分析入门的形象描述

国外数学译丛

河南
教育出版社

分析入门的形象描述

〔苏〕阿·阿·列瓦科夫
恩·弗·佩日科瓦 著
勒·勒·切连科瓦

黄 国 钧 译

分析入门的形象描述

〔苏〕阿.阿.列瓦科夫
恩.弗.佩日科瓦　著
勒.勒.切连科瓦
黄　国　钧　译

责任编辑　　刘宗贤
河南教育出版社出版
郑州市金水印刷厂印刷
河南省新华书店发行
787×1092毫米　32开本　7印张　129千字
1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷
印数1—3，460册
ISBN7－5347－0006－X／G・7
统一书号7356・427　定价1.05元

序　　言

在科学——技术变革的时代，衡量一个学者、设计师、研究工作者、工艺师、任何方面专门家的水平，在颇大范围内取决于他们的知识程度，其中首先是数学知识的程度。数学不仅是一切知识理论和应用领域的基础，而且在生产中有着直接的应用。

函数概念是数学的基础之一，在数学系各门学科中被称之为数学分析（简称分析）的课程内，使函数得到系统的研究（首先是借助于微积分方法）。分析是一门不论是对数学本身还是它的应用都同样具有首要意义的学科。因此它在中等学校与高等学校的数学教程中许多地方进行研究。

叙述与掌握分析前几章的困难在于它的基础概念的复杂性，而这些概念是以无限结构中变化的思想为基础的。为此，分析课程的教学法有着重要的意义，它是凭借运用全部教学手段的综合性教学法，其中包括基本的分析手段以及辅助性技术性的和直观的手段。国立白俄罗斯大学应用数学系高等数学教研室尝试着深入详细地研究上述的这种综合教学法。在研究分析、代数和几何方面广泛使用的勃·特·沃德涅娃（В·Т·Воднева）和阿·弗·纳乌莫维奇（А·Ф·Наумовича）的“中学数学词汇”以及“基本数学公式”是有益的参考材料。

本书意欲看作“插图分析”*，书中所搜集的图表与插图揭示了分析的基本原理、结果和方法的几何意义.它可以帮助大、中学生消化分析方面的学习材料以及图解各种各样的分析教材。应当强调指出，本书不以分析教科书为目的，不可能代替分析教材，因为它不含有分析资料的系统论述和证明。

创建分析方面的直观教学法势必引起借助于静力学手段*描述发展过程的必然性。

书中应用了可变比例的方法使得同一对象的许多侧面容易理解，而这些侧面是以不同详细程度的图形给出的，甚至当阐明了数轴的结构（无理数在水平直线上的位置，连续和稠密的实数子集的区别等等）时，这个方法就成为有益的了.当引入和理解微分演算（改变量、微分、导数）的基本概念时，可变比例尺的方法就更为有效，因为它能使得我们直观地深信，用微分代替函数改变量所引起的相对误差趋于零。

善于简明扼要地陈述否定概念（a不是(a_n)的极限，序列(a_n)不收敛，函数f在E上不一致收敛等等），以及分析基本定理前提的必要性和意义的能力，是灵活应用分析材料的先决条件.本书对上述问题加以特别的注意：指出了构造各种各样命题的否命题的方法，其中包括否定定义的方法.通过例子显示了在否定分析的基本定理原始条件的作用时出现分析情势的错综复杂性.最初的几章有较多的篇幅研究初等函数.最后一章揭示了以初等函数，特别是以常系数线性微分方程解为模型的许多连续过程.除此之外，涉及变系数线性微分方程和

* 原文为“彩色插图分析”；
* 指下文“可变比例法”——译者注。

非线性微分方程的问题将把读者引入非初等函数分析之中。数学日益增长的意义以及它的应用领域的扩充使得下列问题具有特别尖锐的意义，这些问题是："数学工艺学"、专门术语和符号体系。

对数学提出的基本要求之一是符号和基本定义的统一。实践证明，使用集合论和数理逻辑最简单的概念将使得分析原理的叙述变得紧凑与精确。本书系统地运用术语和符号严格地与中学数学教程资料相一致。

作者们对白俄罗斯农业机械化学院高等数学教研室主任、数学一物理学博士阿·普·里亚布什科(А·П·Рябушко)教授为改进本书所提出有价值的建议和意见表示衷心地感谢。

