

郑国莱 主编

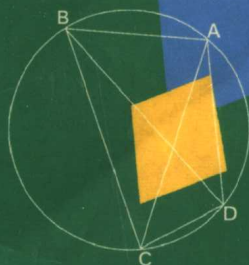
高中数学

疑难解析手册



$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$



上海人民出版社

高中数学

疑难解析手册

郑国荣 主编

上海人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学疑难解析手册/郑国莱主编.

—上海: 上海人民出版社, 2001

ISBN 7-208-03864-3

I. 高... II. 郑... III. 数学课-高中-解题

IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044445 号

特约编辑 关 木

责任编辑 季永桂

封面装帧 赵小卫

高中数学疑难解析手册

郑国莱 主编

世纪出版集团

上海人民出版社出版、发行

(上海福建中路 193 号 邮政编码 200001)

新华书店上海发行所经销

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 787×960 1/32 印张 23.5 插页 4 字数 558,000

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数 1-7,000

ISBN 7-208-03864-3/G·743

定价 31.50 元

编写说明

《高中数学疑难解析手册》根据全国最新的数学学科课程标准和教材使用意见为准,兼顾全国各种版本教材的需要而编写。既适合高一至高三年级日常学习之用,也适合高考复习之用。

《高中数学疑难解析手册》依据中学数学教学实践的体验,在参阅相关数学书刊的基础上,构建了基本的内容框架,筛选出了主要的疑难板块:“认知专题疑难解析”、“解题思想疑难解析”与“重要题型疑难解析”3篇,并以精讲的模式,将知识点、知识块组编成共28讲的体系。每一讲一般包含有概念讲解、范例剖析、评注点拨与巩固练习,以帮助读者掌握重点、驾驭要点、释解疑点、攻克难点。

《高中数学疑难解析手册》凝聚了著名重点中学的骨干教师和把关教师教学经验的精华,荟萃了适量的典题范例,是一部突出工具性能的教学辅导读物。对提高高中生的数学学习水平与数学解题能力,将会有很好的指导作用。

2001年6月

目 录

怎样学好数学	1
--------------	---

第一篇 认知专题疑难解析篇

第一讲 集合的概念与应用	45
第二讲 形式逻辑基本知识及其应用	62
第三讲 映射概念及其应用	76
第四讲 求函数定义域、值域的思路与方法	101
第五讲 证明不等式的方法与技巧	130
第六讲 数列求和方法	156
第七讲 排组应用题的求解规律	179
第八讲 复数的具体应用	203
第九讲 三角恒等变换的常用技巧	223
第十讲 三角条件恒等式的证明与技巧	241
第十一讲 反三角函数及其应用	261
第十二讲 三角方程增减根论析	277
第十三讲 空间角距问题的求解	297
第十四讲 立体几何翻折问题的解法	320
第十五讲 几何体截面及其应用	334
第十六讲 圆锥曲线的定义及其应用	358
第十七讲 解析几何对称问题的求解思路	374
第十八讲 轨迹方程的求法与技巧	392
第十九讲 极坐标及其应用	416
第二十讲 中学数学最值问题综论	435
第二十一讲 概率的具体应用	467

第二十二讲	定积分的主要应用	487
-------	----------------	-----

第二篇 解题思想疑难解析篇

第一讲	分类思想及其应用	506
第二讲	构造思想及其应用	526
第三讲	参数思想及其应用	554

第三篇 重要题型疑难解析篇

第一讲	求解应用题的思路与型式	595
第二讲	求解探索题的思路与型式	628
第三讲	求解综合题的思路与技巧	664

解 答	691
-----------	-----

怎样学好数学

学好数学是每一个学生的真切愿望。然而，学好数学单有愿望是不够的，更重要的是要有切实行动、坚强意志与进取精神。这些素质的养成，则与学生自身的认识水平、学习素养、引申能力有关。为此，下面我们就“提高认识”、“加强学习”与“努力引申”这三个问题作些探讨，欲能起到抛砖引玉的作用。

