

**A
First
Course
in
Mathematical
Modeling**

(Third Edition)

数学建模

(原书第3版)

Frank R. Giordano
(美) Maurice D. Weir 著
William P. Fox

叶其孝 姜启源 等译



机械工业出版社
China Machine Press

4



A
First
Course
in
Mathematical
Modeling

(Third Edition)

数学建模 (原书第3版)

Frank R. Giordano
(美) Maurice D. Weir 著
William P. Fox

叶其孝 姜启源 等译



SAY48/03

本书旨在指导学生初步掌握数学建模的思想和方法,共分两大部分:离散建模和连续建模.本书对于用到的数学知识力求深入浅出,涉及的应用领域相当广范,适合作为高等院校相关专业的数学建模教材和参考书.也可作为参加国内外数学建模竞赛的指导用书.

Frank R. Giordano, Maurice D. Weir, William P. Fox
A First Course in Mathematical Modeling, Third Edition
EISBN: 0-534-38428-5

Copyright © 2003 by Brooks/Cole, a division of Thomson Learning
Original language published by Thomson Learning (a division of Thomson Learning Asia Pte Ltd). All rights reserved.

本书原版由汤姆森学习出版集团出版.版权所有,盗印必究.

China Machine Press is authorized by Thomson Learning to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体字翻译版由汤姆森学习出版集团授权机械工业出版社独家出版发行.此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区及中国台湾)销售.未经授权的书出口将被视为违反版权法的行为.未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或发行本书的任何部分.

981-265-170-5

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2003-8367

图书在版编目(CIP)数据

数学建模(原书第3版)/(美)吉奥丹诺(Giordano, F. R.)等著;叶其孝等译.
—北京:机械工业出版社,2005.1

(华章数学译丛)

书名原文:A First Course in Mathematical Modeling, Third Edition

ISBN 7-111-14793-6

I. 数… II. ①吉… ②叶… III. 数学模型—高等学校—教学参考资料 IV. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第065583号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:蒋 祎

北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005年1月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·28.75印张

印数:0 001-5 000册

定价:45.00元

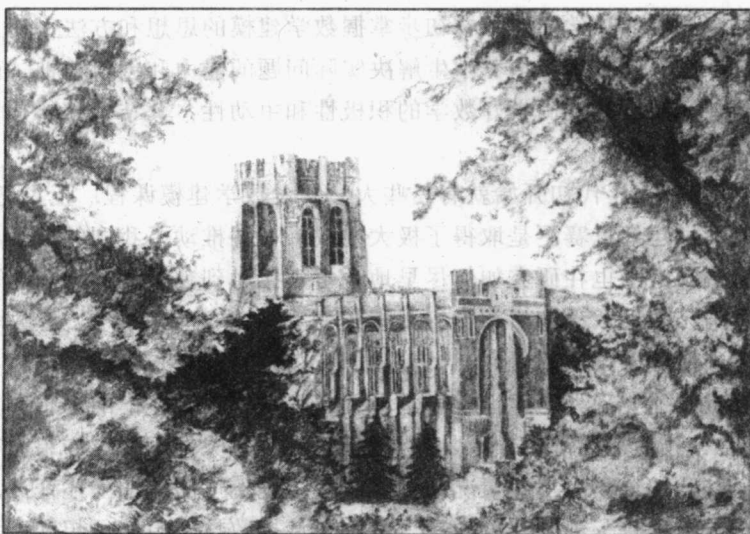
凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换
本社购书热线:(010) 68326294

谨以此书献给在我们的生活、教学
和研究中不断激励我们从事教学
建模的导师、同事和学生

特别是

David C. Cameron

教师、学者、战士、导师和朋友



The Cadet Chapel

Wendy Fox

教师的影响是永恒的。

无法估计他的影响会有多深远。

——Adams(美国历史学家)

译者序

数学建模(Mathematical Modeling)是用数学方法解决各种实际问题的桥梁,随着计算机的发明和计算机技术的飞速发展,数学的应用日益广泛,数学建模的作用越来越重要,而且已经渗透到各种领域,可以毫不夸张地说,数学和数学建模无处不在.甚至报刊中也越来越多地出现数学建模、建模和数学模型这样的术语(包括它们的英文名称 Mathematical Modeling、Modeling 和 Mathematical Model),它们正在成为人们日常生活和语言交流中常见的术语.

