概率论与数理统计

（第2版）

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

贾玉心 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与数理统计

第2版

贾玉心　编著

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北京·

内容提要

本书由北京邮电大学网络教育学院学术委员会推荐出版.

全书共分两篇,第一篇概率论,第二篇数理统计.每章后对重点内容进行了小结.全书最后给出了习题答案,并附有本课程的教学大纲及教学进程表.

本书可作为大学管理专业本科、专科(书中*号内容对专科生不作教学要求)的教材,也可供相关专业技术人员自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(第2版)/贾玉心编著.—2版.—北京:北京邮电大学出版社,2004
ISBN 7-5635-0947-X

Ⅰ.概… Ⅱ.贾… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第101053号

书　　名:概率论与数理统计
编　　著:贾玉心
责任编辑:李欣一
出 版 者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路10号)
　　　　　邮编:100876　电话:62282185　62283578
电子信箱:publish@bupt.edu.cn
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京源海印刷有限责任公司
印　　数:1—5 000册
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:20.75
字　　数:391千字
版　　次:2001年12月第1版　2005年1月第2版　2005年1月第1次印刷

ISBN 7-5635-0947-X/O·89　　定　价:28.00元

再版前言

概率论与数理统计是研究随机现象规律的一门数学学科.随着经济的发展和科技的进步,这一学科被人们广泛地应用于企业管理及科学技术领域,已经成为这些领域不可缺少的一门基础学科.

本书是作者在1990年编写的数理统计教材和1995年编写的概率随机过程教材经多年教学实践和教学研究的基础上,于2001年为管理专业开设的概率论与数理统计课程编写的教材.这次又进行了部分修改并改变了开本.本教材力求贯彻由浅入深的原则,既少而精又便于自学,且注意理论性.对专科生使用本书,考虑到学时关系,凡目录中带*号的内容不作教学要求.

全书分为两篇.第一篇概率论以随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数学特征三部分为主线,着重阐述一些主要概念并对例题进行分析,启发学生对概率论基本概念、基本理论、基本计算方法的掌握.第二篇数理统计以概率论为理论基础,对一些主要概念进行数学上的分析,讲清参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等的推断原理.对难点问题一般先给出数学模型,再进行统计分析,然后导出方法.

为便于使用本教材,书后附有概率论与数理统计的教学大纲、教学进程表以及习题答案.

本书原稿承蒙姜炳麟教授审阅,并提出了非常宝贵的修改意见,谨此致以诚挚的谢意.

限于编者水平,对书中不妥和疏漏之处,恳请读者给予指正.

作　者

二〇〇四年十月

目　　录

第一篇　概率论

第二篇 数理统计

第一篇　概　率　论

第1章　随机事件及其概率

本章主要介绍概率论的基本概念:事件、概率、条件概率及独立性.这些概念将贯穿全书,要求必须深刻理解和熟练掌握.

1.1　随 机 事 件

为了研究随机现象,首先对其有关概念进行确切的表述.

一、随 机 试 验

所谓随机试验是指在相同条件下可以重复进行,而其结果有的是事先无法预知的试验.随机试验简称为试验,常记为 E.

例如

E_1:投一颗骰子,观察出现的点数;

E_2:将一枚硬币上抛两次,观察正反面出现的情况;

E_3:观察某电话交换台在某一时间间隔内接到的呼唤次数;

E_4:测量一批晶体管的 β 参数值.

二、随机事件

在试验中,可能出现也可能不出现的结果称为随机事件,简称事件,通常记为 $A,B,C,\cdots$.

例如,在 E_1 中"出现2点","出现偶数点"均为事件,它们可以分别记为 A 和 B,也可以分别记为 $\{2\}$ 和 $\{2,4,6\}$.

再如,在 E_2 中"第一次出现正面,第二次出现反面"为一事件.如果约定用"H"表示"正面",用"T"表示"反面",则上述事件就可以记为 $\{(H,T)\}$,这里 (H,T) 表示是一次试验结果,所以应加圆括号.而"恰好出现一次正面"这一事件就可以表示为 $\{(H,T),(T,H)\}$.