一、提高认识

思想是行动的指南，认识是实践的先导，围绕学好数学这个主题，要正确认识以下两个问题：

1. 根本动因的辩证关系

学好数学的因素很多，但大致可分为主观因素和客观因素两大类。这两类因素，事实上存在着科学的辩证关系。按照哲学原理，主观因素是内因，客观因素是外因；内因是事物发展、变化的根据，外因则是事物发展、变化的条件，根据起主要的决定作用，条件仅起次要的辅助作用。毛泽东同志说过：“事物发展的根本原因，不是在事物的外部而是在事物的内部，在于事物内部的矛盾性。任何事物内部都有这种矛盾性，因此引起了事物的运动和发展。事物内部的这种矛盾性是事物发展的根本原因，一事物和他事物的互相联系和互相影响则是事物发展的第二位的原因。”然而，唯物辩证法并不否认外因的作用，而且承认在一定情况下它还会起决定作用。例如鸡蛋虽然有变为小鸡的根据，但要真正变成小鸡，还必须有适当的温度。当然，一块石头——不是鸡蛋，温度再适当，也是无论如何变不成小鸡的。显然，外因

是不能脱离内因去任意决定事物发展的,它必须通过内因才能起作用,而且外因在起作用的时候,所以能把事物的发展引导到某个方向,归根到底还是由于事物本身有向那个方向发展的可能性.实际告诉我们,根据是不能创造的,条件却是可以创造的.当然创造条件也不是任意的,而是要根据条件本身的规律性.只要摸到事物的规律性,我们就可以把握事物发展的根据,创造事物发展的条件,充分发挥主观能动作用,变不利条件为有利条件,来加速事物的发展过程.

根据以上的论述,一个人要学好数学的内因根据应是自身的内在矛盾性,实际上就是人的进取活力与退缩阻力的矛盾.人的进取活力,主要表现在:有进取的愿望,有进取的目标,有进取的努力,有进取的坚毅,有进取的反思,有进取的调整,有进取的深化,有进取的升华.不进则退,不思进则缩.退缩的阻力,主要表现在:安于现状的满足,怕苦怕累的情性,缺乏毅力的懈怠,思维劳动的粗放,不良习惯的束缚,学习方法的陈旧,自我剖析的不力,革新意识的淡薄.显然,进取活力大于退缩阻力,一个人便会向学好数学的方向发展,反之,则难以摆脱学不好数学的困境.

有的学生认为,自己没有学好数学是因为自己的学校或老师不理想.在他看来,只要能在好的学校里学或者有好的老师教,自己就一定能学好数学.其实,这种认识是片面的,好的学校或者好的老师,只是为学好数学营造了一定的外部条件,它通过自身努力会收到较好的学习效果,但并非学好数学的“保险箱”.如果你自身不努力,没有好的学习方法,再好的学校或者老师,也是无法学好数学的.事实上,在好的学校或者在好老师所教的班里,不是也有一些数学没有学好的学生吗?同样,在非重点中学或者一般老师所教的班里,不是也会出现数学尖子学生吗?正确的认识应当是,一个人只要具有进取的活力——具备内因根据,再有

好的学校或老师——外因条件,学好数学才会有保证;即使不具备这个外因条件,也会通过发挥自身的主观能动性,去创造适宜的外因条件来加以弥补,或者平时多求教老师,或者随时多求教数学学得较好的同学,或者多自学好的数学读物,等等.这样也是能学好数学的.

2. 认知结构的变化规律

正确认识中学生在数学方面的认知结构的内容及其发展变化过程,对学好数学颇有裨益.

