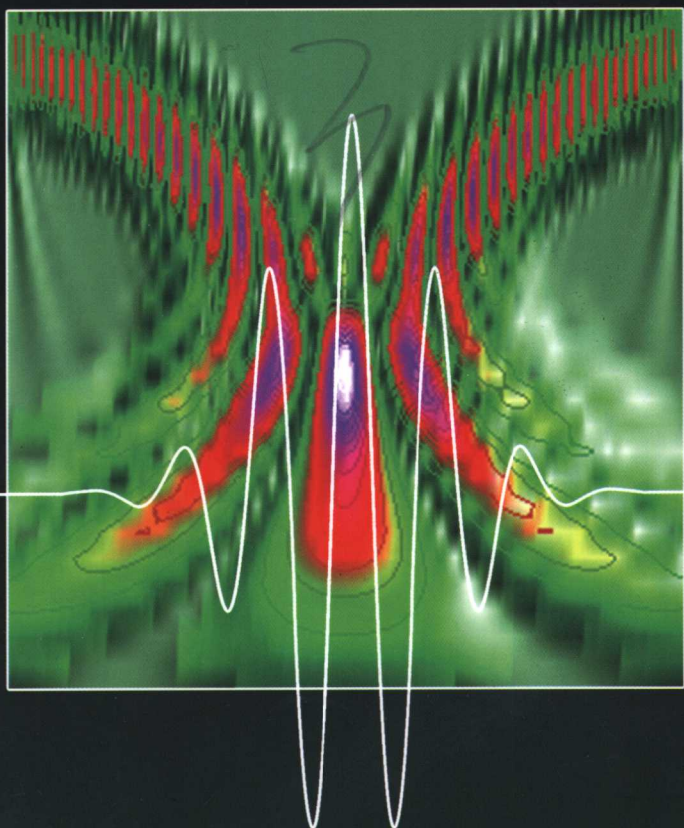


国家自然科学基金项目资助

小波与离散变换

理论及工程实践

成礼智 郭汉伟 著



清华大学出版社

小波与离散变换理论及工程实践

成礼智 郭汉伟 著



清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书采用直观的方式,从数学和信号处理相结合的角度,系统叙述了小波与离散变换的理论和新型算法设计及其应用,使读者能够透过小波理论建立过程中出现的复杂数学表达式领悟到其深刻而直观的工程意义。

本书由两个部分组成。第一部分为小波理论与新型算法设计,首先从传统的多分辨分析角度研究了小波的构造方法,然后利用多采样滤波器理论非常直观地设计出多带小波,最后利用提升格式系统讨论了离散变换与小波的设计和整数实现。第二部分研究小波理论的系列应用,主要讨论小波与离散变换在图像压缩、数字水印、电磁场数值计算、信号奇异性检测、雷达载机运动参数提取及在超宽带合成孔径雷达成像等领域中的应用。

本书理论系统严谨,内容丰富,不仅包含已有的成熟理论与应用成果,同时也包含了部分作者自己的工作实践。

本书旨在为数学专业工作者了解数学公式的工程与物理意义、为工科专业人员了解实际问题的数学描述和解决工程问题提供启发性的思路;本书对信号与信息处理、图像处理、计算机、电子工程、微波工程、空间物理等专业的研究生和教师以及相关专业的研发人员来说,是一本极有价值的参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用清华大学核研院专有核径迹膜防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

小波与离散变换理论及工程实践/成礼智,郭汉伟著. —北京:清华大学出版社,2005.1

ISBN 7-302-09630-9

I. 小… II. ①成… ②郭… III. ①小波分析 ②离散数学 IV. ①0177 ②0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第098183号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 客 户 服 务:010-62776969

组稿编辑:欧振旭

文稿编辑:陈韦凯

封面设计:姜凌娜

版式设计:郑轶文

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印 张:18.75 字 数:428千字

版 次:2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-09630-9/TN·225

印 数:1~4000

定 价:29.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系
调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

前 言

1807 年, 法国科学家傅里叶 (J.Fourier) 提出傅里叶级数展开的方法, 并用该方法研究热传导方程。近 300 年来, 傅里叶变换理论在科学技术的许多领域中得到了广泛的应用, 成为纯粹数学 (包括微分方程求解、函数空间刻画、数值计算等) 与应用数学领域、信息科学领域的主要工具之一。利用傅里叶分析方法表示信息时能够清晰地揭示出信号的频率特征, 但缺陷是不能反映时间域上的局部信息。而局部性质的描述无论是在理论还是在实际应用方面都是十分重要的。为了克服傅里叶分析的局限性, 人们从不同的角度对傅里叶变换进行改进, 到目前为止, 小波变换 (小波分析) 是众多改进中影响最深远的数学分析方法。