为了便于研究,我们把那些最简单的、直接观察到的结果称为基本事件.如 E_1 中的 $\{1\},\{2\},\cdots$;E_2 中的 $\{(H,H)\},\{(H,T)\},\cdots$ 均分别为它们的基本事件.而称构成基本事件的内容,如 $\{1\}$ 中的1及 $\{(H,T)\}$ 中的 (H,T) 等为样本

点.在这样的规定下,按集合论的观点我们就可以将基本事件视为样本点的集合(单点集),而样本点就是构成基本事件的元素,以后用 e 表示样本点.

试验中除了基本事件外,还有包含若干基本事件的复杂事件,称其为复合事件,如 E_1 中的$\{2,4,6\}$, E_2 中的$\{(H,T),(T,H)\}$都是复合事件.按集合论的观点,复合事件就是若干样本点的集合.若事件 A 包含样本点 e,以后记作 $e\in A$.

需要指出的是,基本事件与复合事件的划分并不唯一,它依赖于试验的目的.例如,在 E_1 中,如果我们仅关心的是出现奇数点还是偶数点,这时就可以认为此试验只含有两个基本事件:“出现偶数点”和“出现奇数点”.更确切地说,基本事件就是那些在试验中不可能再细分或不必再细分的事件.

综上所述,一个事件不管是基本事件还是复合事件均是样本点的集合.我们把试验中所有样本点构成的集合称之为样本空间,记为 Ω.

例如

在 E_1 中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

在 E_2 中,样本空间 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$;

在 E_3 中,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$;

在 E_4 中,若用 t 表示测得晶体管的 β 值,即为样本点,则其样本空间 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$.

由于样本空间是所有样本点的集合,因此样本空间也是事件,并包括了试验的所有可能结果,因此每次试验它必发生.在试验中必然发生的事件称为必然事件,所以样本空间就是必然事件.反之也对,因为必然事件若视为样本点的集合时,它只能是所有样本点的集合.例如在 E_1 中,“出现不大于 10 的点”的事件显然是必然事件,若写成样本点集合的形式它只能表示为$\{1,2,3,4,5,6\}$,而不能表示为$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$或其他形式.这是因为 7,8,9,10 不是此试验的样本点.

在试验中不可能发生的事件称为不可能事件,记为$\varnothing$.如在 E_1 中,“出现 -1 点”就是不可能事件.很显然它不应含有任何样本点,用集合论的术语讲它就是空集.

三、事件间的关系和运算

一个试验中会有各种各样的事件,为了今后便于问题的研究,需要介绍它们之间一些常用的重要的关系和运算.

1. 包含关系

在每次试验中,如果事件 A 发生时事件 B 必发生,则称事件 B 包含了事件 A,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

例如在 E_1 中,若 A 表示“出现 2 点”的事件,B 表示“出现偶数点”的事件,

显然有 $A\subset B$,即$\{2\}\subset\{2,4,6\}$.

不难看出,事件间的包含关系对应于集合论中的包含关系.如果我们用一平面表示样本空间,平面上的点表示样本点,因而平面上的区域就表示事件.在这种约定下,事件间的关系和运算就可以用几何图形形象而直观地表示出来.包含关系的几何表示,如图1.1所示.

利用几何表示容易验证包含关系有如下性质:

(1) 若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$;

(2) 对任意的 A,$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 相等关系

如果 $A\subset B$ 且 $A\supset B$,则称事件 A 等于事件 B,记为 $A=B$.

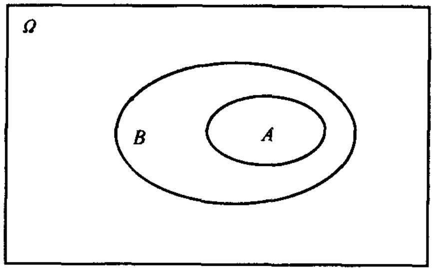

图1.1　$A\subset B$

3. 和的运算

在每次试验中,如果某一事件的发生当且仅当事件 A 和事件 B 至少有一个发生,则称此事件为事件 A 和事件 B 的和事件,简称为和,记为 $A\cup B$.即

$$A\cup B=\{e\mid e\in A\text{ 或 }e\in B\} \tag{1.1.1}$$

这是因为若试验结果 $e\in A$ 或 $e\in B$,即表示试验中事件 A 发生或事件 B 发生,即 $A\cup B$ 发生;反之,若试验结果 $e\in A\cup B$,即表示事件 $A\cup B$ 发生,即事件 A 或事件 B 发生,因此试验结果 e 必然有 $e\in A$ 或 $e\in B$.总之(1.1.1)式成立.

