB}$和小弦$\overline{AB}$看成是相等的，即$\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$。

小扇形 AOB 的面积＝小三角形 AOB 的面积$=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}$。

圆面积等于无穷多个小扇形面积的和，所以

$$\begin{aligned}\text{圆面积}\ S&=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}+\frac{1}{2}R\times\overline{BC}+\frac{1}{2}R\times\overline{CD}+\cdots\cdots\\&=\frac{1}{2}R\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\cdots\cdots)。\end{aligned}$$

在最后一个式子中，各段小弧相加就是圆的周长$2\pi R$，所以有

$$S=\frac{1}{2}R\times2\pi R=\pi R^2。$$

这就是我们所熟悉的圆面积公式。

开普勒运用无穷分割法，求出了许多图形的面积。1615年，他将自己创造的这种求圆面积的新方法，发表在《葡萄酒桶的立体几何》一书中。

开普勒大胆地把圆分割成无穷多个小扇形，并果敢地断

言：无穷小的扇形面积，和它对应的无穷小的三角形面积相等。他在前人求圆面积的基础上，向前迈出了重要的一步。

《葡萄酒桶的立体几何》一书，很快在欧洲流传开了。数学家们高度评价开普勒的工作，称赞这本书是人们创造求圆面积和体积新方法的灵感源泉。

一种新的理论，在开始的时候很难十全十美。开普勒创造的求圆面积的新方法，引起了一些人的怀疑。他们问道：开普勒分割出来的无穷多个小扇形，它的面积究竟等于不等于零？如果等于零，半径 OA 和半径 OB 就必然重合，小扇形 OAB 就不存在了；如果客观存在的面积不等于零，小扇形 OAB 与小三角形 OAB 的面积就不会相等。开普勒把两者看作相等就不对了。

面对别人提出的问题，开普勒自己也解释不清。

卡瓦利里是意大利物理学家伽利略的学生，他研究了开普勒求圆面积方法存在的问题。

卡瓦利里想，开普勒把圆分成无穷多个小扇形，这每个小扇形的面积到底等不等于圆面积，就不好确定了。但是，只要小扇形还是图形，它是可以再分的呀。开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去，那分到什么程度为止呢？这些问题，使卡瓦利里陷入了沉思之中。

有一天，当卡瓦利里的目光落在自己的衣服上时，他忽然灵机一动：唉，布不是可以看成为面积嘛！布是由棉线织成的，要是把布拆开的话，拆到棉线就为止了。我们要是把面积像布一样拆开，拆到哪儿为止呢？应该拆到直线为止。几何学规定直线没有宽度，把面积分到直线就应该不能再分了。于是，他把不能再细分的东西叫做“不可分量”。棉线是布的

不可分量，直线是平面面积的不可分量。

卡瓦利里还进一步研究了体积的分割问题。他想，可以把长方体看成为一本书，组成书的每一页纸，应该是书的不可分量。这样，平面就应该是长方体体积的不可分量。几何学规定平面是没有薄厚的，这样也是有道理的。

卡瓦利里紧紧抓住自己的想法，反复琢磨，提出了求圆面积和体积的新方法。

1635 年，当《葡萄酒桶的立体几何》一书问世 20 周年的时候，意大利出版了卡瓦利里的《不可分量几何学》。在这本书中，卡瓦利里把点、线、面，分别看成是直线、平面、立体的不可分量；把直线看成是点的总和，把平面看成是直线的总和，把立体看成是平面的总和。

卡瓦利里还根据不可分量的方法指出，两本书的外形虽然不一样，但是，只要页数相同，薄厚相同，而且每一页的面积也相等，那么，这两本书的体积就应该相等。他认为这个道理，适用于所有的立体，并且用这个道理求出了很多立体的体积。这就是有名的“卡瓦利里原理。”