小波变换作为一门新型的应用数学分支, 系统的研究开始于 20 世纪 80 年代初期。小波变换理论的形成是数学家、物理学家以及信息工程专家集体智慧的结晶。其中, 法国地质工程师 J.Morlet、数学家 Y.Meyer、物理学家 A.Grossman、信号处理专家 S.Mallat 以及比利时数学家 I.Daubechies 等在小波理论的形成、发展及其在工程中的应用等方面做出了决定性的贡献。由于小波的局部分析性能优越, 在信号分析中尤其是在数据压缩与边缘检测等方面主要性能优于其他方法。在最近推出的静态图像压缩国际标准——JPEG 2000 中, 小波变换 (DWT) 已经正式取代离散余弦变换 (DCT) 成为标准的变换编码方法。但另一方面, 经典的小波理论在实际应用中同样存在美中不足的情况。例如, 在其应用最成功的图像压缩领域, 经典小波方法的计算复杂性远高于 DCT 方法, 成为数据实时处理的瓶颈; 而基于小波变换的常见图像压缩编码方法在处理数据的过程中大都需要将整幅图存储, 因此所需存储空间远高于 DCT 方法, 这势必极大增加压缩方法的硬件实现成本。为了尽量克服经典小波方法的缺陷, 小波的低复杂度、低成本实现算法的研究成为广泛关注的课题。1995 年, Daubechies 的博士生 W.Sweldens 系统地提出了基于提升格式 (lifting scheme) 的小波变换理论, 为了与经典的小波相区别, 他将之称为第二代小波。目前, 构造第二代小波的重要工具——提升分解已经成为离散正交变换整数实现的最强有力的工具。整数离散变换 (主要包括整数离散傅里叶变换、整数 DCT、整数离散 Hartley 变换以及整数重叠式变换等) 以无需浮点乘法、运算简单高效、与原始变换高度相似等特性, 近期正成为应用数学、计算数学、信息科学等领域中的热点研究课题。尽管国内出版了许多小波变换方面的优秀专 (译) 著, 但据作者所知, 目前尚无一书涉及第二代小波变换和整数离散变换理论。本书力图弥补这一缺陷, 为从事数学以及信息处理的广大科技工作者奉献一部内容新颖、方法实用、理论先进的小波变换理论与工程应用的专著。

本书作为我们近几年研究工作的总结, 内容主要包括: 小波的基础理论、多采样率滤波器组与多带小波的设计、离散变换与小波的整数实现算法; 作为应用, 本书较详细地讨论了小波与离散变换在图像压缩、数字水印以及小波变换在电磁场数值计算、信号处理中的应用。全书共分 7 章, 第 2 章至第 5 章由成礼智执笔, 第 6 章与第 7 章由郭汉伟执笔,

第1章由成礼智与郭汉伟共同执笔。全书具体内容安排如下:

第1章:连续小波变换。主要讨论小波变换与傅里叶变换的异同,连续小波变换的性质与计算,小波的离散化。

第2章:多分辨分析与小波构造。主要介绍多分辨分析的概念及其信号分解和重构,基于 Daubechies 方法的正交小波构造和对称双正交小波构造,有理化系数小波构造等。

第3章:多采样率滤波器组与 M 带小波的设计。主要介绍正交滤波器组的设计, M 带正交镜像滤波器组 (QMF) 的构造, M 带正交与对称双正交小波的构造方法。

第4章:离散变换与小波的整数实现算法。主要研究基于提升分解的各种整数离散变换与整数小波变换理论以及上述变换在图像压缩中的应用。

第5章:数字水印。首先介绍基于空间域方法的数字水印技术,重点讨论基于 DCT 和小波的数字水印方法,以及基于整数 DCT、整数小波同 Rijndael 加密技术相结合的各种不同类型的脆弱水印算法。

第6章:小波分析在电磁场数值计算中的应用。首先介绍小波矩量法原理及其应用,应用小波变换和小波包变换求解矩阵方程,重点论述时域小波——Galerkin 方法及其应用,并推导多分辨分析 (MRTD) 原理,证明了 MRTD 与时域有限插分法 (FDTD) 的关系。

第7章:小波分析在信号理中的应用。处主要介绍小波变换检测信号的奇异性,信号参数方面的应用。以合成孔径雷达 (SAR) 信号处理为背景,利用小波变换方法提取载机运动参数,辅助 SAR 快速成像。

本书作者长期从事小波变换和快速算法研究,本书的出版得到国家自然科学基金项目 (No: 10171109) 的资助。书中包含许多作者的研究成果。例如,本书第3章到第5章的部分内容为作者与钟广军博士以及博士研究生罗永、王红霞等人合作的成果;本书第6章部分内容是第二作者在攻读硕士学位期间 (电磁场与微波技术专业),在何建国教授、刘克诚教授和尹家贤教授的指导下完成的,第6章另一部分内容是作者与国防科大电子工程学院刘培国副教授合作的成果。电子科学与工程学院董臻和黄晓涛副教授在信号处理理论和工程实践中给予作者许多指导。另外,与超宽带实验室师兄弟之间的交流也让作者受益匪浅。

在写作本书的过程中,作者始终得到导师梁甸农教授的指导和支持,本书的顺利出版与导师在学业和生活上给予作者的关怀是密不可分的,在此衷心地感谢导师梁甸农教授。国防科技大学电子科学与工程学院陆中良教授审阅了本书的全部内容,刘克诚教授审阅了第7章的内容,两位教授提出了宝贵的修改意见;另外,蒋咏梅副教授也提出了一些修改建议。此一并表示衷心的感谢。

本书可供从事应用数学、计算数学或有关工程研究的科技和工程人员参考,也可以作为相关专业的硕士研究生或博士研究生的教材或参考书。

读者可以从小波学术站点 <http://guohanwei.51.net> 自由下载本书的源代码,或发邮件至 wavelet.support@163.com 与作者进行交流讨论。最后欢迎各位读者对本书内容提出批评、指正。