例如在打靶试验中,靶子是由靶心和靶子的其他部分组成.若令 A 表示"击中靶心"的事件,B 表示"击中靶子其他部分"的事件,则 $A\cup B$ 就表示"中靶"事件.

和事件对应于集合论中的并集,它的几何表示,如图1.2所示.

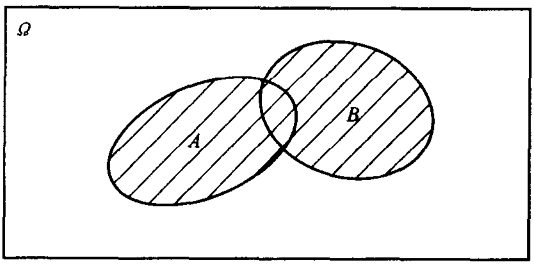

图1.2　$A\cup B$

和的运算有如下性质:

(1) $A\cup B\supset A, A\cup B\supset B$;

(2) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$;

(3) $A\cup A=A$.

类似地,可以将和的概念推广到任意有限多个和可列多个事件的场合,即

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$=\{e\,|\,e\in A_1 \text{ 或 } e\in A_2 \text{ 或}\cdots\text{或 } e\in A_n\}. \tag{1.1.2}$$

它表示 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 中至少有一个发生的事件.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n = A_1\cup A_2\cup\cdots$$
$$=\{e\,|\,e\in A_1 \text{ 或 } e\in A_2 \text{ 或}\cdots\}. \tag{1.1.3}$$

它表示 $A_1, A_2,\cdots$中至少有一个发生的事件.

4. 积的运算

在每次试验中,如果某一事件的发生当且仅当事件 A 和事件 B 同时发生,则称此事件为事件 A 与事件 B 的积事件,简称为积.记为 $A\cap B$ 或 AB,即

$$A\cap B=\{e\,|\,e\in A \text{ 且 } e\in B\}. \tag{1.1.4}$$

例如在 E_3 中,若令 A 表示"接到呼唤次数为偶数"的事件,B 表示"接到呼唤次数能被 3 整除"的事件,则 $A\cap B$ 就表示"接到呼唤次数能被 6 整除"的事件.

积事件对应于集合论中的交集,它的几何表示,如图 1.3 所示.

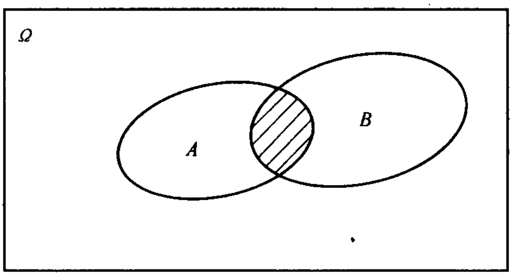

图 1.3 $A\cap B$

积的运算有如下性质:

(1) $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$;

(2) 若 $A\subset B$,则 $A\cap B=A$;

(3) $A\cap A=A$.

同样,积的概念也可以推广到任意有限多个和可列多个事件的场合,即

$$\bigcap_{k}^{n}A_k = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$
$$=\{e\,|\,e\in A_1 \text{ 且 } e\in A_2 \text{ 且}\cdots\text{且 } e\in A_n\}. \tag{1.1.5}$$

它表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$
$$= \{e \mid e \in A_1 \text{ 且 } e \in A_2 \text{ 且 } \cdots\}. \tag{1.1.6}$$

它表示 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生的事件.

5. 互不相容关系

在每次试验中,如果事件 A 和事件 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的.

例如任何试验中的基本事件彼此之间就是互不相容的.

