第二次修订

◎北京创新教学与考试研究中心成果◎

教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI QUANJIE

总主编／薛金星

高二数学(上)

陕西人民教育出版社

敬告读者

《中学教材全解》系列丛书由薛金星先生策划并领衔撰写，为北京创新教学与考试研究中心的最新研究成果。这套丛书在整体策划上全面体现创新教育思想，从最初的创意、教学中的试验、教学成果的整理编写，到最后出版，一直秉承“教学研究，来自于教学，服务于读者”的优良品质。作者值此出版之际向全国千百万读者深表谢意！

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心本着为读者服务和负责的精神，及时帮您排忧解难，与您共同切磋，共同研究。

作者声明：《中学教材全解》系列丛书为北京创新教学与考试研究中心的专项研究成果，已经注册，请认准注册商标，谨防假冒。凡其它以《中学教材全解》和“薛金星”主编名誉出版的任何版本，均为侵权行为。

作者声明：保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版本书的个人和单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。来信请寄北京安贞邮局69号信箱薛金星收。邮编：100029。联系电话：(010) 64899718。

《中学教材全解》系列丛书编委会

再版前言

《中学教材全解》系列丛书为北京创新教学与考试研究中心的专项研究成果。我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其它同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸，逐次深入。其三是题型（材料）新。书中选用题型（材料）都是按中考、高考要求精心设计挑选，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，巧设问题，精讲精练，使学生举一反三，触类旁通。其次是练习配置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识"点"与"面"的联系，"教"与"学"的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，学习内容全有"的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书首期即面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学生多学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划到编写，再到出版精心设计，细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星

2001年6月于北师大

目　录

第七章　直线和圆的方程

教材全解

第六章

不等式

本章综合解说

本章主要内容包括不等式的性质；不等式的证明；不等式的解法。

一、学习本章内容要求

1. 掌握不等式的性质及证明，性质要记准、记熟、灵活的加以应用。

2. 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理，并能准确、灵活的应用其解题。

3. 掌握有关不等式的解法。作到熟、准、快。

4. 掌握绝对值不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

二、学习过程中须注意的几点

1. 要注意与一元一次不等式、一元二次不等式、方程、函数等知识的联系，以便对不等式知识有一个全面、完整的了解与认识。

2. 注意对不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的理解、记忆，正确、灵活使用其解决问题，尤其是在正确的使用上下功夫。

3. 本章的重点内容是证明不等式。证明不等式没有固定的模式可以套用，它的方法灵活多变、技巧性强，综合性强。要处理好不等式的证明必须注意：

(1)熟练的掌握不等式的基本性质；重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及定理 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

(2)扎实的掌握不等式证明的比较法、综合法、分析法及有关方法。

(3)注意与其它知识联系和综合运用。

(4)不断地总结证明不等式的规律和技巧，不断地从正反两方面汲取解题的经验和教训。

4. 强化不等式的应用。历届高考中除单独考查不等式的试题外，常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用的问题中，涉及不等式的知识，因此在学习过程中一定要提高应用意识，不断地总结不等式的应用规律，努力提高分析和解决问题的能力。

5. 在学习过程中加强等价转化思想的训练，解不等式的过程就是等价转化过程。加强化归思想的提高，证明不等式过程就是一系列的化归过程。加强分类讨论思想的学习与形成，会分析引起分类讨论的原因，做到合理分类，不重不漏。

第一节　不等式的性质

本节基础知识框图表解

- 不等式
  - 两个实数 a、b 间的关系：$a>b$，$a=b$，$a<b$ 三者必居其一
  - 同向或异向不等式的概念
  - 条件不等式与绝对不等式的概念
  - 实数比较大小的方法
    - $a-b>0\Leftrightarrow a>b$
    - $a-b=0\Leftrightarrow a=b$
    - $a-b<0\Leftrightarrow a<b$
  - 不等式的性质
    - $a>b\Leftrightarrow b<a$
    - $a>b,b>c\Rightarrow a>c$
    - $a>b\Rightarrow a+c>b+c$
      - $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$
    - $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$
      - $a>b>0$，$c>d>0$ $\Rightarrow ac>bd$
      - $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$，$n\in N_+$
    - $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，$n\in N_+$ 且 $n>1$
    - 不等式性质的运用