成礼智 郭汉伟

2004年5月于长沙国防科技大学

目 录

第 1 章 连续小波变换	1
1.1 概述	2
1.1.1 傅里叶变换	2
1.1.2 短时傅里叶变换	3
1.2 连续小波变换	9
1.2.1 定义	9
1.2.2 连续小波变换的计算	10
1.3 连续小波基函数	13
1.3.1 几种基函数	13
1.3.2 连续小波基函数的选择	15
1.4 连续小波变换的性质	16
1.5 频率离散化重构原信号——二进小波	23
1.6 时频离散化重构原信号——框架	25
1.7 小波级数	27
第 2 章 多分辨分析与小波构造	31
2.1 多分辨分析的直观描述	31
2.2 多分辨分析与双尺度方程	34
2.3 信号的分解与重构——Mallat 算法	40
2.4 小波包分析	44
2.5 尺度函数的计算	47
2.5.1 迭代算法	47
2.5.2 矩阵方程方法	48
2.5.3 傅里叶变换法	50
2.6 Daubechies 正交紧支集小波	50
2.7 有理化系数紧支集正交小波	61
2.8 双正交多分辨分析	65
2.9 基于 Cohen-Daubechies-Feauveau 方法的对称紧支集小波构造	67
2.10 完全重构滤波器与双正交小波系数的有理化设计	74
2.10.1 9-7 (滤波器长度分别为 9 和 7) 小波的构造	77
2.10.2 9-11 小波的构造	78
2.10.3 6-10 (偶数长) 小波的设计	78

2.10.4	4-4 的双正交小波的构造	79
第 3 章	多采样率滤波器组与 M 带小波的设计	81
3.1	概述	81
3.2	QMF 滤波器组	82
3.2.1	多采样率信号处理 (Multirate signal processing) 基础	83
3.2.2	两通道正交镜像滤波器组 (QMF)	88
3.2.3	两通道共轭正交滤波器组 (CQF)	89
3.3	M 带 PR QMF 滤波器组的设计	89
3.3.1	基于余弦调制构造 PR 滤波器组	89
3.3.2	基于多相位矩阵的晶格分解设计滤波器组	90
3.4	基于三角基函数的块变换与重叠式变换	91
3.5	PR 滤波器组和多带小波	96
3.5.1	M 带正交小波的构造	98
3.5.2	M 带双正交对称小波的构造	104
3.5.3	基于余弦调制的多带小波构造	113
第 4 章	离散变换与小波的整数实现算法	120
4.1	概述	120
4.2	基于提升分解的可整数实现线性变换	121
4.3	整数 DCT-II 与整数 DCT-IV 及其快速算法	124
4.4	带尺度 IntDCT-II 的设计	133
4.5	IntDCT-II 的分裂基算法	137
4.6	各类整数离散 W 变换及其快速算法	138
4.7	各类整数离散变换的统一算法	143
4.8	可整数实现的双正交重叠式变换及其在图像压缩中的应用	149
4.9	基于提升格式的小波变换及其在图像压缩中的应用	155
4.9.1	完全重构滤波器与提升分解	155
4.9.2	双正交对称小波的提升分解	160
4.9.3	基于提升格式小波变换在图像压缩中的应用	164
第 5 章	数字水印	168
5.1	概述	168
5.2	典型数字水印算法	171
5.2.1	PatchWork 算法	171
5.2.2	单向 Hash 函数算法	175
5.2.3	块匹配矫正算法	181
5.3	基于 DCT 的数字水印算法	183

5.4 基于浮点小波变换的数字水印方法	189
5.5 基于整数小波变换的脆弱水印算法	193
5.5.1 Rijndael 加密算法构造 Hash 函数	193
5.5.2 图像水印嵌入和检测	194
5.5.3 实验与比较	195
5.6 其他数字水印技术	197
5.6.1 可见水印	197
5.6.2 半透明水印技术	200
第 6 章 小波分析在电磁场数值计算中的应用	204
6.1 小波矩量法	205
6.1.1 小波矩量法的基本原理	206
6.1.2 基于小波展开的矩量法应用实例	209
6.2 小波变换在电磁场数值计算中的应用	211
6.2.1 通过小波变换求解矩阵方程	211
6.2.2 小波变换矩阵的构造	211
6.2.3 小波包变换矩阵的构造	213
6.2.4 应用举例	215
6.3 时域多分辨分析算法	222
6.3.1 MRTD 的基本原理	223
6.3.2 稳定性条件	226
6.3.3 色散条件分析	227
6.4 FDTD 与 MRTD 的关系	233
6.5 MRTD 的边界条件	235
6.6 MRTD 方法地表目标的复合散射法及其 SAR 成像分析	237
6.6.1 复合激励法模型	238
6.6.2 仿真与试验结果	239
6.7 本章小节	242
第 7 章 小波分析在信号处理中的应用	243
7.1 小波分析检测时间序列的奇变点	243
7.2 小波 RADON 变换检测线性调频信号参数	247
7.2.1 线性调频信号的小波分析结果的时间尺度和时频表示	248
7.2.2 通过 RADON 变换检测时频平面上的直线	250
7.2.3 通过小波 RADON 变换检测线性调频信号	251
7.2.4 结论	255
7.3 不同时频分析方法检测信号结果比较	255
7.3.1 不同时频分析方法检测信号结果分析	255