纵观历史,任何成功的技术必定会进入到培养人才的教育领域,高等教育更应该与时俱进,及时反映社会发展的需要.近年来符号和模型的作用已经成为数学教育所关注的中心议题,世界各国越来越多的大学(甚至中学)开设了数学建模的必修或选修课.数学教育界的一些有识之士认为,应该尽早地让学生学习并初步掌握数学建模的思想和方法,而且正在努力身体力行.实际上,这样做不仅有利于培养学生解决实际问题的能力和创新精神,而且会使学生对数学有更深入的理解,从而增强他们学好数学的积极性和主动性,其结果必然是大大增强他们面对 21 世纪严峻挑战的竞争力.

在我国,从上世纪 80 年代初开始就有一些大学开设数学建模课程.上世纪 90 年代初开始举办的全国大学生数学建模竞赛更是取得了极大的成果,并推动了我国的数学教育改革.我国数学教育界越来越多的人士也在研究如何尽早地让学生接触到数学建模的思想和方法.在教育部的领导下,由全国大学生数学建模竞赛组委会组织和实施的研究课题“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”正是这种努力的一部分.

然而,要确有成效地实现尽早地让学生学习并初步掌握数学建模的思想和方法,必须真正做到“以学生为中心、教师是关键、领导是保证”.就教师是关键而言,如果没有教师自身和集体的钻研和实践,以及结合学生实际情况的因材施教,也不可能完成上述任务.

我们翻译的这本书反映了美国几位教授、专家在传播数学建模的思想和方法方面所做的努力.该书的作者 Frank R. Giordano 教授曾任西点军校(美国军事学院 United States Military Academy)数学系系主任,多年来一直是美国大学生数学建模竞赛(MCM)的主要组织者,他是美国大学生数学建模竞赛组委会的主任,另一位作者 William P. Fox 教授是美国中学生数学建模竞赛(HiMCM,即由 COMAP 于 1999 年开始组织的美国中学生数学知识应用竞赛)组委会的主任.三位作者在数学建模和微积分的教学方面富有经验并有多部受到欢迎的著作.

本书可以作为我国从事数学建模教学的教师学习和钻研的素材.由于本书对于用到的数学知识力求深入浅出,涉及的应用领域又相当广,因此也适合作为高职高专院校数学教师的教学参考书和学生的课外读物.

本书由以下几位教授共同翻译.前言、第 1、2 章由叶其孝翻译,第 3、4 章由孙山泽翻

译, 第5、6章和附录A、B由姜启源翻译, 第7、12章和附录C由谢金星翻译, 第8、9章由王强翻译, 第10、11章由唐云翻译. 叶其孝教授通校了全部译文.

感谢机械工业出版社华章分社在引进本书以及编辑、出版过程中所做的努力.

译 者

2004年5月于北京

前 言

为及早向学生传授建模的知识,本教材的第1版是为了在讲授商业或工程微积分基础课程的同时或紧随其后开设数学建模课而构思设计的.在第2版中,我们加进了讨论离散动力系统、线性规划和数值搜索法以及概率建模等内容.此外,我们扩写了有关模拟的引论这一节.在本版(第3版)中,我们把某些动力系统的求解方法列入本书以揭示解的长期行为.我们在利用微分方程进行建模这一章中加进了基本的数值解法.本教材重新组织为两大部分:第一部分,离散建模(1~8章),以及第二部分,连续建模(9~12章).这种组织结构可以在不要求用微积分的第一部分的基础上教授完整的建模课程.第二部分处理基于最优化和微分方程的连续建模,可以和大学一年级的微积分课程同时讲授.本教材给予学生涉及建模过程中所有阶段的机会.所附的新制作的光盘[○]包括了软件、额外的建模情景和实际课题,以及和美国大学生数学建模竞赛(MCM, Mathematical Contest in Modeling)过去赛题的链接.我们要感谢数学及其应用联合会(COMAP, Consortium for Mathematics and its Applications)的Sol Garfunkel和职员为制作光盘所做的工作以及对本前言后面标题为“资料的来源”一节中提及的建模活动的支持.

目标和定位

本课程一直是学习数学和数学在各领域中的应用之间的桥梁.本课程向学生提供了在学习数学的早期就了解应用问题的各部分是怎样捏合在一起的机会.学生将研究选自数学科学、运筹学、工程、管理和生命科学等许多学术领域中常见的有意义和实际的问题.

本教材介绍完整的建模过程.学生有机会实践建模的以下各个方面并能增强解决问题的能力:

1. 创造性和经验模型的构建:给定一种现实情景,学生要学习识别问题、做出假设和收集数据、提出模型、测试假设、必要时精炼模型,在情况适宜时看看模型和数据是否一致,以及分析模型的基本数学结构以评价当并不精确地满足假设时对结论的敏感性.