事实上，最先提出这个原理的，是我国数学家祖暅。比卡瓦利里早 1000 多年，所以我们叫它“祖暅原理”或者“祖暅定理”。

阿贝尔与 n 次方程的代数解

同学们学过一元一次方程

$ax=b$（$a\neq0$）

它的代数解是：$x=\frac{b}{a}$（$a\neq0$）

又学了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）

它的代数解（用方程的系数经过若干次代数运算而得到表示根的式子，叫做方程的代数解）是：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2ab}$$

这个求根公式看来很简单，也很容易学，但同学们可知道它的发现过程却经历了漫长的历史吗？

公元前2000年左右巴比伦人的泥板文书中说，求出一个数，使它与它的倒数的和等于一个已知数，即求出这样的一对数 x 和 $\overline{x}$，使

$x\overline{x}=1$ 且 $x\overline{x}=b$，由此得出关于 x 的方程是

$x^2-bx+1=0$

他们作出（$\frac{b^2}{2}$），再作出$\sqrt{(\frac{b^2}{2})-1}$，于是得到解答

$x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{2})-1}$或它的代数解是：

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$$

这实际上是古巴比伦人得到的求根公式。但是当时不承认负数的存在，所以他们回避了负根。

希腊的丢番图（约前246～330）则只承认一个正根，即使两个都是正根，也只取一个。

印度的波罗及摩及（约公元598～665）在公元628年写成的《波罗摩修正体系》中，得到方程

$$x^2+Px-q=0$$

的一个根的求根公式是

$$x=\frac{\sqrt{P^2+4q}-P}{2}$$

到了9世纪乌兹别克数学家花刺子模（约公元780～850）在他的《代数学》中第一次给出了一般的一元二次方程的解法，他承认有两个根，还允许无理根的存在，但他不认识虚数，所以不承认虚根。

法国数学家韦达（1540～1603）则知道一元二次方程在复数范围内恒有解。

我国数学家对一元二次方程的研究有特殊的贡献。秦汉时代的《九章算术》就有求方程 $x^2+34x-7100=0$ 的正根记载。

在3世纪，赵爽（约公元222年）注释《周髀算经》时，提出了 $x^2-bx+c=0$ 型的求根公式。也是世界上最早记录了二次方程的求根公式。

一般的三次方程的代数解的表达形式经历了800年之久，到了16世纪初，欧洲文艺复兴时代，才由意大利数学家给出。下面的三次方程的代数解公式，一般称为卡丹（1501～1576）公式：

方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根是 $y_1+z_1, wy_1+w^2z_1, w^2y_1+wz_1$，（其中 $y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$，$z=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$，$yz=-\frac{q}{3}$，$w=\frac{-1+\sqrt{3i}}{2}$，$w^2=\frac{-1-\sqrt{3i}}{2}$）。

其实，发现这个公式的并不是卡丹。原来这里还有一段诱人深思的故事呢！

在意大利的波伦亚城有一位数学教授费洛，他首先发现了方程 $x^3+mx=n$（m，n 为正数）的解法，并于 1505 年把此方法传授给他的学生弗罗里都斯。

到了 1525 年，在意大利的威尼斯城举行了一次数学竞赛会，弗罗里都斯的对手塔尔塔里亚已经估计到对方会提出求解三次方程的问题，所以他就全力以赴的研究这个问题，他在比赛前的 8 天里以惊人的速度解决了 800 多年来没有解决的问题。在比赛过程，塔氏在两小时内解答了弗氏提出的 30 个问题，而最终取得了比赛的胜利，而弗氏却以回答不出塔氏的问题而宣告失败。

在这之后，塔氏更是专心致志的研究三次方程的问题，到 1541 年，他便找到了一般三次方程的代数解。这时卡丹请求塔氏告诉他这个公式，并保证不泄露秘密，于是塔氏便满足了卡丹的要求。但卡丹并没有遵守诺言，在 1545 年，卡丹在他的《大法》一书中公布了这个解法，所以就一直被误认为是卡丹公式，如果这个故事是真的，卡丹的为人品德也真是令人讨厌！