7.3.2	基于不同时频分析方法结果的综合	258
7.3.3	多项式威格纳分布	261
7.3.4	通过 PWVD 与线性时频分布综合检测 PPS 信号	262
7.3.5	小结	263
7.4	利用小波分析从雷达的回波数据中提取载机运动参数	264
7.5	小波插值在超宽带合成孔径雷达 $\omega-k$ 成像算法中的应用	269
7.5.1	解方程的方法构造一组整数小波	270
7.5.2	小波作为基函数插值	272
7.5.3	局部 Stolt 插值	273
7.5.4	小波基函数的选取及插值具体实现	274
7.5.5	应用小波 $\omega-k$ Stolt 插值算法的仿真	277
7.5.6	结论	277
7.6	本章小结	278
参考文献		279

第 1 章 连续小波变换

信号处理的任务之一是认识客观世界中存在的信号的本质特征，并找出规律。“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”。从不同的角度去认识、分析信号有助于了解信号的本质特征。信号最初是以时间（空间）的形式来表达的。除了时间以外，频率是一种表示信号特征最重要的方式。频率的表示方法是建立在傅里叶分析（Fourier Analysis）基础之上的，由于傅里叶分析是一种全局的变换，要么完全在时间域，要么完全在频率域，因此无法表述信号的时频局部性质，而时频局部性质恰好是非平稳信号最基本和最关键的性质。为了分析和处理非平稳信号，在傅里叶分析理论基础上，提出并发展了一系列新的信号分析理论：短时傅里叶变换（Short Time Fourier Transform）或加窗傅里叶变换（Windowed Fourier Transform）、Gabor 变换、时频分析、小波变换、分数阶傅里叶变换（Fractional Fourier Transform）、线调频小波变换等。

短时傅里叶变换是一种单分辨率的信号分析方法，它的思想是：选择一个时频局部化的窗函数，假定分析窗函数 $g(t)$ 在一个短時間间隔内是平稳（伪平稳）的，移动窗函数，使 $f(t)g(t)$ 在不同的有限时间宽度内是平稳信号，从而计算出各个不同时刻的功率谱。短时傅里叶变换使用一个固定的窗函数，窗函数一旦确定了以后，其形状就不再发生改变，短时傅里叶变换的分辨率也就确定了。如果要改变分辨率，则需要重新选择窗函数。短时傅里叶变换用来分析分段平稳信号或者近近平稳信号尚可，但是对于非平稳信号，当信号变化剧烈时，要求窗函数有较高的时间分辨率；而波形变化比较平缓的时刻，主要是低频信号，则要求窗函数有较高的频率分辨率。短时傅里叶变换不能兼顾频率与时间分辨率的需求。短时傅里叶变换窗函数受到 W.Heisenberg 不确定准则的限制，时频窗的面积不小于 2。这也就从另一个侧面说明了短时傅里叶变换窗函数的时间与频率分辨率不能同时达到最优。

Gabor 变换是海森伯不确定准则下的最优的短时傅里叶变换。高斯窗函数是短时傅里叶变换同时追求时间分辨率与频率分辨率时的最优窗函数。具有高斯窗函数的短时傅里叶变换就是 Gabor 变换。与短时傅里叶变换一样，Gabor 变换也是单分辨率的。小波变换使用一个窗函数（小波函数），时频窗面积不变，但形状可改变。小波函数根据需要调整时间与频率分辨率，具有多分辨率分析（Multiresolution Analysis）的特点，克服了短时傅里叶变换分析非平稳信号单分辨率的困难。小波变换是一种时间-尺度分析方法，而且在时间、尺度（频率）两域都具有表征信号局部特征的能力，在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率，在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率，很适合于探测正常信号中夹带的瞬间反常现象并展示其成分。所以，小波变换被称为分析信号的显微镜。小波变换不会“一叶障目，不见泰山”，又可以做到“管中窥豹，略见一斑”。但是小波分析不能完全取代傅里叶分析，小波分析是傅里叶分析的发展，而时频分析是一

种非线性二次变换，与线性的小波变换相去甚远。对于几种变换的关系，将在本章后面做简单的介绍。

1.1 概 述

1.1.1 傅里叶变换

傅里叶 (Fourier) 变换与小波变换从本质上看无非是研究如何利用简单、初等的函数近似表达复杂函数 (信号) 的方法和手段。1777 年以前，人们普遍采用多项式函数 $P(x)$ 来对信号 $f(x)$ 进行表征： $f(x) \approx P(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ 。1777 年，数学家 Euler 在研究天文学时发现某些函数可以通过余弦函数之和来表达。1807 年，法国科学家傅里叶进一步提出周期为 2π 的函数 $f(x)$ 可以表示为系列三角函数之和，即

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \quad (1.1)$$

$$\text{其中 } a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

表达式 (1.1) 可以理解为信号 $f(x)$ 是由正弦波 (含余弦与正弦函数) 叠加而成，其中 a_k, b_k 为叠加的权值，表示信号在不同频率时刻的谱幅值大小。