2. 模型分析:给定一个模型,学生要学会反向推理以揭示那些不一定是显式表示的基本假设,审慎严谨地评估这些假设和手头要处理的情景相符合的程度,并估计当并不精确地满足假设时对结论的敏感性.

3. 模型研究:研究一个特定的领域以获得对某些行为更深入的理解并学会使用早已创建或公诸于世的模型.

对学生基础知识的要求和课程内容

因为我们的愿望是尽可能早地在课程中向学生传授建模的经验,所以仅在第9、10和11章需要学生对一元微积分有基本了解.尽管在建模过程的组成部分中也要教某些不熟悉的数学

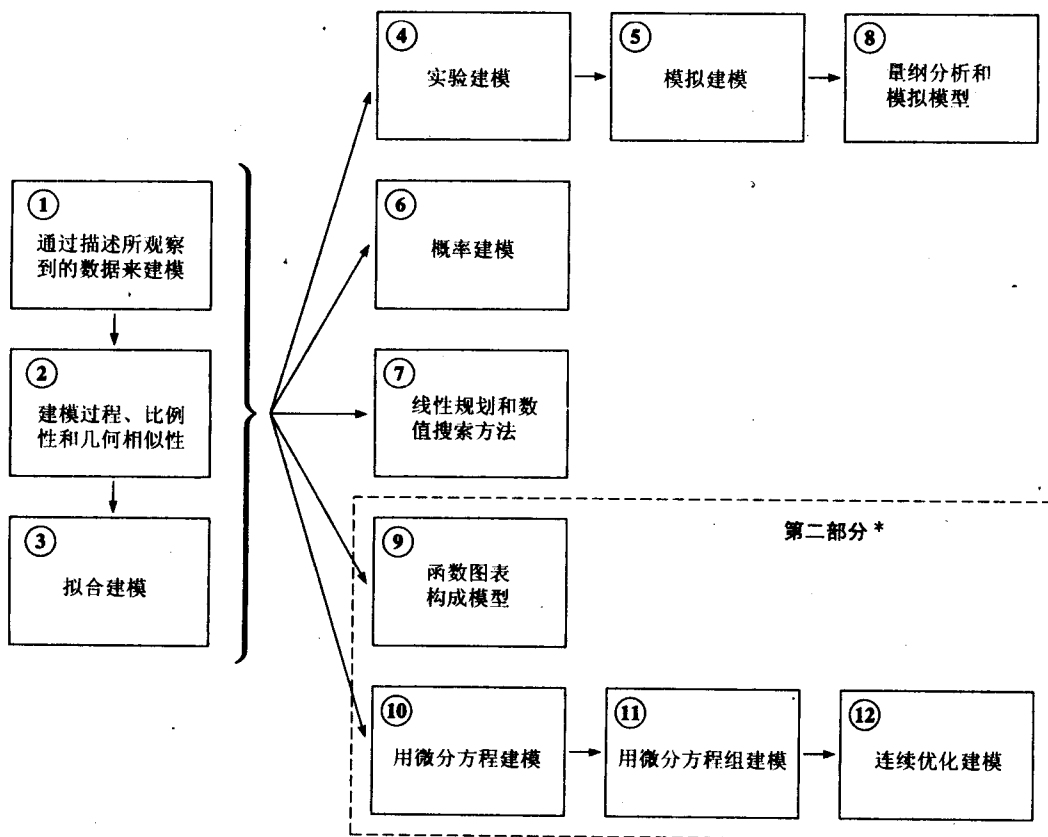
○ 光盘内容请登录华章网站 www.hzbook.com 下载。——编辑注

概念和思想，但重点是应用中学毕业生早已了解的数学知识，第一部分尤其如此。建模课程将激励学生去学习诸如线性代数、微分方程、最优化和线性规划、数值分析、概率论和统计那样的更高级的课程。这些课程的作用贯穿全书都作了提示。

此外，本教材中的情景和习题不是作为特定的数学方法的应用而设计的。这些情景和习题要求学生具有创造性智慧，能运用基本概念去求得没有确定答案的问题的合理解决方案。本教材没有详细讲解某些数学方法(例如，蒙特卡罗模拟、曲线拟合和量纲分析)，因为它们常常不是大学教材的正式内容。教师应该发现本教材在通过习题和实际课题来满足学生的特殊需要方面有很大的灵活性。我们用本书既教过本科生的课程也教过研究生的课程，甚至用作教师讨论班的基本内容。

本教材的内容组织

借助于图1能最好地了解本教材的内容组织。前八章组成第一部分，只要求预微积分(precalculus)[⊙]课程的数学知识作为必须的预备知识。我们从应用简单的有限差分方程对变化