中学数学内容自成一套相对严密的知识结构.学生学习数学的时候,总要结合自己的感觉、知觉、记忆、思维、联想等认知特点,按照自己理解的深度和广度去理解、接受新信息,获取新知识.对同样的数学知识和同等的课堂条件,不同的学生在接受和掌握程度上会出现明显差异,其中原因虽然是多方面的,但是和学生相应的心理结构息息相关.一个学生的数学基础和相应的心理结构密切配合,相互作用,构成了这个学生的达到某种水平的数学认知结构.而学生的学习过程实质是认知结构的发展变化的过程,即从原有认知结构逐步发展成为新的认知结构的过程.因此,分析和掌握学生的认知过程的发展变化规律,对提高学生学习质量关系十分密切.例如,一般学生学习《数列极限》的概念及其定义时普遍存在一定困难.原因在于这个概念的产生及其定义的建立与学生头脑中已有的一些概念及其定义方式差别甚大.以往学生认识数学对象,相对来说属于静态认识范畴,而数列极限的涵义需要通过一套动态过程来刻画.然而,只要学生在教师的指导下对本身已有认知结构作某些改造,产生从“不动”到“动”的认知飞跃.经历了这样一个“过程”,学生的知识结构和心理结构就有可能达到一个新水平,学习任务也随之顺利完成.

学生数学认知结构的变化一般分为三个阶段,即输入吸纳阶段、相互作用阶段和巩固发展阶段.认识并掌握三个

阶段的发展规律,对于学生显然是十分重要的。

(1) 输入吸纳阶段. 输入吸纳总是在一定环境下进行的,良好的学习动机是促进学生学好数学的重要条件. 而学习动机中最现实、最活跃的成分是学习兴趣(即求知欲). 有兴趣的学习不仅能使学生全神贯注、积极思考,甚至会达到废寝忘食的地步,而且在满怀兴趣的状态下所学习的一切,常常能掌握得迅速、深刻而牢固;在相反状态下,学习缺乏积极思维的配合,就容易产生概念不清、理解不深、掌握不牢和运用不活等种种弊病。

输入吸纳的一条原则是“力所能及”. 力所能及,一是指原有知识水平是否足够提供萌发基础;二是心理水平是否具有足够承受能力. 对于学生来说,脱离自己的实际,好高骛远,则是不足取的。

(2) 相互作用阶段. 这个阶段是输入新学习内容之后和学生原有的数学认知结构产生相互作用. 例如,高一年级学生初学立体几何,当输入“两直线的三种位置关系”之后,学生对异面直线有了初步认识,但是异面直线位置关系并不马上被学生原有认知结构完全认可,学生头脑中狭隘的平面观念常常会自然地、固执地把一些点、线图形纳入同一平面范畴,因而诸如“直线 a 、 b 分别和直线 c 垂直时,直线 a 平行直线 b ”等错误层出不穷. 原因在于:当新内容与原有认知结构相一致的情况下,新内容比较容易地被纳入原有认知结构而实行同化,进而融化为新的整体;当新内容与原有认知结构不一致时,学生必须对自己头脑中原有知识结构进行相应调整,才有可能建立起新的认知结构,而一旦新的认知结构形成,我们才可以认为理解并掌握了新的学习内容,这时学生的总体认识水平也同步获得提高。

(3) 巩固发展阶段. 新内容和原有数学认知结构相互作用的结果产生新的数学认知结构,但要使它巩固、完善乃至成为新发展的良好起点,必须通过有效练习. 这里,经验的

学习,技能的训练,思维的活动是主要环节,而融化、探索和创造是这个阶段的主要目标.通过一系列有效训练,新的认知结构从“产生”过渡到“形成”,并在练习过程中获得“巩固和发展”,表现出学生具有相应的能力,并能够顺利地把有关方法和知识运用到实际中去.据此,学生要努力使自己的认知结构能够顺利地获得发展.

二、加强学习

什么是学习?从字面上讲,学是指获得知识或行为经验,习是指温习、实习与练习.学习是学、思、习、行的总称.从心理学角度分析,学习是涉及人脑中发生的心理现象的一种复杂的过程.

显然,学习是增长知识与才干的源泉.从无知到有知,从知之甚少到知之甚多,只能依赖于学习.学好数学也必须依仗于学习,通过不断地学习,提高知识的精深、宽广程度,增强技能的熟练、灵巧程度,发展智慧的聪颖、敏锐程度,推进能力的强化、拓宽程度.

学习是学习者经过一定训练之后出现的某种变化.这种变化是复杂的,有运动的、情感的、认知的;这种变化的心理机制是多样的,有条件反射的、尝试错误的、观察模仿的、突觉顿悟的.引起这些变化的原因,有学习情景的因素,也有学习者自身的因素等.