就在《大法》这本书里，卡丹还公布了他的学生费拉里发现的一般四次方程的代数解。

从二次方程到四次方程，人们通过变换，配方和因式分解等手段解决了一般的二、三、四次方程的代数解问题。例如：

$aX^2+bX+c=0$，将 $X=Y-\frac{b}{2a}$代入可求出代数解；

$aX^3+bX^2+cX+d=0$，将 $X=Y-\frac{b}{3a}$代入可求出代数解；

$aX^4+bX^3+cX^2c+dX+e=0$，将 $X=Y-\frac{b}{4a}$代入可求出代数解。

于是人们类比联想：一般的 n（n≥5）次方程可能求出它的代数解。

从 16 世纪中叶到 19 世纪末，当时几乎所有的数学家都坚持不懈地研究这个问题，人们发挥了一切聪明才智，但都没有找到解决问题的办法。

于是人们考虑重新认识这个问题，并且从反面提出问题："一般 n（n≥5）次方程可能没有代数解"，而且持有这种怀疑的人越来越多。

拉格朗日（1736～1813）在回忆录中写道："用根号解四次以上的方程的问题是一个不可能解决的问题，虽然，关于解法的不可能性，什么也没有证明。"高斯（1777～1855）在 1801 年的《专题论文》中也说过，这个问题也许是不能解决的问题。

拉格朗日有一个学生叫鲁菲尼在 1799～1813 年之间，曾经多次企图证明 n（n≥5）次方程没有代数解，但都没有成功，直到 1824 年，22 岁的挪威数学家阿贝尔（1802～1829）证明

了这个猜想："n（n≥5）次方程没有代数解"。

值得指出的是，阿贝尔虽然只活了26年零8个月，但在数学上的贡献是巨大的，正如一位数学家所说："阿贝尔留下了一些思想，可供数学家们工作150年。"他在1823年发表第一篇论文，最先提出对一种积分方程的解法。1824年发表了上述定理的证明，寄给高斯，没有受到重视（当时他的定理的叙述是：高于四次带有任意文字系数的方程不可能用代数一般的解法），1825～1826年，阿贝尔去柏林，在那里结识了工程师、数学家A·L·克列尔，成为他的知交和良师，并在克列尔创办的《纯粹数学与应用数学》杂志第一卷（1826年）上发表阿贝尔关于五次方程研究的详尽内容，当然还有其他方面的论文。

为什么人们经过这么长时间的努力，才证明了"n（n≥5）次的方程没有代数解呢"？是否同不能正确地提出问题和认识问题有关呢？如果能较早地从反面提出问题，也许这个问题的解决会缩短一些时间呢！这个问题是否也给我们这样一个启示：当从正面考虑问题不得其解时，可从反面去思考和研究，这正是"正难则反"的思维策略！

令人着迷的四色问题

同学们，让我们来做这样一个试验：给地图着色。在我国的地图上，给每个省、直辖市涂上一种颜色，要求相邻的省或直辖市有不同的颜色，最少需要几种颜色就足够了？答案是四种！再让我们来看看在世界地图上，用不同的颜色区分开相邻的国家，最少用几种颜色就足够了？答案还是四种。

我们上边做的给地图着色的实验，100多年前就已经有人做过了。大约在1850年，英国伦敦大学的学生居特里偶然发现：要区分英国地图上的州，有四种颜色就够了。他把这个发现告诉了弟弟，哥儿俩又进行了大量这方面的实验，发现有些地图用3种颜色，有些地图用4种颜色，但最多用4种颜色足以把共同边界的两个国家（或地区）区分开，即把相邻的国家涂上不同的颜色。居特里相信这个发现是正确的，但他证明不了。于是去请教他的老师，他的老师也不能证明这个问题。后来在1878年，当时英国的数学权威凯利在伦敦数学会上正式提出了这个问题。这个问题被称为四色问题。