* 第二部分要求一元微积分作为并修课程。

图1 各章内容组织和讲授次序

⊙ 在美国许多学校开设预微积分(precalculus)课程，作为正式选修微积分课程前的必修课。——译者注

进行建模的思想开始。对学生来说, 这种方法是相当直观的, 而且为我们提供了若干模型来继续支持第 2 章对建模过程的讨论。我们在第 2 章中对模型进行分类、分析建模过程以及构建在后两章中要再讨论的若干比例模型或子模型。第 3 章向学生讲述用特殊类型的曲线去拟合所收集数据集的三个准则。第 4 章讲述怎样抓住所收集数据集的趋势的问题。在这种经验模型的构建过程中, 我们从用简单的单项模型去近似地拟合所收集数据集开始, 并逐渐地过渡到更为复杂的插值模型, 包括多项式光滑模型和三次样条模型。第 5 章讨论了模拟模型。用一个经验模型来拟合某些收集到的数据, 然后用 Monte Carlo(蒙特卡罗)模拟来复制正在考察的行为。这种表述方式最终促进了对概率和统计的学习。

第 6 章提供了概率建模的一个引论。在前面讲过的情景和分析的基础上介绍了 Markov(马尔科夫)过程、可靠性以及线性回归等论题。第 7 章利用第 3 章提出的另外两个准则讲述了寻求最优拟合模型的问题。线性规划是用准则之一来寻求“最优”模型的方法, 对于另一个准则可以用数值搜索方法。本章以介绍包括二分法和黄金分割法在内的数值搜索方法来结束。第一部分的一章, 第 8 章, 专讲在物理科学和工程中的重要论题——量纲分析。

第二部分用来学习连续模型。第 9 章讨论连续图形模型的构建以及探究所构建的模型对作为这些模型基础的假设的敏感性。在第 10 和 11 章中我们对动态的(随时间变化的)情景进行建模。这两章是建立在第 1 章讲述的离散分析的基础上的, 但现在考虑的是时间连续变化的情景。第 12 章专讲连续优化。学生有机会来求解只用到初等微积分的连续优化问题, 本章还介绍了约束优化问题。

学生实践课题

学生实践课题是任何建模课程必不可少的组成部分。本教材包括了创造性和经验的模型构建、模型分析和模型研究方面的实践课题。因此我们建议将包括建模所有三个方面的实际课题组合构成一门课程。如果课题提出的情景没有唯一解, 那么这些课题就是最有启发性的。某些课题用到真实的数据, 这些数据或者是提供给学生的, 或者是学生不难收集到的。把个人和小组的实践课题结合起来也是很重要的。在教师希望开发学生个人建模技巧的课程的那些部分, 采用个人实践课题是合适的。在课程的较早阶段, 采用小组课题, 将会提高学生为解决难题而举行“自由讨论会”的积极性。本教材推荐了多种多样的实践课题, 诸如构建各种情景的模型, 完成 UMAP 的教学单元[⊙], 或研究教材或课堂中作为例子讲述的模型等。对于每个学生来说, 在整个课程中接受模型构建、模型分析和模型研究的多样性实践课题的组合并建立起信心是重要的。学生也可能会选择一个特别感兴趣的情景研制模型, 或分析在另一门课程中的模型。在典型的建模课程中我们推荐 5 到 8 个短小的实践课题。

⊙ 由 COMAP 公司研发和销售分发的 UMAP 教学单元(Modules)。UMAP 是 Undergraduate Mathematics and its Applications(数学及其应用)的缩写, 同时也是一本在美国大学数学教学方面很有影响的季刊《The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications》的缩写, 该刊每年第三期刊登一年一度的美国大学生数学建模竞赛(MCM, Mathematical Contest in Modeling)和跨学科建模竞赛(ICM, Interdisciplinary Contest in Modeling)的总结、优秀论文和对优秀论文的评述。Module 是模块的意思, 但在教学中它还有如下的意思: A unit of education or instruction with a relatively high teacher-to-student ratio, in which a single topic or a small section of a broad topic is studied for a given period of time(一种有相当高师生比的教育或教授单元, 其中的单个论题或一个大论题的小部分在给定阶段的时间内学习)。——译者注

就本教材涉及的情景、家庭作业习题和实践课题而言,我们发现采用精心且完整地研制过的不多几个实践课题来做,效果会更好.为了能在更大范围内选择许多应用领域中的问题,我们还提供了比可以合理指派的习题和课题更多的习题和课题.