基础知识详解与要点点拨

1. 不等式有关概念

(1)不等式定义

用不等号（$<$、$>$、$\leqslant$、$\geqslant$、$\neq$）表示的不等关系的式子叫不等式. 记作 $f(x)>g(x)$，$f(x)\geqslant g(x)$ 等等. 用“$<$”或“$>$”号连结的不等式叫严格不等式；用“$\leqslant$”或“$\geqslant$”号连结的不等式叫非严格不等式.

(2)同向不等式、异向不等式.

对于两个不等式，如果每一个的左边都大于右边，或每一个的左边都小于右边，这样的两个不等式叫同向不等式. 如 $f(x)>g(x)$ 与 $S(x)>T(x)$ 是同向不等式，$f(x)\leqslant g(x)$ 与 $S(x)\leqslant T(x)$ 也是同向不等式.

对于两个不等式如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那么这两个不等式叫异向不等式. 如 $f(x)>g(x)$ 与 $S(x)<T(x)$ 是异向不等式，$f(x)\leqslant g(x)$ 与 $S(x)\geqslant T(x)$ 也是异向不等式.

(3)绝对不等式、条件不等式、矛盾不等式.

①绝对不等式:如果不论用什么实数代替不等式中的字母它都能够成立,这样的不等式叫绝对不等式.

②条件不等式:如果只有用某些范围内的实数代替不等式中的字母它才能够成立,这样的不等式叫条件不等式.

③矛盾不等式:如果不论用什么样的实数值代替不等式中的字母,不等式都不能成立,这样的不等式叫矛盾不等式.

如:$a+8>a+1$,$a^2>-1$ 为绝对不等式;$3x+5<2x+6$ 为条件不等式(只有当 $x<1$ 时不等式才能成立);$a^2<-6$ 称为矛盾不等式.

(4)关于 $a\leqslant b$ 或 $a\geqslant b$ 的含义

$a<b$ 或 $a>b$ 表示严格不等式;

$a\leqslant b$ 或 $a\geqslant b$ 表示非严格不等式;

不等式 $a\leqslant b$ 应读作"a 小于或者等于 b",其含义是指"或者 $a<b$,或者 $a=b$"等价于"a 不大于 b",即若 $a<b$ 或 $a=b$ 之中,有一个正确,则 $a\leqslant b$ 正确.

不等式 $a\geqslant b$ 应读作"a 大于或者等于 b",其含义是指"或者 $a>b$,或者 $a=b$",等价于"a 不小于 b",即若 $a>b$ 或者 $a=b$ 之中,有一个正确,则 $a\geqslant b$ 正确.

2. 实数比较大小的依据与方法

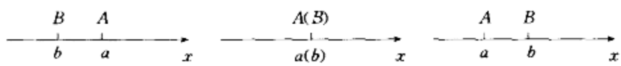
(1)实数的两个特征

①任意实数的平方不小于 0,即 $a\in R\Leftrightarrow a^2\geqslant 0$.

②任意两个实数都可以比较大小,反之,可以比较大小的两个数一定是实数.

(2)实数比较大小的依据和方法

①实数比较大小的依据:在数轴上不同的点 A 与点 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b,右边的点表示的数比左边的点表示的数大,从实数减法在数轴上的表示(如图),可以看出 a,b 之间具有以下性质:



如果 $a-b$ 是正数,那么 $a>b$;如果 $a-b$ 是负数,那么 $a<b$;如果 $a-b$ 等于零,那么 $a=b$. 反之也成立,就是

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

上面等价符号的左式反映的实数运算性质,右式反映则是实数大小的顺序,合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是不等式这一章的理论基石,是不等式性质的证明,证明不等式和解不等式的主要依据.