显然，当信号具有对称性 (偶) 特征时，

$$b_k=0, \quad f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx$$

而当信号具有反对称性 (奇) 特征时，

$$a_k=0, \quad f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx$$

在研究热传导方程的过程中，为了简化原问题，傅里叶建议将热导方程从时间域变换到频率域，为此他提出了著名的傅里叶变换的概念。信号 $f(x)$ 的傅里叶变换定义为：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.2)$$

傅里叶变换建立了信号时域与频域之间的关系，频率是信号的物理本质之一。

随着计算机技术的发展与完善，科学与工程中的所有计算问题跟计算机已经密不可分，计算机计算的一个典型特征是离散化。而式 (1.2) 定义的傅里叶变换本质上是一个积分计算，体现为连续化特征，同时在实际应用中信号都是通过离散化采样得到的。为了通过离散化来采样信息以及有效地利用计算机实现傅里叶变换的计算，需要对式 (1.2) 实现高效、高精度的离散化。为此，需要导出离散傅里叶变换 (DFT) 的概念。

为简单计，设 $f(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的有限信号，则 $f(x)$ 的傅里叶变换可简化为：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

再假设采用等间距采样,其采样点数为 N ,输入时域信号为 f_k ,要求输出频率信号为 $\hat{f}_k$ 。为了利用采样点 f_k 得到尽可能符合式 (1.2) 的输出值 $\hat{f}_k$, DFT 的思想是根据 f_k 拟合出 $f(x)$ 的最佳逼近多项式 $S(x)$,然后在式 (1.2) 中利用 $S(x)$ 代替 $f(x)$,从而得到 $\hat{f}_k$ 。下面简要讨论 $S(x)$ 与 $\hat{f}_k$ 的求法。

给定一组正交基: $\Phi_k = \{1, e^{\frac{2k\pi}{N}}, e^{\frac{2k \cdot 2\pi}{N}}, \dots, e^{\frac{2k \cdot (N-1)\pi}{N}}\}$, $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。直接验证向量满足内积关系: $\langle \Phi_k, \Phi_l \rangle = N \delta_{k,l} I_N$, 其中 I_N 为 N 阶单位矩阵,

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

设 $S(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx}$, 利用正交基 $\{\Phi_k\}$ 求解最小二乘问题:

$$\min_{c_k \in \mathbf{R}, 0 \leq k \leq N-1} F(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) = \min_{c_k \in \mathbf{R}, 0 \leq k \leq N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [f_n - S(\frac{2n\pi}{N})]^2 \quad (1.3)$$

求解式 (1.3) 得到:

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1; \quad W_N = e^{-\frac{2\pi}{N}} \quad (1.4)$$

现在利用 $S(x)$ 的定义, 以及由式 (1.4) 得到的系数值 c_k 来近似计算 $\hat{f}_k$ 。

将式 (1.4) 中的系数值代入多项式函数 $S(x)$ 中, 并利用 $S(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似, 则有:

$$\hat{f}_l = \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-ilx} dx = \frac{1}{N\pi} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nl} \quad (1.5)$$

除开常数 2π 外, 式 (1.5) 即为通常意义的离散傅里叶变换 (DFT), 其中输入 f_n 与输出 $\hat{f}_l$ 分别为信号的时域与频域信息。特别地, 如果采用其他的正交基, 利用最小二乘逼近则得到各种不同意义的离散正交变换, 例如, 离散余弦变换 (DCT, 一共 4 种), 离散正弦变换 (DST, 一共 4 种), 离散 Hartley 变换 (DHT) 以及离散 Walsh 变换 (含离散 Hadamard 变换) 等。限于篇幅, 在此不再一一介绍, 有兴趣的读者可以参见其他相关文献。

1.1.2 短时傅里叶变换

尽管傅里叶变换及其离散形式 DFT 已经成为信号处理, 尤其是时频分析中最常用的工具, 但是, 傅里叶变换存在信号的时域与频域信息不能同时局部化的问题。例如, 从定义式 (1.2) 我们看到, 对于任一给定频率, 根据傅里叶变换不能看出该频率发生的时间与信号的周期 (如果有的话), 即傅里叶变换在频率上不能局部化。同时, 在傅里叶变换将信号从时域上变换到频域上时, 实质上是将信息 $f(x)e^{-ix\omega}$ 在整个时间轴上的叠加, 其中 $e^{-ix\omega}$ 起到频限的作用, 因此, 傅里叶变换不能够观察信号在某一段时间段内的频域信息。而另一

方面,在信号处理,尤其是非平稳信号处理过程中,如音乐、地震信号等,人们经常需要对信号的局部频率以及该频率发生的时间段有所了解。由于标准傅里叶变换只在频域有局部分析的能力,而在时域内不存在局部分析的能力,故 Dennis Gabor 于 1946 年引入短时傅里叶变换 (Short-Time Fourier Transform)。短时傅里叶变换的基本思想是:把信号划分成许多小的时间间隔,用傅里叶变换分析每个时间间隔,以便确定该时间间隔存在的频率。图 1.1 (a)、图 1.1 (b) 为短时傅里叶变换对信号分析示意图。