事件间的互不相容关系对应于集合论中的不相交关系.它的几何表示,如图 1.4 所示.

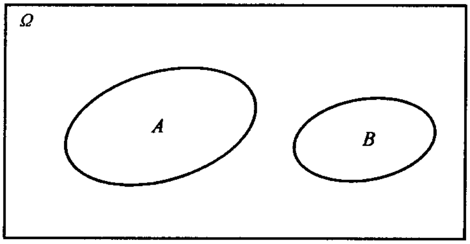

图 1.4　$A \cap B = \varnothing$

6. 差的运算

在每次试验中,如果某一事件的发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生,则称此事件为事件.

A 与事件 B 的差事件,简称为 A 与 B 的差,记为 $A - B$,即

$$A - B = \{e \mid e \in A \text{ 而 } e \overline{\in} B\} \tag{1.1.7}$$

(注意 $B - A$ 应称为 B 与 A 的差).

例如在 E_4 中,若令 A 表示"测得晶体管的 β 值不大于 100"的事件,B 表示"测得晶体管的 β 值不大于 50"的事件,则 $A - B$ 就表示"测得晶体管的 β 值大于 50 而不大于 100"的事件.

差事件对应于集合论中的差集.它的几何表示,如图 1.5 所示.

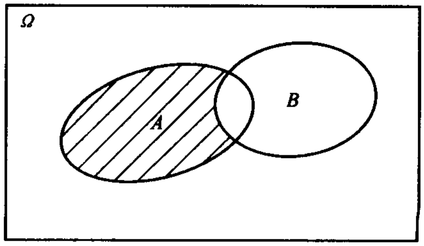

图 1.5　$A - B$

差的运算有如下性质:

(1) $A - B \subset A$;

(2) 若 $A \subset B$,则 $A - B = \varnothing$.

7. 对立关系

在每次试验中,如果事件 A 和事

件 B 必发生一个且仅发生一个,即 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件,记为 $B=\bar{A}$ 或 $A=\bar{B}$.

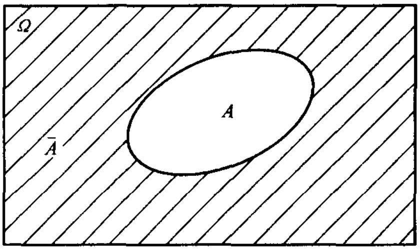

图 1.6 A 与 $\bar{A}$

例如在 E_2 中,若令 A 表示“至少出现一次正面”的事件,B 表示“两次均为反面”的事件,则事件 A 与事件 B 互为对立事件.

对立事件对应于集合论中的余集.它的几何表示,如图 1.6 所示.

对立关系有如下性质:

(1) $A\bar{A}=\varnothing, A\cup\bar{A}=\Omega$;

(2) $\bar{\Omega}=\varnothing, \bar{\varnothing}=\Omega$;

(3) $\bar{\bar{A}}=A$;

(4) $A-B=A\bar{B}$.

如同集合论中“并”与“交”的运算规律一样,事件间的“和”与“积”也有如下运算规律:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

其中分配律和对偶律可以推广到任意有限多个或可列多个事件的情形.

例 1 假设将一枚硬币上抛三次,则样本空间就由下列 8 个样本点组成:

$$e_1:(H,H,H), e_2:(T,H,H),$$
$$e_3:(H,T,H), e_4:(H,H,T),$$
$$e_5:(H,T,T), e_6:(T,H,T),$$
$$e_7:(T,T,H), e_8:(T,T,T),$$

其中 H 表示正面,T 表示反面.

如果设 A 表示“至少出现一次正面”的事件;B 表示“第二次为正面”的事件;C 表示“第三次为反面”的事件;D 表示“没有出现正面”的事件,则不难看出:

$$A=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\},$$
$$B=\{e_1,e_2,e_4,e_6\},$$
$$C=\{e_4,e_5,e_6,e_8\},$$

$$D=\{e_8\}.$$

这些事件之间有着各种关系，如

$$B\subset A,\bar{A}=D,B\cap D=\varnothing,A\cup C=\Omega,$$

等等，而且有

$$B\cap C=\{e_4,e_6\},\overline{B\cup C}=\{e_3,e_7\},$$
$$A\cap(B\cup C)=\{e_1,e_2,e_4,e_5,e_6\},$$

等等.