围绕学好数学这个主题,实践加强学习必须重视以下两个问题:

1. 学习渠道的不断宽泛

人的学习渠道是相当宽泛的,一切可交流的人事、情境都是学习渠道.古人有“三人行必有吾师”的至理名言,其意是要求人必须谦虚谨慎、虚怀若谷.而今是信息时代,人们更应深谙海纳一切有利信息的道理.

有的学生往往把学习渠道局限于课堂学习或者教师的授课活动;更有甚者,有的学生连上述渠道都不珍惜,上课

不认真听讲,做作业草率马虎.这种狭隘的学习渠道观,限制了学习者的视野,扭曲了学习者的心态,使不少有用信息在有利的情景中白白地流失.

综观数学尖子的学习实际,他们都有“乐于学习,善于学习”的特点.他们热爱学习,无论是听课、作业,还是看书、应试,不仅认真、投入,而且用心、动脑;他们虚心求师,无论是老师、同学,还是教材、读物,只要有可取之处、有过己之长,都予以采纳、吸收,因而才会成为超越众人的“巨子”.

2. 学习素质的全面提高

有相当数量的学生对数学课程是喜爱的,学习也是努力的.但用他们自己的话来说:“我听课时仔细认真,笔记全,课外练习也多,但不知为什么,学习效率总是提不高?”从他们十分羡慕班上那些聪明学生反应快、成绩好的神情上,反映出他们具有一股提高数学学习效率的迫切要求.这里,我们向这些学生提出一个问题:“你的学习立足点是在素质上加强自己呢?还是在‘类型’的道路上来回奔波?”如果是前者,坚持不懈努力,总会有成功的一天.否则,建议你在思想上进行反思,彻底改变原有学习方法.学习过程中,为了有利于自己掌握知识、技能,必需重视‘类型’的更新.因为新知识必须建立在旧知识的基础上,复杂的、高一级的问题的解决办法,通常也要建立在简单的、低一级问题的解决的基础上.因此,把一些情况相似的问题(指条件相似的问题或者方法类同的问题)归结成一类,不但有利而且很有必要.但是,如果一个学生把自己的精力、重点仅仅放在已有‘类型’的记忆和运用上,就是上述的“在‘类型’的道路上来回奔波”,结果使自己只会依样画葫芦,充其量做到照搬不误.其最大恶果还在于自己压抑了自身聪明才智的发挥和发展.相反地,如果一名学生在学习数学知识的过程中,把学习掌握与之相关联的学习、思考方法放在重要位置上,那么他的“学习立足点是在素质上加强自己”.结果自己的吸取、消化

能力和解决实际问题的能力不断提高,因此,总有一天自己也会变得聪明起来。

全面的学习素质反映为一系列的基本能力:阅读能力,记忆能力,识别能力,思维能力,运算能力,论证能力,动手能力与表达能力等。而这些能力的提高,又集中体现在以下四个复合能力(它们既互有关联又相对区别)上:

(1) 解析能力. 有些学生认为,提高解题能力的途径是多做数学题. 这种看法有失偏颇. 平日学生能自觉多做一些数学练习题固然很好,但关键是要重视掌握好分析和综合的基本思维方法,习惯于把问题的条件和结论沟通起来,把面临的信息和头脑中已有的旧知识沟通起来,并能随时调用现时所需要的旧知识。“分析”是由果溯因的思维方法,“综合”是由因导果的思维方法,两者都是上述各类“沟通”的有效武器. 我们提倡,拿到一道数学题不要急于追求结果,而应先作一番分析. 这是因为解题时每个人不可能经常处于“灵机一动,计上心来”的最佳状态,解题方法的选定一般都孕育于分析之中. 想要解决命题 A , 经过分析需要解决命题 B , 而解决命题 B , 经分析需要解决命题 C , …… 接连产生的一系列命题 B 、 C …… 向学生头脑发出联想信息, 如果恰好与自己已有知识、经验吻合, 那么在新命题解决以后, 原命题 A 也就会迎刃而解. 例如, 对于命题“三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱长分别为 a 、 b 、 c , 相邻两条侧棱所在射线所成角分别为 α 、 β 、 γ , 且

