国外经典教材·电子信息

PEARSON Prentice Hall

Concepts in Systems and Signals, Second Edition

系统与信号入门

（第2版）

(美) John D. Sherrick 著
肖创柏 罗 琼 译

PEARSON Education
清华大学出版社

国外经典教材·电子信息

系统与信号入门

（第2版）

(美)　John D. Sherrick　著

肖创柏　罗　琼　译

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为电子与电气类、计算机类和电信类高年级学生编写的，集中介绍了连续域和离散域。全书包含 12 章，两个附录。首先回顾连续时间系统的基础知识，然后介绍与信号频谱有关的概念和分析工具（主要侧重于周期信号和离散傅里叶变换）。此外，各章末尾基本都提供 MATLAB 教程和习题，供读者进一步了解 MATLAB。附录 A 简单介绍 DSP 硬件。附录 B 提供各章奇数编号习题的答案。

本书可作为高等院校信号与系统入门教材，也可供科研和工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

系统与信号入门(第 2 版)/(美)谢里克(Sherrick, D. J.)著；肖创柏，罗琼译. —北京：清华大学出版社，2005.9

(国外经典教材・电子信息)

书名原文：Concepts in Systems and Signals, Second Edition

ISBN 7-302-11416-1

Ⅰ.系… Ⅱ.①谢…②肖…③罗… Ⅲ.①信号系统－高等学校－教材 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082173 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
文稿编辑：文开棋
封面设计：久久度文化
印 装 者：北京国马印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张**：21.25　**字数**：512 千字
版　次：2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-11416-1/TP・7501
印　数：1～4000
定　价：39.00 元

前　言

在20世纪80年代初期，随着个人计算机时代的出现和发展，数字信号处理(Digital Signal Processing，DSP)课题开始纳入本科工程专业的教学计划。许多低功率模拟电路可以用数字技术更好、更便宜地实现，这种现象已经变得越来越明显。由于数字电路能够被重新编程以执行新任务，再加上数字芯片的封装密度要高于模拟芯片，因此数字方法优越性更高。与此同时，由于同样的原因，数字控制系统已经成为主流。曾令多数大学实验室望而生畏的高价频谱分析仪，现在却变成了廉价示波器的某些功能选项。显而易见，现在已经有必要将数字信号处理的课程纳入任何一个电学/电子学教学计划。

在罗彻斯特理工大学，本书最初是为支撑电学、计算机和电信系所有高年级工程技术教学计划所要求的入门课程编写的。学生们不同的专业背景要求这门课程的教材能为他们建立一个公共的基础，只给出关键定理，不需要有复杂的数学推导。在这门课程中，频谱分析一般只限于周期信号。

相量将用于介绍s域和z域传递函数。采样定理将以两个级别的数学复杂度来介绍，它是理解离散时间域和连续时间域的关键。可以通过两种方式来推导它(后者更正规)：(1) 通过定义理想采样；(2) 通过定义理想采样器。在介绍过程中，我尽量做到连续时间域和离散时间域的平衡，以及系统和信号之间的平衡。为便于学生们理解，每章(第1章除外)末尾都集中介绍了MATLAB。

第2版有哪些变化

对s域相关知识掌握得很好的学生可能发现这本教材的许多入门性章节没有必要，此时可以立即跳到介绍傅里叶级数的章节。为了更全面地讨论连续时间傅里叶变换和说明它在推导信号性质时的能力，我新增了一些主题，例如频谱估计、卷积以及一些相关的课题。当然，第1版中的错误(具体是指第7章中与DFT推导有关的内容)已经得到了修正。

考虑到有的教师想将本书用于控制系统入门课程，我新增了一章内容，主要介绍拉普拉斯变换和z变换的应用。有了这些主题的铺垫，我还附带介绍了从连续域系统到离散域系统转换的冲激不变方法。

用过本书的教师会愉快地发现，我只对两个问题做了重新编号。它们都是第6章的，过去是在“高级问题”一节之中。该目录标题现已改名为“补充题”，这样就有利于增加一些便于理解新例子(或讨论)的问题。当然，按照通常的做法，多数习题的答案也都更改了。