计算的作用

尽管本教材的许多章不要求计算能力^①,但是在任何真正的建模过程中,计算起着重要的作用.我们发现在整个课程中图形计算器和计算机的结合使用是很有好处的.在第1、5和7章中使用电子数据表格(spreadsheet)软件会很有帮助的,而且每当数据给定时,数据的显示功能是极其有用、甚至是必需的.学生会发现在转换数据、最小二乘曲线拟合、划分差分表和三次样条、编程模拟模型、线性规划和数值搜索法以及微分方程的数值解中,计算也是很有用的.本教材所附的光盘提供了某些基本的技术工具,学生可以把它们当作使用技术手段来建模的基础.为执行第4章中讲述的方法我们提供了某些FORTRAN程序.^②该光盘还包括了计算机代数系统MAPLE的一个辅导教材以及在本教材中的用法.

资料的来源

我们发现COMAP提供的资料非常好,特别适用于我们建议的课程.大学生课堂上适用的单个的教学单元(即UMAP教学单元)可以以多种方式使用.首先,它们可以用作课堂的教学素材.学生可以通过做教学单元中的习题来自学该教学单元(可以很方便地去掉教学单元提供的详细解答).另一种方式就是采用本教材实践课题节中建议的一个或多个UMAP教学单元把一组教学内容捏合在一起.这些教学单元也提供了“模型研究”的极好的原始资料,因为它们覆盖了数学在众多领域中的广泛应用.这样做时,提供给学生一个适当的教学单元进行研究并要求学生完成该教学单元并做出报告.最后,这些教学单元都是学生进行模型构建实践的情境来源.这样做时,教师基于某个特定的教学单元所处理的应用问题给学生写一个情景并利用该教学单元作为背景材料,或要求学生在稍后一些日子里完成该教学单元.本教材所附的光盘包括教材中提及的大多数UMAP教学单元.想获得新开发的跨学科课题的有关信息可以写信给COMAP,地址是57 Bedford Street, Suite 210, Lexington, MA 02173,或打电话1-800-772-6627给COMAP,或发电子邮件给order@comap.com.

学生小组实践课题的主要来源就是美国大学生数学建模竞赛(MCM)和跨学科建模竞赛(ICM,是Interdisciplinary Contest in Modeling的缩写).可以通过光盘提供的链接来获得这些课题,为了适合所教班级,教师要做一些修改.这些课题也是培训拟参加MCM和ICM的参赛队的极好资源,当前这两个竞赛是由美国国家安全局(NSA, National Security Agency)和COMAP主办的.竞赛是在美国国家安全局、美国工业与应用数学学会(SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics)、美国运筹学和管理科学学会(IORMS, Institute for

① 2、6以及8~12章不要求计算能力.

② FORTRAN是formula translator(公式翻译程序)的缩写.它是第一个高级计算机语言(由John Backus于1954~1958年期间研发),它也是诸如变量、表达式、语句、迭代和条件语句、单独编译子程序和格式化输入输出等许多高级概念的先驱.FORTRAN这个名字表明它植根于直到今天仍然大量使用它的科学和工程领域.在过去的40多年里,FORTRAN得到了很大的改进和扩展.——译者注

Operations Research and Management Sciences)、美国数学协会(MAA, Mathematical Association of America)的资助下由 COMAP 主办的。有关竞赛的更多的信息可以和 COMAP 联系或访问他们的网站 www.comap.com。

致谢

我们向在本书的研究和编写过程中给予帮助的个人表示感谢。我们特别要感谢(已退休的) Jack M. Pollin 准将和 Carroll Wilde 博士激发了我们教数学建模课程的兴趣以及对我们的事业的支持和指导。我们要感谢许多同事在审阅第 1 版的手稿以及在提出问题和修改意见方面的帮助,他们是 Rickey Kolb、John Kenelly、Robert Schmidt、Stan Leja、Bard Mansager、特别是 Steve Maddox 和 Jim McNulty。

我们还受惠于本教材涉及的许多 UMAP 材料的作者或合作者,他们是 David Cameron、Brindell Horelick、Michael Jaye、Sinan Koont、Stan Leja、Michael Wells 和 Carroll Wilde。此外,我们要感谢 Solomon Garfunkel 以及整个 COMAP 公司的职员在编写本教材的研究课题方面提供的合作,特别要感谢 Roland Cheyney 在制作本教材所附的光盘方面提供的帮助。我们也要感谢 Tom O'Neil 及其学生对光盘的制作所做出的贡献以及 Tom 在支持建模活动方面的有益建议。