假设对信号 $f(x)$ 在时间 $x=\tau$ 附近内的频率感兴趣,显然一个最简洁的方法是仅取式 (1.2) 中定义的傅里叶变换在某个时间段 I_τ 内的值,即定义

$$\hat{f}(\omega, \tau) = \frac{1}{|I_\tau|} \int_{I_\tau} f(x) e^{-ix\omega} dx \quad (1.6)$$

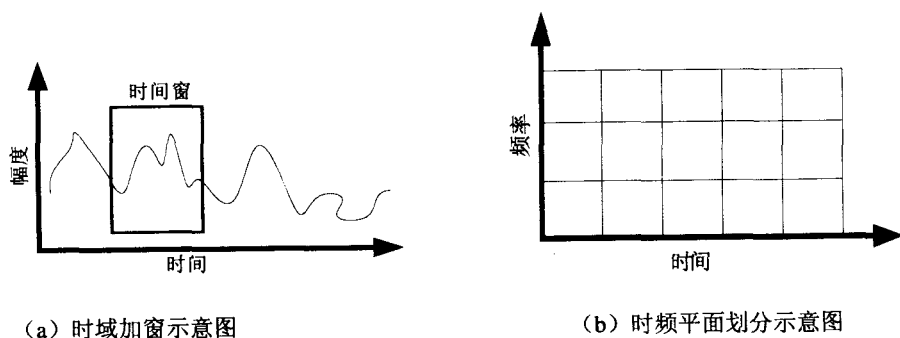


图 1.1 短时傅里叶变换示意图

其中 $|I_\tau|$ 表示区域 I_τ 的长度。如果定义方波函数 $g_\tau(x)$ 为

$$g_\tau(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I_\tau|}, & x \in I_\tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.7)$$

则式 (1.6) 又可以表示为:

$$\hat{f}(\omega, \tau) = \int_R f(x) g_\tau(x) e^{-ix\omega} dx \quad (1.8)$$

其中 R 表示整个实轴。从式 (1.2)、式 (1.7) 与式 (1.8) 很容易看到,为了分析信号 $f(x)$ 在时刻 τ 的局部频域信息,式 (1.6) 实质上是对函数 $f(x)$ 加上窗口函数 $g_\tau(x)$ 。显然,窗口的长度 $|I_\tau|$ 越小,则越能够反映出信号的局部频域信息。图 1.2 (a) 为对于参数取 $\tau(\tau=1)$,窗口函数 $g_\tau(x)$ 的图形。

容易得到下面的简单性质:

$$\textcircled{1} \int_R g_\tau(x) dx = 1 \quad \textcircled{2} x \in I_\tau, \lim_{\tau \rightarrow 0} g_\tau(x) = \infty$$

将函数 $g_\tau(x)$ 与著名的“ δ 函数”及其性质

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

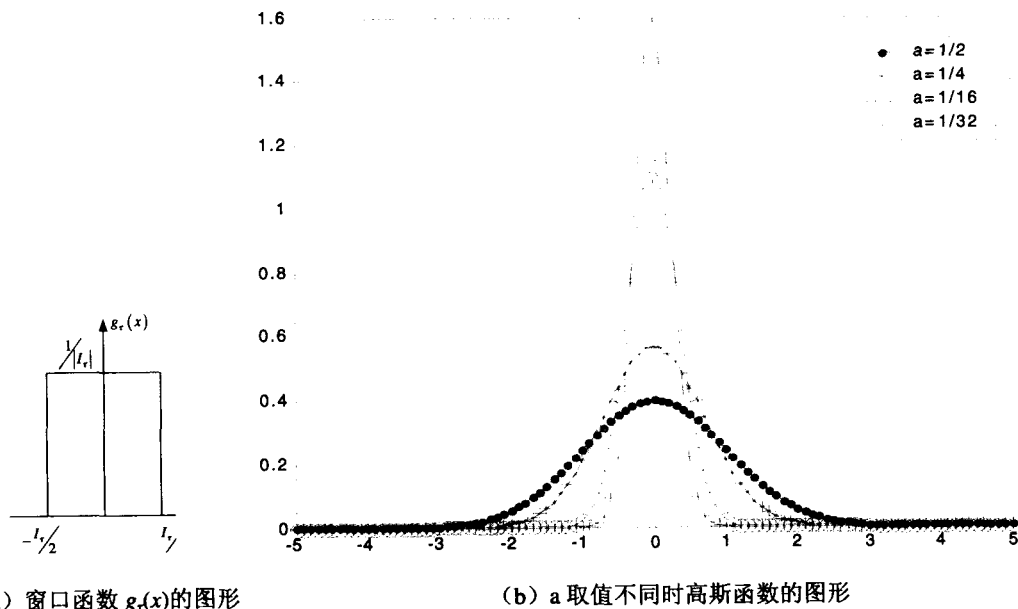
以及

$$\int_{\mathbf{R}} \delta(x) dx = 1$$

比较不难发现,“ δ 函数” $\delta(x)$ 实际上可以视为函数 $g_a(x)$ 的极限函数。从另外一个角度来看,窗口函数可以看作对于原信号在区域上的加权,而利用方波函数 $g_a(x)$ 作为窗口函数时存在的一个明显缺陷就是在区域 I_τ 上平均使用权值,不符合权值应该重点位于时刻 τ 且距离该时刻越远和权值越小的特点。也就是权函数主值位于时刻 τ ,在该时刻的两端函数图像迅速衰减的特点。在满足上述特性并保持函数的光滑性质的前提下,Dennis Gabor 于 1946 年提出了利用具有无穷次可微的高斯函数

$$g_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} e^{-\frac{x^2}{4a}}, a > 0$$