我已经复核了本书关于MATLAB的课程，发现无需更改即可兼容版本13。仅在少数几个地方，用length命令代替了size命令，因为length更合适。要想完成本书的MATLAB课程，学生们需要一个包含控制和信号处理工具箱的教育软件包。学生版MATLAB也包含所有需要的命令。MATLAB是Math Works公司的注册商标。欲了解进一步的信息，可访问他们的网站：*www.mathworks.com*。

目　　录

第 1 章　数字、算术和数学

本章目标

1. 讨论复数的起源
2. 以极坐标形式和直角坐标形式表示复数
3. 定义并阐述欧拉公式
4. 对复数进行数值运算
5. 描述复变函数的特性
6. 说明并求解不定值
7. 用 MATLAB 实现算术运算

引　言

电力、机械、水利以及其他一些系统都包含需要遵循微积分原则的构件。在这些系统中，如果要确定一个输入信号所对应的输出响应，就需要求解微分方程。但是，有一类特殊的信号 e^{st}，能将线性微分方程简化为简单的代数方程。这种指数函数能表示一些我们感兴趣的信号。虽然它是一个简单的时间函数，但返回的值却是复数。

复数是本书的重点，所以我们首先简略回忆一下复数的起源并引入复数所遵循的运算规则，这是很有帮助的。然后，将讨论与函数有关的其他几个数学问题，尤其是复变函数，并在需要的情况下大致介绍相关的数学概念。

1.1　数字系统

从各种不同类型数字的名称可以看出，我们对新概念感到惊讶甚至疑惑是不足为奇的。通过本小节的学习，你将能够：

- 讨论复数的起源
- 解释为什么“虚数”是必要的
- 认识到大多数人都觉得新概念难以理解

对于计数系统的起源，人们的说法不一，但可以肯定的一点是它开始于数数。远古时期的猎人可能用他获得的兽皮的数量来记录自己的收获，用外出后的日出次数来记录劳动的时间。在物物交换中，猎人用兽皮来换取食物、工具或武器。所有这些过程都需要正整数，如此一来，人们也就自然而然地接受了正整数的概念。

公元前 2000 年的手写稿记录表明，古人已经能理解简单的分数。在早期，领主该如何把领地统一分配给他的臣民，以便公平地征税，即是最现实的数学问题之一。有些重要的事情总是非做不可的。

如果一个人拥有 5 块兽皮，用其中的 3 块换取了一个新矛，那么，他只要数出用来进行交易的皮毛数和剩下的皮毛数就可以了。这对技术和概念没有什么新的发展要求。但是，

如果他仅仅拥有 3 块兽皮，但这笔交易却需要 5 块兽皮，问题就变得难以想像了。这种交易在当时看来是不可能进行的。而且这个问题也一直持续了好几个世纪才得到解决。

他们经历重重困难才获得的这些概念在我们心中已经根深蒂固，成为我们的第二天性。但是，那时他们还不曾拥有用于系统性地解决复杂问题的符号和代数定律。所以，一旦智者假定没有交易是不可能进行的，那就必然要求产生一个全新的数字系列来满足要求。于是，负数应运而生。负数的出现使数字系统扩大了一倍。赊欠成为交易“家族”的一个成员。

数字 0 这一概念的建立尤其困难。为什么要产生一个表示什么也没有的数字呢？人们也就是从那个时候，才开始用哲学的头脑来思考这些可以表达如此抽象化概念的数字。人们还发现，有些数字不能用整数的比率来表示，就像今天的 e 和 π，这些特殊的数字并非来源于我们的日常生活经验，非常抽象，它们是无理数。今天，我们知道，无理数是无穷的，比我们以前所知道的所有的数都要多。

直到 16 世纪，人们才认识到，如果要求解诸如 $x^2=-1$ 的方程式，就需要再次引入一个新的数字概念，即一类新的数字。也就是我们今天所说的“虚数”。它与我们以前知道的实数不同，j (数学上也用 i)用来作为虚部的标志，其中，$\mathrm{j}=+\sqrt{-1}$。