所有的意见和希望请寄明斯克马什洛娃大街11号"高等教育"出版社。

尤·斯·鲍格达诺夫教授

目　录

1. 数—基本的数学对象

1.1逻辑运算

数学的推理是依据逻辑规则来进行的，逻辑规则适用于命题，所谓命题就是能判定是真（1）或假（0）的语句。

根据所应用的原始命题在其结构上的特征，逻辑规则能够建立起复合命题并揭示出它们是真还是假。

基本逻辑运算符号

$\Longrightarrow$ 蕴涵，若…则…

$\Longleftarrow$ 由…得出

$\Longleftrightarrow$ 等价，当且仅当

$\wedge$ 并且，与

$\vee$ 或者

$\neg$ 非，否定

以下程式（真值表）确定了命题P、Q的复合命题真或假。

若P真，则$\neg P$假；反之，若P假，则$\neg P$真，这一事实可简记为表1.1

借助于真值表1.2～1.6能够揭示出运算$\Longrightarrow$、$\Longleftarrow$、$\Longleftrightarrow$、$\wedge$以及$\vee$的逻辑涵义：

表1.1

P	$\neg P$
1	0
0	1

表1.2

P	Q	$P\Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表1.3

P	Q	$P\Leftarrow Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

表1.4

P	Q	$P\Longleftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

表1.5

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

表1.6

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

所考察的逻辑运算使得我们还能够从一个论断推出另一

个论断。例如$P \Longrightarrow Q$的否定论断具有真值表1.7，这个表的最后一列同样也是表达式$P \wedge (\neg Q)$的真值（表1.8），它使得我们可以作出这些论断等值性的结论，即$\neg(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge (\neg Q)$。

表1.7

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

表1.8

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

逻辑规则还能判断任意有限多个命题$P, Q, R, \cdots, Z$的复合命题是真还是假（表1.9）。

表1.9

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

逻辑规则也同样适用于形式为$P(x)$的变元命题，即对x某些值，$P(x)$可能为真而对于x的另外一些值$P(x)$则x可能

是假的命题。例如“能被2整除的自然数”这一命题就是变元命题，它对于以0、2、4、6、8之一结尾的自然数是正确的而对以1、3、5、7、9结尾的自然数则是假的。

以下情形具有特别重要的意义：

1）对所有的x，$P(x)$真；

2）存在x，使得$P(x)$真。

对所有，利用符号$\forall$；而记号$\exists$表示存在，于是上述所指出的两种情形可简写为

1）$\forall x,\ P(x)$；

2）$\exists x,\ P(x)$。

对于变元命题来说，借助于符号$\forall$，$\exists$以及熟知的逻辑运算符号可以得出其等值形式。例如：

$(\forall x,\ P(x)\wedge\forall x,Q(x))\Longleftrightarrow(\forall x,(P(x)\wedge Q(x)))$；

$(\exists x,\ P(x)\vee\exists x,Q(x))\Longleftrightarrow(\exists x,(P(x)\vee Q(x)))$。

否定规则在数学分析中具有特别重要的意义：

$\neg(\exists x,P(x))\Longleftrightarrow(\forall x,\ \neg P(x))$；

$\neg(\forall x,P(x))\Longleftrightarrow(\exists x,\ \neg P(x))$。

1.2数

数是基本的数学概念。计数、度量以及计算时都要用到数。分析中实数集R和复数集K以及它们各种各样的子集起着重要的作用。我们用坐标直线几何地表示实数集R。（图1.1）

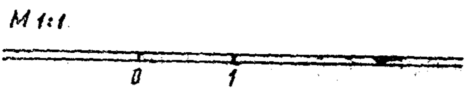

图1.1

分析中图解的实质是使分析结构变得清晰起来。当然，这里应当考虑到某些标志的约定性。在这一节内我们用两条水平直线间的平面部分表示直线R，而点则用铅垂的小线段表示。假若被描绘的各点彼此连在了一起，虽然这些点並不连续地覆盖了R的相应区段，此时我们利用两条交错的细斜线条表示。被集合R中的点所连续覆盖的区段则画为连续的黑色带形。图1.2中，比例为1：1的取2 cm作为长度单位。图1.2给出了主要数集的几何表示：