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

$$1 + \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta,$$

求证:三棱锥中必有一个侧面垂直于底面”,粗看似乎难以找到解决途径,但是分析一下:要证明某一侧面垂直于底面,只要证明某一侧面中存在一条直线垂直于底面. 此时获得的新信息与我们头脑中的知识库还很难挂上钩. 于是,我们不妨继续进行交叉的分析与综合,由条件

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

可得到

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0, a = b = c.$$

这时可以判断出三棱锥顶点 S 在底面内的射影是底面 $\triangle abc$ 的外心, 于是再进一层的分析结果是: 只要证明底面是直角三角形就可以了. 经过分析和综合(主要是分析方法)找到了本题总的解题途径. 剩下, 只要由

$$1 + \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta \text{ 及 } a = b = c$$

去推断我们原先的设想即可, 它不难运用一小段综合推理进行解决.

有些学生认为, 探求解题途径用分析法, 着手解题表达用综合法. 这种设想虽好, 但是实际上分析探求与综合解题之间难以截然分开, 往往混合进行, 这样做可以省时省力切实解决问题. 这好比到你到某新村拜访一位朋友, 尽管主人详尽地给你介绍路径, 终因地形雷同, 寻找颇为困难, 但是热情的主人走出数步, 常能很快迎到来访客人. 这和综合、分析结合探求解题途径有异曲同工之妙. 当然, 单独运用综合法或者单纯运用分析法探求和解题也是允许的. 但是, 用分析法解题时, 经分析所得的每一个新结论要保证先前那个旧结论能充分成立. 有些学生喜滋滋地介绍解题窍门: “解题过程中, 一旦山穷水尽时, 最好去寻找一下还有哪些已知数学条件尚未被运用, 这些条件往往是最终解决问题的突破口.” 这个经验当然很有实用价值, 但我们还是力求多打“主动”仗, 一开始就把命题的条件和结论全面琢磨, 养成良好习惯. 只有这样, 我们的分析思维能力和综合思维能力才有可能扎扎实实地提高起来.

(2) 洞察能力. 学生不应成为被动的知识接受者, 要争取成为具有较强的数学洞察能力的主动探索者. 面临一大堆“信息”, 要敢于和善于观察、归纳、概括、猜想, 从中看出固有现象或规律. 而发展这些能力的关键是学会“比较”的本

领. 例如, 在反三角函数一章中, 出现了一系列恒等式:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

等. 像课本那样就事论事地证明这些恒等式固然重要, 但是这些规律是怎样被发现的呢? 这类探索过程对学生应当说很有吸引力和锻炼价值. 以关系式

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

为例, 当研究反余弦函数性质的时候, 因为反余弦函数图象不关于 y 轴对称, 所以它不是一个偶函数; 它的图象是 $[-1, 1]$ 上的连续曲线, 然而它不经过原点, 因而它也不是一个奇函数. 但是我们并不因此打上“休止符”, 而是稍稍放开思路, 把同它“差不多”的反正弦函数图象作一些比较, 从而可以发现, 反余弦函数之所以不能像反正弦函数那样成为一个奇函数, 问题在于图象位置稍稍高了些. 在此“联系、比较”的基础上, 如能大胆地将反余弦函数图象向下平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 所获得的新函数

$$y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$$

的图象就关于原点对称并为奇函数. 经过“图象运动”而产生的猜想, 用数学符号反映出来就是

$$\arccos(-x) - \frac{\pi}{2} = -\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right),$$