今天，我们很容易理解这种表示方式，即用一条从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的连续数轴来表示整个实数系统，直线上的每一个点都表示一个特定的数值。用同样的方式来考虑虚数，但是应注意两点区别：(1)每个虚数都必须用 j 来标记，以区别于实数；(2)虚轴必须独立于或者说垂直于实轴。实轴和虚轴共同构成了一个复平面，复平面上的每一个点都表示一个普通的数，这些数能应用于数值计算或是从数值计算中获得，我们构想出来的每一个函数都能在该平面上求得解。

在电子技术的研究中，引入复数并不是必需的，因为所有的变量——电压、电流、电阻和电感等，都是能够用一般实数来描述的物理量。最终，复数通过其应用和解释找到了用武之地，而不是通过数学上的实部和虚部的特定标识符(用于区分数字的两个组成部分)。由于这两个组成部分彼此独立，从而使得单一的复数能够包容两种不同物理属性的信息。我们介绍复数，是因为复数的引入能使许多计算变得更容易。

1.2 直角坐标/极坐标变换

复数既可以用直角坐标形式来表示，也可以用极坐标形式来表示。通过本小节的学习，你将能够：

- 用直角坐标形式和极坐标形式来表示复数
- 实现两坐标形式的相互转换

如图 1.1 所示的复平面中，通过给出实部和虚部的值来确定复数在复平面中的位置，从而最终确定该复数。以这种方式确定的表示形式就是所谓的直角坐标形式。若 $z=a+\mathrm{j}b$，a，b 都是实数，则 a 称为 z 的实部，b 称为 z 的虚部。为了澄清术语的概念，这里需要特别指出的是：无论何时我们谈到复数的虚部，实际上都是指一个被 j 相乘的实数。

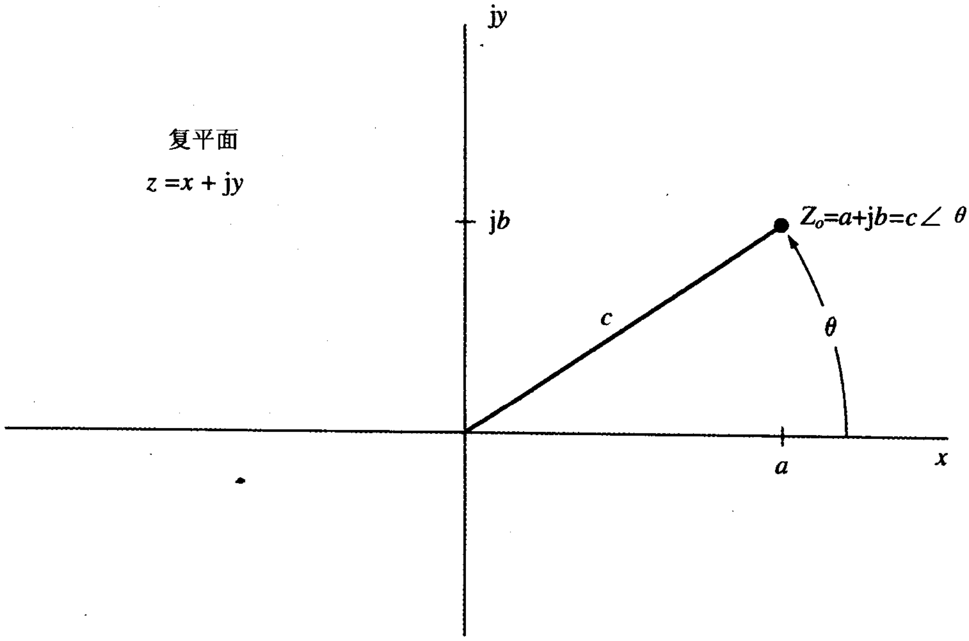


图1.1 在复平面中，一个特定的复数可以通过直角坐标或极坐标来表示

有人把 j 看作一个旋转算子，认为它把一个实数在复平面旋转 90° 后到 j 轴，从而将一个实数变成一个虚数。但我们更倾向将 j 看成一个数字，将它定义为–1 的正平方根，并同等对待 j 与其他数字的处理。对我们而言，2j 与 j2 是没有差别的。下面列出几个 j 的乘积结果：

$$j = +\sqrt{-1} \qquad j^2 = -1 \qquad j^3 = -j \qquad j^4 = 1 \qquad j^5 = j$$

确定复数的另一种方法是给定其沿半径线到原点的距离以及半径线与正实轴的夹角。这就是所谓的极坐标表示形式，通常用 $c\angle\theta$ 表示，读作“模为 c，相角为 θ”。根据惯例在进行坐标形式的变换时，θ 的取值以逆时针方向为正，c 与 θ 都是实数。