任何一本数学教材的产生都是一个复杂的过程,我们感到特别幸运的是有 Brooks/Cole 出版社高质量和创造性的职员队伍。我们要特别向第 1 版的编辑 Craig Barth、第 2 版的编辑 Gary Ostedt 以及本版的编辑 Gary Ostedt 和 Bob Pirtle 表示感谢。就本版而言,我们要特别感谢市场经理 Tom Ziolkowski、产品编辑 Tom Novack、Merrill Peterson 和纸型制作部,以及感谢 Amy Moellering 出色的文字编辑和排版工作。我们要特别感谢 Wendy Fox 为题献页提供她的画作——西点军校学员小教堂。

最后,要感谢我们三个作者的妻子 Judi Giordano、Gale Weir 和 Wendy Fox 的鼓励和支持。

目 录

译者序		
前言		
第 1 章 对变化进行建模	1	
例 1 测试比例性	2	
1. 1 用差分方程对变化进行建模	3	
例 1 储蓄存单	4	
例 2 抵押贷款买房	5	
1. 2 用差分方程近似描述变化	8	
例 1 酵母培养物的增长	8	
例 2 再论酵母培养物的增长	9	
例 3 接触性传染病的传播	11	
例 4 血流中地高辛的衰减	11	
例 5 冷冻物体的加热	12	
1. 3 动力系统的解法	14	
例 1 再论储蓄存单	15	
例 2 污水处理	17	
例 3 地高辛处方	21	
例 4 投资年金	21	
例 5 活期储蓄账户	22	
例 6 再论投资年金	24	
1. 4 差分方程组	28	
例 1 汽车租赁公司	28	
例 2 特拉法尔加(Trafalgar)战斗	31	
例 3 竞争猎兽模型—斑点猫头鹰和隼	34	
例 4 对政党的投票趋势	37	
第 2 章 建模过程、比例性和几何相似性	43	
2. 1 数学模型	44	
例 1 车辆的停止距离	48	
2. 2 利用比例性进行建模	53	
例 1 Kepler(开普勒)第三定律	54	
2. 3 利用几何相似性进行建模	61	
例 1 从不动的云层落下的雨滴	63	
例 2 钓鱼比赛中的建模	64	
2. 4 汽车的汽油里程	71	
2. 5 体重和身高、力量和灵活性	73	
第 3 章 模型拟合	79	
3. 1 用图形为数据拟合模型	81	
3. 2 模型拟合的解析方法	86	
3. 3 应用最小二乘准则	91	
3. 4 选择一个好模型	95	
例 1 车辆的停止距离	97	
第 4 章 实验建模	101	
4. 1 Chesapeake 海湾的收成和其他的 单项模型	102	
例 1 收获蓝鱼	105	
例 2 收获蓝蟹	106	
4. 2 高阶多项式模型	112	
例 1 带式录音机的播放时间	113	
4. 3 光滑化: 低阶多项式模型	118	
例 1 再论带式录音机的播放时间	119	
例 2 再次讨论带式录音机的播放时间	122	
例 3 车辆的停止距离	123	
例 4 酵母培养物的增长	124	
4. 4 三阶样条模型	128	
例 1 再论车辆的停止距离	134	
第 5 章 模拟方法建模	141	
5. 1 确定行为的模拟: 曲线下的面积	143	
5. 2 随机数的生成	146	
5. 3 随机行为的模拟	148	
5. 4 存储模型: 汽油与消费需求	155	
5. 5 排队模型	164	
例 1 港口系统	164	
例 2 早高峰时间	171	
第 6 章 离散概率模型	175	
6. 1 离散系统的概率模型	175	
例 1 再论汽车租赁公司	175	
例 2 投票趋势	177	