也即课本中的求证不等式:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

学生面对具体题目茫然不知所措的现象是经常会发生的, 这就说明有些学生的主要问题仍是不会分析和比较. 因此, 学习中掌握住分析和比较的本领 (尤其是比较本领), 就有可能从根本上提高进行因式分解的水平. 以分解因式:

$$x^4 - 2x^2y - 3y^2 + 8y - 4$$

为例,就应力求做到既能与现成的基本类型作直接比较,又能对形式稍作变换,再与基本类型作对照比较,集中领会核心在于选“元”.有的学生说把 x 看成系数字母后,原式是一个关于 y 的二次三项式;有的说把 x^2 看成新元后,原式可被看成关于 x^2 的二次三项式;很多学生认为可以看成关于 x^2 和 y 的二元二次式;也有学生提出稍作分组后,符合某乘法公式形状.每个学生都在搜索头脑中已熟悉的各种基本“类型”,进行各种直接或间接的比较对照,从而获得一定的结果.作为一名优秀学生不仅要很好观察比较,而且要在同班同学的议论过程中自觉归纳一下各种方法的总实质——降为一元或二元的二次式.着眼于在不变(题目不变)中找变(从不同的角度对照、比较,从而找出不同的解题途径),又能通过对问题不同的处理方法的比较归纳,从变化着的东西中学习不变的东西,使自己的思维进入较高阶段.

“比较”是归纳、概括的基础.学生在整个中学学习阶段要时刻注意养成“比较”的习惯和本领,并且去粗取精、去伪存真,那么在学习新概念、理解新方法、解决新问题时都能抓住本质,且能灵活地解决问题.

(3) 化归能力.化归是中学数学学习过程中经常运用的一种有效手段.根据已有认知结构,将一些数学问题转化为有足够基础解决的另一一些数学问题.这种转化主题的学习方法称为化归方法.善于化归的学生不仅经常会“逢凶化吉”、“柳暗花明又一村”,而且学习起点和总体认识水平比其他同学往往略高一筹.1989年全国高考数学卷中第(22)题:已知 $a > 1$ 且 $a \neq 1$,求使方程

$$\log_a(x-k) = \log_a^2(x^2 - a^2)$$

有解的 k 的取值范围.一种解法是化归为方程 $(x-k)^2 = x^2 - a^2$,但这个方程含有参数 k ,最后需检验满足不等式

$$x-k > 0 (x^2 - a^2 > 0).$$

如果我们考虑到已经掌握的有关曲线知识,构造函数 $y = x - k$ 和函数 $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, 问题可以化归为求在 x 轴上方的等边双曲线部分与斜率为 1 的直线系具有公共点的条件. 上述两种解法都是典型的化归方法. 其中第二种解法运用数形结合, 把代数问题化为几何问题, 再把所获几何解答反演回代数领域而获得最终解答.

一般地说, 化归方法就是通过分析、联系, 对命题条件或者命题结构进行适当变换, 达到转化为自己已经掌握的问题的基点上. 例如, 把某一个具体问题化归为求某一函数的最大值、化归为解某一不等式组等等. 综观人类认识世界, 总是由简到繁, 由低级到高级, 化归思想早已成为人们的宝贵财富. 学生在整个学习过程中, 应当充分重视化归训练, 以使自己能一眼看透数学问题的本质, 并不断增强自己的“随机应变”能力.

实际经验告诉我们, 换元法和消元法在命题化归过程中有着不可估量的重要作用. 几何课程中, 面积、体积、线段、角之间的数量关系变换, 常令学生赞叹数学内在之美并被利用为化归的一种具体手段. 对此, 重视知识的积累是很重要的.

(4) 攻难能力. 攻难能力是指攻克难题的能力. 难题大致是一些复杂的数学问题或者是一些抽象的数学问题.

中学生对于特殊条件下的一些数学问题, 经过通常的分析、综合推理过程, 往往可以获得比较满意的结果. 但是对于一般化条件或一般化形式出现的数学问题常常束手无策, 不知从何下手. 解决这个难点, 大致有如下办法:

1) 学会“一般”和“特殊”相互转化的学习方法. 先把一般形式的问题, 取特殊情形, 化繁为简, 找出适当的解决办法, 然后再对一般形式问题研究解决办法. 很多情形下, 简化后问题的解决办法恰好就是繁杂的一般形式的数学问题的解决办法. 这种处理方法就是“解剖麻雀”的研究方法. 麻雀虽小, 五脏俱全, 剖开了一只小麻雀, 往往能够解开若干