作为窗口函数。图 1.2 (b) 给出了取几种不同的值时高斯函数的图像,显然高斯函数具有窗口函数所需要的性质。下面讨论高斯函数与 δ 函数的关系。



(a) 窗口函数 $g_a(x)$ 的图形

(b) a 取值不同时高斯函数的图形

图 1.2 窗口函数与高斯函数的图形

定理 1.1 对于高斯函数 $g_a(x)$ 以及可积函数 $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g_a(x) > 0$ 且对于任意 $a > 0$ 均是无穷次可微的, 并且

$$\int_{\mathbf{R}} g_a(x) dx = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\mathbf{R}} f(x-t) g_a(t) dt = f(x) \quad (1.9)$$

对于 f 的所有连续点 x 成立。

式 (1.9) 称之为高斯函数的卷积性质。将式 (1.9) 与 δ 函数 $\delta(x)$ 的卷积性质

$$\int_{\mathbf{R}} f(x-t) \delta(t) dt = f(x)$$

进行比较, 不难发现, 无穷次可微高斯函数 $g_a(x)$ 可以作为函数 $\delta(x)$ 的高度近似, 即在连续函数的集合 C 上, 有 $g_a \rightarrow \delta$, $a \rightarrow 0^+$ 。

Gabor 变换是一种特殊的短时傅里叶变换, 而一般的短时傅里叶变换按照下列方式来定义。

定义 1.1 信号 $f(x)$ 的短时傅里叶变换 (STFT) $Gf(\omega, \tau)$ 定义为:

$$Gf(\omega, \tau) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x-\tau)e^{-i\omega x} dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)g_{\omega, \tau}^*(x) dx \quad (1.10)$$

其中 $g_{\omega, \tau}^*(x) = g(x-\tau)e^{i\omega x}$ 称为积分核。

为了保证信号 $f(x)$ 的短时傅里叶变换 (STFT) $Gf(\omega, \tau)$ 以及逆变换有意义, 一个充分必要条件为:

$$\omega \hat{g}(\omega), xg(x) \in L^2(\mathbf{R}) \quad (1.11)$$

另外, 由于 $g(x)$ 可以看成是对函数 $f(x)e^{-i\omega x}$ 加权, 因此, 人们经常要求:

(1) 当 $g(x) \in L^1(\mathbf{R})$ 时

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = A > 0, \quad g(x) \geq 0$$

(2) 当 $g(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 时,

$$\int_{\mathbf{R}} g^2(x) dx = 1$$

以及

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{g}^2(\omega) d\omega = 1$$

$g(x-\tau)$ 作为对于 $f(x)e^{-i\omega x}$ 的加权, 其贡献应该主要集中在 $x=\tau$ 附近。最常见的要求是: $g(x-\tau)$ 在 $x=\tau$ 附近迅速衰减, 使得窗口外的信息几乎可以忽略, 而 $g(x-\tau)$ 起到时限作用, $e^{-i\omega x}$ 起到频限作用。当“时间窗”在 x 轴上移动时, 信号 $f(x)$ “逐渐”进入分析状态, 其短时傅里叶变换 $Gf(\omega, \tau)$ 反映了 $f(x)$ 在时刻 $x=\tau$ 、频率 ω 附近“信号成分”的相对含量。根据前面的分析, 写出两种常见的窗口函数如下。

(1) B 样条

$$N_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.12)$$

对于自然数 m , 递推定义

$$N_m(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt, \quad (m \geq 2) \quad (1.13)$$

显然, $N_m(x)$ 是存在 $m-1$ 阶导函数且仅在有限区间 $[0, m]$ 上非零 (称之为紧支集) 的函数。

(2) 高斯 (Gaussian) 函数

$$g_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} e^{-\frac{x^2}{4a}}, \quad a > 0$$

前面讨论了短时傅里叶变换的概念、性质以及窗口函数的取法。下面利用短时傅里叶变换的特性通过设计时域与频率窗口来分析信号的局部性质。

设时域窗口的中心与半径分别为 t^* 与 Δ_t , 而频率窗口的中心与半径分别为 ω^* 与 Δ_ω ,

显然, t^* 与 ω^* 应该分别为其“重心”, 即其值满足式 (1.14):

$$\left. \begin{aligned} t^* &= \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbf{R}} x |g(x)|^2 dx \\ \omega^* &= \frac{1}{\|\hat{g}\|_2^2} \int_{\mathbf{R}} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

利用统计学原理, 窗口半径 Δ_g 与 $\Delta_{\hat{g}}$ 应该设计为其“标准差”, 表示有效半径, 其值满足式 (1.15):

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_g &= \frac{1}{\|g\|_2} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-t^*)^2 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Delta_{\hat{g}} &= \frac{1}{\|\hat{g}\|_2} \left(\int_{\mathbf{R}} (\omega-\omega^*)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \quad (1.15)$$