6.2 部件和系统可靠性建模	180	第9章 函数图表构成模型	271
例1 串联系统	180	9.1 军备竞赛	271
例2 并联系统	181	例1 民防	278
例3 串并联组合系统	181	例2 移动发射台	279
6.3 线性回归	183	例3 多弹头	279
例1 美国黄松	185	例4 再论多弹头分导再入运载系统: 弹头计数	280
例2 再论钓鱼比赛	186	9.2 对分阶段军备竞赛建立模型	281
第7章 离散优化建模	191	9.3 管理不可再生资源: 能源危机	285
7.1 离散优化建模概述	191	9.4 税收对于能源危机的影响	288
例1 确定生产计划方案	192	9.5 汽油短缺和税收	292
例2 航天飞机的载货问题	194	第10章 用微分方程建模	297
例3 分段线性函数逼近	194	10.1 人口增长	299
7.2 线性规划(一): 几何解法	201	10.2 对药剂量开处方	308
例1 木匠问题	202	10.3 再论刹车距离	314
例2 数据拟合问题	203	10.4 自治微分方程的图形解	317
7.3 线性规划(二): 代数解法	209	例1 画相直线及解曲线的草图	318
例1 木匠问题的代数解法	210	例2 汤的冷却	320
7.4 线性规划(三): 单纯形法	212	例3 再论逻辑斯蒂增长	321
例1 再论木匠问题	216	10.5 数值近似方法	323
例2 使用单纯形表	219	例1 Euler法的运用	326
7.5 线性规划(四): 敏感性分析	220	例2 再论储蓄存单	326
7.6 数值搜索方法	226	第11章 用微分方程组建模	331
例1 二分搜索方法	228	11.1 一阶自治微分方程组的图形解	331
例2 黄金分割搜索方法	230	例1 线性自治微分方程组	333
例3 再论模型拟合的准则	232	例2 非线性自治微分方程组	333
例4 工业流程优化	233	11.2 竞争捕猎模型	336
第8章 量纲分析和相似性	237	11.3 捕食者-食饵模型	343
8.1 表示为乘积形式的量纲	239	11.4 两个军事方面的例子	350
例1 再论单摆	241	例1 Lanchester 战斗模型	350
例2 作用在厢式运货车上的风力	243	例2 军备竞赛的经济方面	355
8.2 量纲分析的步骤	246	11.5 微分方程组的 Euler 方法	359
例1 雨滴的落地速度	250	例1 方程组的 Euler 方法应用	360
例2 再论汽车油耗问题	252	例2 轨线和解曲线	361
8.3 一个阻尼摆	253	第12章 连续优化建模	367
8.4 解释量纲分析的几个例子	258	12.1 库存问题: 送货费用和储存费用 最小化	368
例1 爆炸分析	258	12.2 制造问题: 竞争性产品生产中的利润 最大化	375
例2 烤火鸡应当烤多久?	262		
8.5 相似性	267		
例1 作用在潜艇上的阻力	268		

12.3 连续约束优化	380	附录 B 电梯问题的模拟算法	423
例 1 石油转运公司	380	附录 C 修正单纯形法	431
例 2 航天飞机的水箱	382	索引	433
12.4 可再生资源的管理: 渔业	384		
附录 A 美国大学生数学建模竞赛试题 (1985~2004)	393		

第 1 章 对变化进行建模

引言

为了更好地了解世界，人们常常用数学(例如，使用函数或方程)来描述某种特定现象。这种数学模型是现实世界现象的理想化，但永远不会是完全精确的表示。尽管任何模型都有其局限性，但是好的模型能提供有价值的结果和结论。在本章中我们将重点介绍对变化进行建模。

数学模型

在对现实对象进行建模时，人们常常对预测未来某个时刻变量的值感兴趣。变量可能是人口、房地产的价值或者患有某种传染病的人数。数学模型常常能帮助人们更好地了解一种行为或规划未来。可以把数学模型看做为了研究一种特定的实际系统或人们感兴趣的行为而设计的数学结构。如图 1-1 所示，从模型中，人们能得到有关该行为的数学结论，而阐明这些结论有助于决策者规划未来。

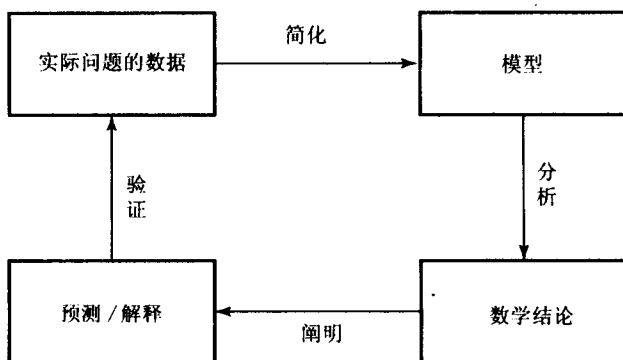


图 1-1 从考察实际数据开始的建模过程的流程图

简化

多数模型简化了现实的情况。一般情况下，模型只能近似地表示实际的行为。一种非常强有力的简化关系就是比例性。

定义 两个变量 y 和 x 是(互成)比例的，如果一个变量总是另一个变量的常数倍，即，如果对某个非零常数 k

$$y = kx$$

我们记为 $y \propto x$.

这个定义的意思是说 y 关于 x 的图形位于通过原点的一条直线上. 在测试给定的数据集是否合理地呈现一种比例关系时, 观察图形是有用的. 如果比例性是合理的, 那么一个变量对另一个变量的图形应该近似地位于通过原点的一条直线上. 下面举一个例子.