对复数进行直角坐标和极坐标之间的转换是基本要求。直角坐标和极坐标之间的关系很容易从图 1.1 推导出来。其中，极坐标的变换稍有点复杂，因为反正切函数的转换必须在正确的象限中进行计算。在建立正确的相角过程中，示意图往往很有用。

极坐标/直角坐标变换

直角坐标→极坐标 $\quad a + jb = c\angle\theta \quad$ 极坐标→直角坐标

$$a = c\cos\theta \qquad (1.1a)$$

$$b = c\sin\theta \qquad (1.1b)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1.1c)$$

$$\phi = \arctan(|b/a|) \qquad (1.1d)$$

象 限	a	b	θ
第一象限	+	+	ϕ
第二象限	−	+	$\pi - \phi$
第三象限	−	−	$\pi + \phi$
第四象限	+	−	$-\phi$

例 1.1A

求复数 $z_o = 2\angle 140° = 2\angle 2.444$ 的直角坐标形式。

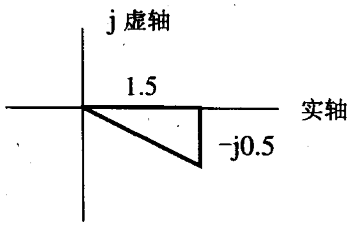
解：

$$a = 2\cos 140° = 2(-0.7664) = -1.533$$
$$b = 2\sin 140° = 2(0.6428) = 1.286$$
$$\therefore z_o = -1.533 + \mathrm{j}1.286$$

例 1.1B 求复数 $z_o = 1.5 - \mathrm{j}0.5$ 的极坐标形式。

解：

绘制示意图通常有助于解题：



$$c = \sqrt{1.5^2 + (-0.5)^2} = \sqrt{2.25 + 0.25} = 1.581$$
$$\phi = \arctan\left(\left|\frac{-0.5}{1.5}\right|\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.322 = 18.43°$$

实部为正，虚部为负的复数位于第四象限，所以 $\theta = -18.43°$ 。

$$\therefore z_o = 1.581\angle -18.43°$$

尽管严格说来以弧度表示角度也是正确的，即用度和弧度都可以，但一定要保证按照计算机软件期待的单位进行输入。

等式 1.1a-d 与例 1.1A-B 所示的变换过程在现实中很少应用。在使用现代技术的计算软件中，内部都构建了直角坐标/极坐标函数，能够帮助用户实现坐标间的转换，包括找到正确的象限信息。因此，必须查阅计算软件的使用手册，以熟练地掌握这些转换操作。

1.3 欧 拉 公 式

为了进一步学习涉及到复数的运算，我们需要为 $c\angle\theta$ 这种坐标表示建立适当的数学模型。通过本小节的学习，你将能够：

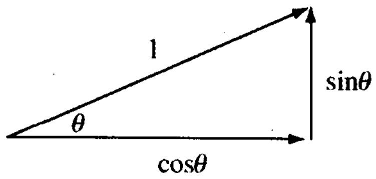
- 表述并解释欧拉公式
- 用标准数学函数来描述一个极坐标形式的复数
- 将一个余弦函数表示为复指数之和
- 将一个正弦函数表示为复指数之和

欧拉公式是一个重要的关系式：

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\theta} \equiv \cos\theta \pm \mathrm{j}\sin\theta \tag{1.2}$$

如果把欧拉公式从直角坐标形式变换为极坐标形式，可表示为：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\angle\arctan(\tan\theta) = 1\angle\theta$$



$$e^{j\theta} \equiv 1\angle\theta \tag{1.3}$$

因此 $A\angle\theta$ 的真实数学解释就是 $Ae^{j\theta}$，且指数的代数规则也适用于极坐标形式复数的角度信息(见表 1.1 所示。)