例2 设 A、B、C 为三事件，而 D 表示 A、B、C 中至少有一个发生的事件，试用 A、B、C 来表示 D.

解 常见方法有以下三种：

〈方法一〉 由于 D 表示“A、B、C 中至少有一个发生”的事件，因此由和事件的概念立即可以得到

$$D=A\cup B\cup C.$$

〈方法二〉 由于“A、B、C 中至少有一个发生”无非是以下几种情况“A 发生但 B 和 C 不发生”或“B 发生但 A 和 C 不发生”或…或“A、B、C 均发生”. 因此有

$$D=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC.$$

〈方法三〉 由于“A、B、C 中至少在一个发生”的对立事件为“A、B、C 均不发生”即

$$\bar{D}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

因此 $$D=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}.$$

利用对偶律立即可以看出方法一与方法三所得到的结果是一样的. 而方法二和方法一所得到的结果也可以利用几何表示法看出它们是一样的，见图 1.7.

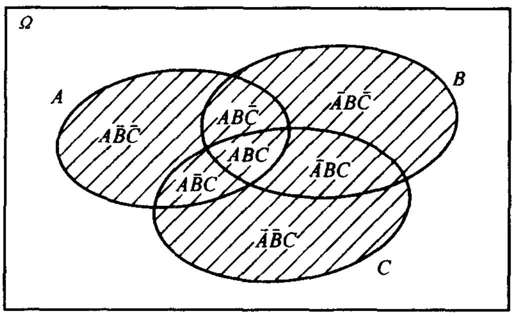

图 1.7 $A\cup B\cup C=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω.

(1) E_1:一袋里有四个球,它们分别标号 1,2,3,4,从袋中任取一球后,不放回袋中,再从袋中任取一球,记录两次取球的结果;

(2) E_2:将 E_1 的取球方式改为一次从口袋里任取两个球,记录取球的结果;

(3) E_3:抛一枚硬币一次,记录正面出现的次数;

(4) E_4:抛一枚硬币,直到抛出正面为止,记录抛硬币的次数;

(5) E_5:在区间$[0,1]$上任取一点,记录它的坐标.

2. 设 A、B、C 为三事件,用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A、B、C 都发生;

(3) A、B、C 中不多于一个发生.

3. 填空:

(1) 若 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$,则 $A\cup B=$__________, $AB=$__________, $A-B=$________;

(2) 若 $A=\{x\mid x<3\}$, $B=\{x\mid x<1\}$,则 $A\cup B=$__________, $AB=$__________, $A-B=$________;

(3) 若 $A=\{(x,y)\mid 1<x<2,\ -\infty<y<+\infty\}$, $B=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ 2<y<4\}$,则 $A\cup B=$________, $AB=$________, $A-B=$________.

4. 设 A、B 为二事件,证明:

(1) $B=AB\cup\bar{A}B$,且 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容;

(2) $A\cup B=A\cup\bar{A}B$,且 A 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

1.2 事件的概率及其性质

在随机现象的研究中,我们最关心的问题往往是试验中事件发生的可能性大小.实践表明事件发生的可能性大小是客观存在的.例如,在一大批仅含小量次品的产品中,随机地取一个产品进行检验,反复多次以后我们就会发现取得正品的机会总比取得次品的机会要大.

为了能精确地衡量事件发生的可能性大小,很自然地要求将事件发生的可能性大小数值化,即对试验中的每一个事件赋予一个数值,通过这些数值的大小来描述事件发生的可能性大小.

称这种衡量事件发生可能性大小的数值为事件的概率,并把某事件 A 的概率记为$P(A)$.

出于习惯,自然希望发生可能性大的事件所对应的数值应大一些,发生可

能性小的事件所对应的数值应小一些.必然事件发生的可能性最大应对应最大的数,而不可能事件发生的可能性最小应对应最小的数.