例 1 测试比例性

考虑如图 1-2 所示的弹簧-质量系统. 做一个测量弹簧的伸长作为置于弹簧末端的质量(以重量计)的函数的实验. 表 1-1 为该实验收集到的数据. 弹簧的伸长对于置于弹簧末端的质量(或重量)的散点图展现了它是过原点的一条近似直线(图 1-3).

表 1-1 弹簧-质量系统

质量	伸长
50	1.000
100	1.875
150	2.750
200	3.250
250	4.375
300	4.875
350	5.675
400	6.500
450	7.250
500	8.000
550	8.750

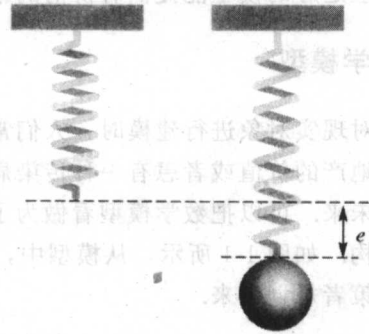


图 1-2 弹簧-质量系统

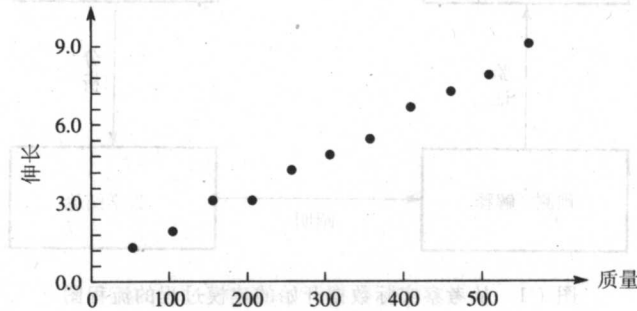


图 1-3 来自弹簧-质量系统的数据

看来该数据遵从比例性法则, 伸长 e 与质量 m 成比例, 或者用符号表示为 $e \propto m$. 该直线看似通过原点. 用几何知识来观察数据是否合乎成比例的假设, 如果是的话, 就去估计斜率 k . 在本例中, 假设这两种数据成比例看来是合理的, 所以选位于直线上的两点(200, 3.25)和(300, 4.875)来估算比例常数. 计算连接这两点的直线的斜率为:

$$\text{斜率} = \frac{4.875 - 3.25}{300 - 200} = 0.01625$$

因此比例常数约为 0.0163，于是可以建立以下估算模型：

$$e = 0.0163m$$

然后把表示该模型的直线图形重叠画到散点图上，以考察模型对这些数据的拟合效果（见图 1-4）。从图中可以看出这个简化的比例模型是合理的。 ■

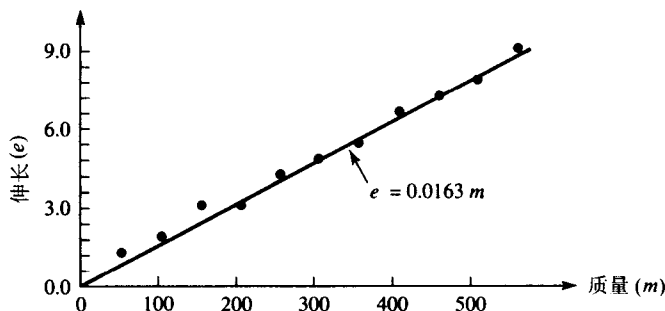


图 1-4 来自弹簧-质量系统的数据和比例模型直线

对变化进行建模

对变化进行建模的一个非常有用的范例就是

$$\text{未来值} = \text{现在值} + \text{变化}$$

人们往往希望从现在知道的东西加上精心观测到的变化来预测未来。在这种情形中，可以先按照公式

$$\text{变化} = \text{未来值} - \text{现在值}$$

来研究变化。

通过收集一段时间中的数据并画出该数据的图形，我们常常可以识别出能够抓住这种变化趋势的模型的模式。如果这种行为是在离散时间段上发生的，那么前面的模型构建就导致本章要介绍的差分方程。如果行为在时间上是连续发生的，那么模型构建就导致了第 10 章要介绍的微分方程。这两者都是描述和预测行为变化的强有力的方法。

2
3

1.1 用差分方程对变化进行建模

在本节中我们将建立数学模型以描述所观察到的行为中的变化。当观察变化时，我们常常想要了解为什么变化以这样的方式发生，可能去分析不同的条件对行为的影响或者去预测将来会发生什么。数学模型可以使我们在影响行为的不同条件下做数学实验，以帮助我们更好地了解行为。

定义 数列 $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 的一阶差分是