同时应认识到,比较两个实数 a 与 b 的大小,须归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意:指差的符号,至于差的值究竟是什么,并无关紧要),而符号的确定又必然归结到实数运算的符号法则,因此,实数运算的符号法则是学习不等

式的基础.

②实数比较大小的基本方法举例

例 1　比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

解：　$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$

$=-7<0$,

$\therefore (a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

例 2　已知 $x\neq 0$,比较$(x^2+1)^2$与 x^4+x^2+1 的大小.

解：　$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1=x^2$.

由 $x\neq 0$,得 $x^2>0$,从而$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

注意：比较两个实数的大小,基本方法是作差,对差的正、负或零做出判断,得出结论.

3. 不等式的性质及其推导

利用比较实数大小的方法,可以推出下列不等式的性质.

定理 1　如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$.

证明：$\because a>b$, $\therefore a-b>0$.

由正数的相反数是负数,得$-(a-b)<0$,

即 $b-a<0$, $\therefore b<a$.

(定理 1 的后半部分请同学们自证.)

定理 1 说明,把不等式的左边和右边交换,所得不等式与原不等式异向.

定理 2　如果 $a>b$,且 $b>c$,那么 $a>c$

证明：$\because a>b, b>c$, $\therefore a-b>0, b-c>0$.

根据两个正数的和仍是正数,得$(a-b)+(b-c)>0$,

$a-c>0$, $\therefore a>c$.

根据定理 1,定理 2 还可以表示为：

如果 $c<b$,且 $b<a$,那么 $c<a$.

定理 3　如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

证明：$\because (a+c)-(b+c)=a-b>0$,

$\therefore a+c>b+c$.

定理 3 说明,不等式的两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向.

注意：定理 3 是不等式移项法则的基础.

利用定理 3 可以得出：

如果 $a+b>c$,那么 $a>c-b$.

也就是说,不等式中任何一项改变符号后,可以把它从一边移到另一边.

推论　如果 $a>b$,且 $c>d$,那么 $a+c>b+d$.

证明：$\because a>b$, $\therefore a+c>b+c$.　①

$\because c>d$, $\therefore b+c>b+d$.　②

由①、②得　$a+c>b+d$.

很明显,这一推论可以推广到任意有限个同向不等式两边分别相加.这就是说,两个或者更多个同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同

向.

注意：定理 3 的推论是同向不等式相加法则的依据，它是连续两次运用定理 3 然后再利用定理 2 证出的.

但两个同向不等式的两边同时相减时，却不能得到一般性结论，这一点要十分注意.

还要清楚定理 3 的逆命题也是正确的. 在不等式推理过程中，两边同时消去相同数正是基于此.

定理 4　如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$.

证明：$ac-bc=(a-b)c$.

$\because a>b$，$\therefore a-b>0$.

根据同号相乘得正，异号相乘得负，得当 $c>0$ 时，$(a-b)c>0$，即

$ac>bc$；

当 $c<0$ 时，$(a-b)c<0$，即 $ac<bc$.

由定理 4，又可以得到：

推论 1　如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$.

很明显，这一推论可以推广到任意有限个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘. 这就是说，两个或者更多个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 由此，我们还可以得到：

推论 2　如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$($n\in N$，且 $n>1$).

注意：(1)定理证明过程中的关键步骤是根据"同号相乘得正，异号相乘得负"的符号法则来完成的.

(2)一定要十分关注定理中 c 的符号，因为 c 的符号不同，结论截然不同.

(3)定理和推论中的 a 和 b 可以是实数，可以是式子.

(4)对于定理 4 推论 1，要注意到所有字母都是正数. 如果仅有 $a>b$，$c>d$(而不是 $a>b>0$，$c>d>0$)，就推不出 $ac>bd$ 的结论；同时，由两个异号不等式，例如 $a>b>0$，$0>c>d$ 也推不出 $ac>bd$ 的结论.