表1.1　部分指数法则

$e^{jx}e^{jy}=e^{j(x+y)}$	$(e^{jx})^y=e^{jxy}=(e^{jy})^x$	$1/e^{jx}=e^{-jx}$

通过直接代入等式 1.2，可获得另外几项特例：

$$e^{\pm j0}=1 \qquad e^{\pm j\pi}=-1 \qquad e^{\pm j2\pi}=1 \qquad e^{\pm j\pi/2}=\pm j$$

根据欧拉公式，导出以下两个等式，可用来求解正弦函数或余弦函数：

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$
$$\underline{e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta}$$
$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos\theta \qquad \text{(两个等式相加)}$$
$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin\theta \qquad \text{(两个等式相减)}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \tag{1.4}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \tag{1.5}$$

应用这些关系，任意正弦信号都可以表示为多个更为基本的复指数的函数形式，这也是相量概念的起源。相量是我们以后研究交流电路(a-c)的基础。欧拉公式的重要性是不言而喻的，本书后面将大量应用欧拉公式。

例 1.2

将如下 $f(x)$ 表示为余弦函数的形式：

$$f(x)=2e^{j2x}+4e^{-jx}+4e^{jx}+2e^{-j2x}$$

解：

将各项与等式 1.4 比较，得到：

$$f(x)=2[e^{j2x}+e^{-j2x}]+4[e^{jx}+e^{-jx}]$$

即：

$$f(x)=4\cos 2x+8\cos x$$

1.4　复数运算

复数的“复杂性”是针对于它的计算而言的，复数的计算量比实数的计算量要大。两个复数相加，等于将各复数中的实、虚部值分别相加，所以，不但出错的几率增加一倍，完成计算操作所需要的时间也相应地增加一倍。通过本小节的学习，你将能够：

- 运用复数进行数值计算
- 计算一个复数的和、差、积、商
- 复数的幂运算
- 求一个复数的共轭复数
- 使一个复数同它的共轭复数相结合，以便求解它的实部、虚部、幅值、相角

1.4.1 加/减法运算

设

$$z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1,\quad z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2$$

则有

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j}(y_1 + y_2)$$

类似的还有

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{j}(y_1 - y_2)$$

复数的实部和虚部是完全独立的两部分，以 j 为标志进行区分。对这两部分的运算应分别进行，实部的计算结果作为结果的实部，虚数的计算结果作为结果的虚部，最后将两部分结合起来构成最终结果。

若复数是以极坐标的形式给出的，通常先将其转换为直角坐标形式后再进行加、减运算。大多数计算软件都能接受极坐标形式的输入，并在计算软件的内部进行转换、相加，最后将结果又转换成极坐标的形式输出，整个过程只是一个简单的操作。当然，如果两复数的相角相等，那就可以将它们看作同一方向上的两个矢量，和的幅值可直接由两复数的幅值相加得到。

例 1.3A

设 $z_1 = 2 + \mathrm{j}5$，$z_2 = 2\angle 140^\circ$，求 $z_1 - z_2$。

解：

这是一道减法运算，应先将 z_2 的极坐标形式转换成直角坐标形式，根据例 1.1A 有：

$$z_2 = 2\angle 140^\circ = -1.533 + \mathrm{j}1.286$$

所以

$$z_1 - z_2 = 2 + \mathrm{j}5 - (-1.533 + \mathrm{j}1.286) = 3.533 + \mathrm{j}3.714$$

1.4.2 乘法运算

复数的乘法运算既可以在直角坐标形式下进行，也可以在极坐标形式下进行。运算过程中选用哪种形式取决于所给数值的初始形式和所要求的结果形式。我们先以直角坐标形式为例。注意，$\mathrm{j}^2 = -1$：

若

$$z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1,\quad z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2$$

则

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1)(x_2 + \mathrm{j}y_2) = x_1(x_2 + \mathrm{j}y_2) + \mathrm{j}y_1(x_2 + \mathrm{j}y_2)$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + \mathrm{j}x_1 y_2 + \mathrm{j}y_1 x_2 + \mathrm{j}^2 y_1 y_2$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{j}(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

这个结论并不需要记住。在计算器中，完成乘积的计算过程是很快的。事实上，复数的乘法与实数因子的乘法，比如：$(x+a)(y+b)$，其运算过程是一样的，只是复数乘法需要对结果进行重新组合，以区分实部和虚部。