为了简单,规定:$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

对于试验中任何事件 A,自然应当有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

下面先研究三种不同类型的试验中事件的概率.

一、古典概型

所谓古典概型是指具有以下特点的试验:

(1) 样本空间所含基本事件总数为有限个;

(2) 各个基本事件发生的可能性均相等.

例如掷一颗质地均匀形状对称的骰子,观察出现的点数,这个试验就是古典概型.

在古典概型中,由于样本空间所含基本事件的总数有限,并且各个基本事件发生的可能性相等,同时试验中的任何事件均是由若干个构成基本事件的样本点组成,因此不难看出,包含样本点数越多的事件发生的可能性就越大,而且其大小与所含样本点数成正比.如在上面所举出的掷骰子试验中,“出现偶数点”的事件$\{2,4,6\}$就比“出现2点”的事件$\{2\}$发生的可能性大,而且很显然地大三倍.于是,在古典概型中,事件 A 的概率就应为

$$P(A)=\lambda N_A,$$

其中 N_A 为事件 A 所含样本点数,λ 为比例常数.当然,必然事件也应满足上述关系,即

$$1=P(\Omega)=\lambda N_{\Omega},$$

其中 N_{Ω} 为样本空间中样本点总数.由此式解得

$$\lambda=\frac{1}{N_{\Omega}},$$

代入前式便得到

$$P(A)=\frac{N_A}{N_{\Omega}},$$

通过上面的分析,便可以给出古典概型中事件概率的定义.

定义 1.2.1 在古典概型中,如果样本空间 Ω 所含基本事件总数为 N_{Ω},事件 A 所含基本事件数为 N_A,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{N_A}{N_{\Omega}}. \tag{1.2.1}$$

例 1 将一枚质地均匀的硬币上抛三次,试求恰有一次出现正面的事件的概率.

解 若用 H 表示正面,用 T 表示反面,则样本空间写成样本点集合的形式为

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\},$$

故基本事件总数 $N_\Omega=8$.

令 A 表示“恰有一次出现正面”的事件,则 A 可表为

$$A=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\},$$

故 A 所含基本事件数为 $N_A=3$.

这个试验显然是古典概型,由定义 1.2.1 便得到

$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{3}{8}.$$

由定义 1.2.1 可知,在古典概型中求事件 A 的概率关键在于寻找基本事件总数和事件 A 所含的基本事件数.在求基本事件数 N_Ω 和 N_A 时,往往要利用乘法原理和排列、组合的知识(见书后附录Ⅰ).

例 2 设一袋中装有 N 个球,其中有 M 个白球.今随机地从袋中有放回地取 n 次,每次取一球.试求:(1)仅在指定的 k 次中取得白球的概率;(2)恰好有 k 次取得白球的概率.

解 由于袋中共有 N 个球,因此第一次取时共有 N 种可能结果,又因为是有放回的取球,所以第二次取时,仍有 N 种可能结果,…,依此类推,根据乘法原理,n 次取球所有可能的结果,即基本事件总数为

$$N_\Omega=\underbrace{NN\cdots N}_{n}=N^n.$$

(1) 令 A 表示“仅在指定的 k 次中取得白球”的事件(不妨假设是在前 k 次中取得白球.如果不是前 k 次,从下面的分析过程,不难看出其结果是一样的).同样的考虑,便可得到事件 A 所含的基本事件数为

$$\begin{aligned}N_A&=\underbrace{MM\cdots M}_{k}\underbrace{(N-M)(N-M)\cdots(N-M)}_{n-k}\\&=M^k(N-M)^{n-k},\end{aligned}$$

于是

$$P(A)=\frac{M^k(N-M)^{n-k}}{N^n}.$$

(2) 由于试验方式没有改变,因此基本事件总数仍为

$$N_\Omega=N^n.$$

令 B 表示“恰有 k 次取得白球”的事件.为了求得 N_B,可分两步考虑:首先让取得白球的 k 次固定,即在指定的 k 次中取得白球,由(1)已知共有 $M^k(N-M)^{n-k}$ 种取法;第二步让这 k 次在总共所取的 n 次中进行组合,共有 $\binom{n}{k}$ 种组合方法.