(5)对于定理 4 的推论 2，要注意 n 为大于 1 的正整数这一条件，例如 $a>b>0$，$n=-1$ 时，$a^{-1}>b^{-1}$是不成立的.

定理 5　如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in N$，且 $n>1$).

我们用反证法来证明.

证明：假定 $\sqrt[n]{a}$ 不大于 $\sqrt[n]{b}$，这有两种情况，或者 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或者 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

由推论 2 和定理 1，当 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 时，有 $a<b$；

当 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 时，有 $a=b$.

这些都同已知条件 $a>b>0$ 矛盾.

所以 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

注意：(1)定理 5 的证明运用的是反证法，因为反面有两种情况，即 $\sqrt[n]{a}<$

$\sqrt[n]{b}$ 和 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，不能仅仅否定 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，还必须否定 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，才算"归谬"完了，即"穷举"完了才可.

(2)由定理 4 的推论 2 和定理 5 结合起来，可以把这一性质推广到正有理数幂的情形，即若 $a>b>0$，S 为正有理数，则有 $a^S>b^S$.

为了系统掌握不等式性质，将上面五个定理及三个推论整理如下：

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性)

(2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性)

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$(可加性)

(4)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

(5)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

(7)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$($n$ 是大于 1 的整数).

(8)$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0$($n$ 是大于 1 的整数)

4.要注意不等式的性质和等式的性质进行比较

不等式性质与等式性质的不同点主要发生在与数相乘(或相除)时，不等式两边所乘(或除)的数符号不同，结论则不同；而等式则不然.

典型例题解析与规律、方法、技巧总结

(一)作差法比较实数大小.

例 1　比较当 $a\neq 0$ 时，$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小.

解： $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]$

$=-a^2$

$\because a\neq 0$，$\therefore -a^2<0$.

$\therefore (a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

小结：比较两个式子的大小，可归结为判断它们差的符号，至于差的数值是多少，并无关紧要，重要的是差的符号.

例 2　比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小，其中 $x\in R$

解： $(x^2+3)-3x=x^2-3x+3$

$=\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$

$\therefore x^2+3>3x$

注意：本题判断差的符号是通过配方法实现的.

例 3　比较$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$与 2 的大小($n\neq 0$)

解:设$a=\frac{n}{\sqrt{6}}$,则

$$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3=(a+1)^3-(a-1)^3$$
$$=(a^3+3a^2+3a+1)-(a^3-3a^2+3a-1)$$
$$=6a^2+2=n^2+2$$

$\therefore\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3-2=n^2$

$\because n\neq 0$,$\therefore n^2>0$

$\therefore\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3>2.$

小结:本题施用了代换$\frac{n}{\sqrt{6}}=a$,先对代数式$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$进行化简,然后作差,从而简化了问题的解答过程.

类似本题,如果给出的两个数(或式)比较复杂,可先行化简再作差比较,这样可简化问题解答过程,使问题解得简单、明了.

例 4　比较x^6+1与x^4+x^2的大小,其中$x\in R$

解:　$(x^6+1)-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1$

$=x^4(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(x^4-1)$

$=(x^2-1)(x^2-1)(x^2+1)=(x^2-1)^2(x^2+1)$

$\therefore$当$x=\pm 1$时,$x^6+1=x^4+x^2$;

当$x\neq\pm 1$时,$x^6+1>x^4+x^2$.

注意:(1)本题判断差的符号是通过因式分解的方法实现的.

(2)本题最后定号,须进行分类讨论.

小结:(1)由例 1,例 2,例 3,例 4 可以看到实数比较大小的依据是:

①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$

②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

(2)两个实数比较大小,通常用作差法来进行,其一般步骤是:

第一步:作差;

第二步:变形,常采用配方,因式分解等恒等变形手段,将"差"化成"积";

第三步:定号,就是确定是大于 0,还是等于 0,还是小于 0.

最后得结论.

概括为"三步,一结论",这里的"变形"一步最为关键.

例 5　已知a、b为正实数,试比较$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小.