如果复数是以极坐标形式给出的，那么乘法运算将很简单。只需要把乘数的幅值相乘作为积的幅值，乘数的相角相加作为积的相角，即完成乘法运算。

若

$$z_1 = c_1\angle\theta_1,\quad z_2 = c_2\angle\theta_2$$

则有

$$z_1 z_2 = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} = c_1 c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}$$

复数的幂运算可以看作重复乘积运算的特殊情况，所以，幂运算在极坐标形式下是很容易求解的：

$$z^n = (c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n = c^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta} = c^n \angle n\theta$$

1.4.3 共轭复数

复数 z 的共轭是以 z^* 的形式来表示，定义如下：

若 $z = a + \mathrm{j}b$，则 $z^* = a - \mathrm{j}b$；若 $z = c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，则 $z^* = c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$

注意，共轭复数的求解仅仅是对复数中的 j 用– j 作简单的替换，即使不是最简数复形式，这种求解方法仍然是正确的。从下面的定理中，我们可以归纳出这一结论。

共轭定理：如果复数 z 是在包含加/减/乘/除等算术表达式中的运算结果，那么，它的共轭形式 z^* 只需要在表达式中用– j 取代 j 即可求得。

值得注意的是：若设 $z = a + \mathrm{j}b$，则一个复数加/减它的共轭复数，可以分离出复数的实/虚部。

$$z + z^* = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \qquad \text{（读作“两倍 } z \text{ 的实部”）}$$

$$z - z^* = 2\mathrm{j}b = 2\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z) \qquad \text{（读作“2j 倍 } z \text{ 的虚部”）}$$

将一个复数与它的共轭复数做乘积运算可分离出幅值信息：

$$zz^* = (a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = a^2 + b^2$$

或

$$zz^* = (c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})(c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}) = c^2$$

1.4.4 除法运算

在直角坐标形式下，我们可以将除法运算通过合理化处理来转换成乘法运算来完成。即：除以一个复数，等于除数和被除数同乘以该复数的共轭形式。根据共轭复数的性质，我们知道，此时分母即可转化为一个完全的实数形式，同时，还将相角信息保留到了分子里的共轭复数中而不致丢失。这个运算过程需要记住。

设

$$z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1,\quad z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2$$

则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{j}y_1}{x_2+\mathrm{j}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{j}y_1)(x_2-\mathrm{j}y_2)}{(x_2+\mathrm{j}y_2)(x_2-\mathrm{j}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+\mathrm{j}(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

如果复数以极坐标的形式给出，除法运算就会很简单。根据指数的运算规则(见表 1.1)，其整个运算过程如下：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{c_1\angle\theta_1}{c_2\angle\theta_2}=\frac{c_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{c_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}=\frac{c_1}{c_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}$$

一个复数除以它的共轭，可得两倍原相角值。

$$\text{若 } z_2=z_1^*\text{，则}\frac{z_1}{z_1^*}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta_1}=1\angle 2\theta_1$$

例 1.3B

当 $z_1=1-\mathrm{j}3$， $z_2=2-\mathrm{j}1$ 时，求 $\frac{z_1z_2}{z_2^*}+z_1^*$ 的值。

解：

因为最后的运算是加 z_1^*，所以，我们在整个运算中选择直角坐标形式：

$$\frac{(1-\mathrm{j}3)(2-\mathrm{j}1)}{2+\mathrm{j}1}+(1+\mathrm{j}3)=\underbrace{\frac{(1-\mathrm{j}3)(2-\mathrm{j}1)^2}{5}}_{\text{合理化处理}}+(1+\mathrm{j}3)$$

$$=\frac{(1-\mathrm{j}3)(3-\mathrm{j}4)}{5}+(1+\mathrm{j}3)=-\frac{9}{5}-\mathrm{j}\frac{13}{5}+\left(\frac{5}{5}+\mathrm{j}\frac{15}{5}\right)$$