为了对信号在 (时间, 频率) = (a, ω_0) 附近的信息进行分析, 时间-频率窗口的形式设计为 $[t^* + a - \Delta_g, t^* + a + \Delta_g] \times [\omega^* + \omega_0 - \Delta_{\hat{g}}, \omega^* + \omega_0 + \Delta_{\hat{g}}]$ 。直接推得时间窗口与频率窗口的宽度分别为 $2\Delta_g$ 与 $2\Delta_{\hat{g}}$ 。显然, 上述时间与频率窗口的宽度仅跟窗口函数相关而跟待分析的时间、频率位置以及窗口中心无关, 此时窗口的面积为 $4\Delta_g\Delta_{\hat{g}}$ 。图 1.3 给出了随着 (a, ω_0) 平移所得到的一系列时间-频率窗口。

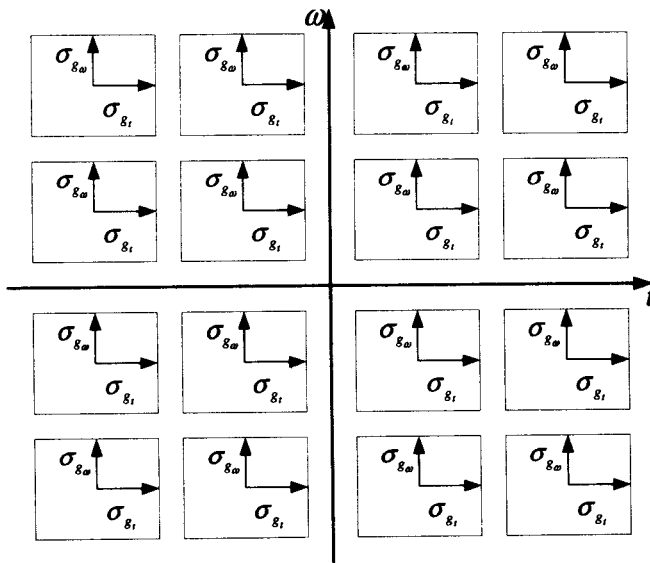


图 1.3 短时傅里叶变换分辨元胞的相空间表示

从图 1.3 可直接看出, 时间-频率窗口的宽度对于所观察的所有频率的谱具有不变特性, 这一点不适应于非平稳信号的高频与低频部分的特性分析。事实上, 对于高频信息, 信号变化剧烈, 时间周期相对变小, 时间窗口应该变窄一些; 而对于低频信息, 信号变化平稳, 时间周期相对较大, 时间窗口应相应设计得宽一些。也许有人会问: 为了实现高精度的时

间-频率局部化, 是否可以选某个窗口函数 $g(x)$ 使得时间-频率窗具有充分小的面积. 下面的“测不准原理”说明, 对于任意窗口函数, 其窗口面积不小于 2 个平方单位, 即有如下定理.

定理 1.2 对于任意满足式 (1.11) 的窗口函数 $g(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 其窗口面积满足

$$4\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq 2 \quad (1.16)$$

当且仅当 $g(x) = ce^{iax} g_a(x-b)$, $g_a(x)$ 为前面定义的高斯函数以及当 $c=0$, $b \in \mathbf{R}$ 时, 式 (1.16) 中的等号成立.

证明 不失一般性, 可以假设 $t^* = \omega^* = 0$, 于是

$$\Delta_g^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \frac{\int_{\mathbf{R}} x^2 |g(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega}{\|g\|_2^2 \|\hat{g}\|_2^2} \quad (1.17)$$

由于 $(\hat{g}') = i\omega\hat{g}$ 以及 Parseval 等式 $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$, 故得到

$$\int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbf{R}} |(\hat{g}')(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{\mathbf{R}} |g'(x)|^2 dx$$

将上式以及

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{\mathbf{R}} |g(x)|^2 dx$$

代入到式 (1.17) 中, 直接得到

$$\Delta_g^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \frac{\int_{\mathbf{R}} x^2 |g(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} |g'(x)|^2 dx}{\|g\|_2^4}$$

另一方面, 由于 $x|g(x)| \in L^2(\mathbf{R})$, $g'(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 因而有 $xg(x)g'(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 即 $x \frac{d}{dx} g^2(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 因此

$$\frac{d}{dx}(xg^2(x)) = g^2(x) + x \frac{d}{dx} g^2(x) \in L(\mathbf{R})$$

从上式可以推得: 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $xg^2(x)$ 均存在极限, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xg^2(x)) = C_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xg^2(x)) = C_2$, 如果 $C_1 \neq 0$ 则

$$g^2(x) \approx \frac{C_1}{x} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

这与 $g^2(x) \in L^1(\mathbf{R})$ 矛盾, 因此必有 $C_1=0$, 类似可以推得 $C_2=0$, 即 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} xg^2(x) = 0$. 利用该式以及分步积分公式直接得到

$$\int_{\mathbf{R}} xg(x)g'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} g^2(x)dx \quad (1.18)$$

将式 (1.18) 代入 Schwarz-Cauchy 不等式, 得到

$$\frac{1}{4} \left(\int_{\mathbf{R}} g^2(x)dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbf{R}} xg(x)g'(x)dx \right)^2 \leq \int_{\mathbf{R}} |x|^2 |g(x)|^2 dx \int_{\mathbf{R}} |g'(x)|^2 dx$$