四色问题提出以后，吸引了许多人。不断有人声称自己已经解决了四色问题，但都被人找出了证明过程中的错误。四色问题的影响越来越大，更多的人热衷于这个问题，这期间有人证明了“五色定理”，即给地图着色，用5种颜色就可以把相邻的国家（或地区）区分开，但四色问题仍没有人能够解决。

著名的大数学家闵柯夫斯基在四色问题上还闹出过一个笑话呢。一次闵柯夫斯基的学生跟闵柯夫斯基提及四色问题，一向谦谨的闵柯夫斯基却口出狂言：四色问题没有解决，主要是没有第一流的数学家研究它。说着便在黑板上写了起来。他竟想在课堂上证明四色问题。下课铃响了，尽管黑板上写的密密麻麻，但还是没能解决问题。第二天上课的时候，正赶上狂风大作，雷电交加，闵柯夫斯基诙谐地说：老天也在惩罚我的狂妄自大，四色问题我解决不了。

从这以后，四色问题更出名了，成了数学上最著名的难题之一。由于问题本身的简单、易懂，使几乎每个知道这个问题的人都想解决它。并且一旦接触这个问题，就有点欲罢不能的感觉（当时有人称之为“四色病”），很多人为这个问题的解决献出了毕生的精力，这其中既有数学方面的专家，也有普通的数学爱好者。我们国内也有许多人为解决这个问题努力过，中国科学院数学研究所接到的声称自己已经解决了四色问题的文章，放在一起足有好几麻袋，可惜他们的证明都有错误。

到了本世纪 70 年代，四色问题的研究出现了转机。美国伊利诺斯大学的阿佩尔、哈肯等人在研究了前人各种证明方法和思想的基础后，认为现在数学家手里掌握的技巧，还不足以产生一个非计算机的证明。从 1972 年起，他们在前人研究的基础上，开始了计算机证明的研究工作。终于在 1976 年彻底解决了四色问题，整个证明过程在计算机上花费了 1200 个小时。

四色问题虽然解决了，但数学家心中多少还留有一点遗憾。用电子计算机解决四色问题，没有创造出数学家们所期

望的新方法和思想。数学家还在期待着不借助任何工具，只依靠人本身智慧的“手工证明”。青少年朋友们，你们对四色问题的手工证明有兴趣吗？如果谁有兴趣，可要千万记住，先得好好学习，掌握足够的相关知识。用锤子和斧头这样的简单工具是造不出航天飞机的！

发现无理数

毕达哥拉斯大约生于公元前580年至公元前500年，从小就很聪明，一次他背着柴禾从街上走过，一位长者见他捆柴的方法与别人不同，便说："这孩子有数学奇才，将来会成为一个大学者。"他闻听此言，便摔掉柴禾南渡地中海到泰勒斯门下去求学。毕达哥拉斯本来就极聪明，经泰勒一指点，许多数学难题在他的手下便迎刃而解。其中，他证明了三角形的内角和等于180度；能算出你若要用瓷砖铺地，则只有用正三角、正四角、正六角三种正多角砖才能刚好将地铺满，还证明了世界上只有五种正多面体，即：正4、6、8、12、20面体。他还发现了奇数、偶数、三角数、四角数、完全数、友数，直到毕达哥拉斯数。然而他最伟大的成就是发现了后来以他的名字命名的毕达哥拉斯定理（勾股弦定理），即：直角三角形两直角边为边长的正方形的面积之和等于以斜边为边长的正方形的面积。据说，这是当时毕达哥拉斯在寺庙里见工匠们用方砖铺地，经常要计算面积，于是便发明了此法。

毕达哥拉斯将数学知识运用得纯熟之后，觉得不能只满足于用来算题解题，于是他试着从数学领域扩大到哲学，用数的观点去解释一下世界。经过一番刻苦实践，他提出"凡物皆数"的观点，数的元素就是万物的元素，世界是由数组成的，世界上的一切没有不可以用数来表示的，数本身就是世界的秩序。毕达哥拉斯还在自己的周围建立了一个青年兄