$$=-\frac{4}{5}+\mathrm{j}\frac{2}{5}$$

例 1.3C

当 $z_1=1-\mathrm{j}3$， $z_2=2-\mathrm{j}1$ 时，求 $\frac{z_1+z_2^2}{z_2^*}$ 的值。

解：

根据所给的已知条件，可有多种求解途径，考虑到要对 z_2 进行平方运算，我们在对分子进行处理时采用了直角坐标形式(如果要对 z_2 求更高幂次，最好一开始就将其转换到极坐标形式进行求幂运算，然后再转换回直角坐标与 z_1 做和运算)：

$$\frac{z_1+z_2^2}{z_2^*}=\frac{(1-\mathrm{j}3)+(2-\mathrm{j}1)^2}{\sqrt{5}\angle 0.4636}=\frac{(1-\mathrm{j}3)+(3-\mathrm{j}4)}{\sqrt{5}\angle 0.4636}=\frac{4-\mathrm{j}7}{2.236\angle 0.4636}$$

$$=\frac{8.062\angle-1.0517}{2.236\angle 0.4636}=3.606\angle\underbrace{-1.5153}_{-86.82^\circ}$$

本节的每一个数值运算的例子可能都能在计算器上完成，完全不用考虑运算的过程，但是，在处理没有给定具体数值的复变量时，这些运算过程还是很重要的。

1.5 复变函数

在这一节中，我们将接触由复变量多项式组成的函数。复变函数理论是一个复杂的数学研究领域。在这里，我们只涉及它的基础内容。通过本小节的学习，你将能够：

- 描述复变函数的特性
- 准确解释与复变函数相关的问题
- 确定函数的零点和极点
- 用零-极点图来描述函数

一般来说，实函数至多有符号和幅值，这类函数的性质通常是很明确的。我们能够求出实函数对于某个特定值的解，找出它的最大值和最小值。但是，对一个复变函数而言，函数本身通常就比较复杂，所以，认真谨慎地对待复变函数的相关问题是很重要的。复变函数与复数一样，有实部、虚部、幅值和相角，因此，我们的问题也必然明确地涉及到它的这些基本特征。例如，要求函数 F 是否有满足 $F = 1$ 的解，实际上也就是要求：独立变量是否存在一个值，使得 F 实部为 1 的同时虚部为 0。但很明显，这个问题中的 $F = 1$ 并不等同于 $|F| = 1$ 或 $\mathrm{Re}(F)=1$。所以，只有以正确的方式提出问题，才能以正确的方式解决问题。

例 1.4

函数 $F(z) = 6/z$，其中，$z = x + \mathrm{j}y$，比较以下 3 种情况：

(1)$F = 3$；(2)$|F| = 3$；(3)$\mathrm{Re}(F) = 3$。

解：

直角坐标形式的表达式 F 对所有这些情形进行了说明：

$$F(z)=\frac{6}{z}=\frac{6}{x+\mathrm{j}y}=\frac{6(x-\mathrm{j}y)}{x^2+y^2}=\frac{6x}{x^2+y^2}-\mathrm{j}\frac{6y}{x^2+y^2}$$

当 $F = 3$ 时，虚部为 0，这要求 $y = 0$。在这种情况下，$F(z)=\left.\frac{6x}{x^2+y^2}\right|_{y=0}=\frac{6}{x}$。即只有在 $x = 2$，$y = 0$(或者说 $z = 2 + \mathrm{j}0$)时，$F = 3$ 才成立。

由 $F(z)$的表达式可知：当 $x^2 + y^2 = 2x$ 时，$\mathrm{Re}(F)=\frac{6x}{x^2+y^2}=3$。将式子整理成平方和的形式：$(x-1)^2+y^2=1$。显然，这是一个以 $z = 1 + \mathrm{j}0$ 为圆心的单位圆的方程式。在这个圆上，除 $z = 0$ 处 F 没有定义外，其余所有点都满足 $\mathrm{Re}(F)=3$。

最后，我们来求解 $|F|=3$ 的情况。

$$|F(z)|=\left|\frac{6(x-\mathrm{j}y)}{x^2+y^2}\right|=\frac{6|x-\mathrm{j}y|}{x^2+y^2}=\frac{6\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}=3$$

将式子两边同时平方，简化为 $x^2+y^2=4$

这又是一个圆的方程，圆心在 $z = 0$ 处，半径为 2。(你是否还能找到更简单的解法？)