N——自然数集

Z——整数集

D_n——n位十进小数集

D——十进小数集

R——实数集。

图1.2

我们这样来记有限或无限的十进小数，使得它的小数部分非负。例如：

$$-2=\bar{2},$$

$$-145.876=\overline{146}.124.$$

当取定足够大的比例时，每一个有限十进小数将同坐标直线上刻度点中某一个点重合。对于无限循环小数$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n(\nu)$（$\nu$——周期）来说，所选定比例越大，它在坐标直线上表示出来就越精确。例如在图1.3上就分别给出了以1：1和10^5：1的比例时，数$a=\bar{1}.23(3)$的表示。

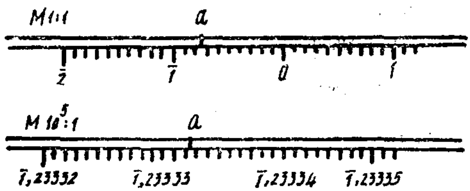

图1.3

$a=\pi=3.14159\cdots$是作为无理数的一个真实例证（图1.4）。

十进位数，也仅仅是十进位数有两种表示为无限十进小数的形式，它们分别以0和9为周期。例如：

$$1.57=1.570\cdots0\cdots=1.569\cdots9\cdots;$$

$$1=1.0\cdots0\cdots=0.99\cdots=0.9\cdots9\cdots;$$

$$\bar{1}=\bar{1}.0\cdots0\cdots=\bar{2}.99\cdots9\cdots.$$

如果将实数a写为以0为周期的十进小数形式，那么我们称此形式为实数a的标准形式。

在实数a的标准形式

图1.4

$$a = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

中，十进小数

$$a|_n = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n;$$

$$a|^n = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n + 10^{-n}$$

分别称为数a的具有 n 位小数的不足近似值与过剩近似值。例如：

$$\pi|_2 = 3.14, \quad \pi|^2 = 3.15, \quad \pi|_5 = 3.14159.$$

对于具有标准形式的两个实数a、b，下列比较准则成立：

$$a = b \Longleftrightarrow (\forall n, \ a|_n = b|_n)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall n, \ a|^n = b|^n);$$

$$a < b \Longleftrightarrow (\exists n, \ a|_n < b|_n)$$

$$\Longleftrightarrow (\exists n, \ a|^n < b|^n).$$

如果用一般形式的无限十进小数表示实数a和b，即

$$a=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$
$$b=\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$$

那么

$$a<b\Longleftrightarrow(\exists n,\ \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n+10^{-n}<\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$$

如果$\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n+10^{-n}=\beta_0.\beta_1\cdots\beta_n$, $\forall n\in N\Longrightarrow$ $a=\alpha_0.99\cdots9\cdots\wedge b=(\alpha_0+1).00\cdots0\cdots$, 则$a=b$。

图1.5内以1：1和10^3：1的比例标出实数$a=3.14$和$b=\pi$。

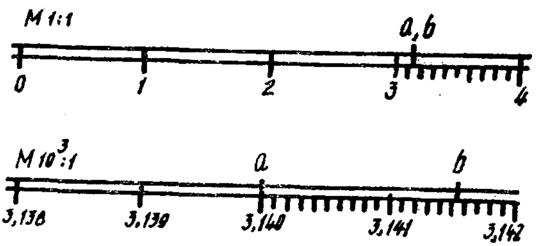

图1.5

1.3集合及其运算

数学中集合这个概念是原始的概念，也可以说集合是联系着某些共同特征的对象（又称为元素）的总体。但是后一段话不能认为是集合的严格定义，因为在它里面仅仅是用“总体”这个概念偷换概念“集合”而已。

集合可以是有限的或者是无限的，即它可能含有有限多个元素或者由无限多个元素组成。其元素是数的集合称为数集。本节内我们约定用矩形表示平面E，而把平面E的子集X、Y、Z作为显示出各种各样情况的集合模型，即简化

了的集合实例。

在将插图中所示图形的内点理解为集合X、Y、Z的情况下，使我们联想起集合论的主要记号：

$\in$ 属于，$\bar{\in}$ 不属于

例如，在图1.6上，$x\in Y$，$y\bar{\in}X$，$z\bar{\in}X$，$x\bar{\in}Y$，$y\in Y$，$z\bar{\in}Y$。

$\subset$ 包含，$\bar{\subset}$不包含

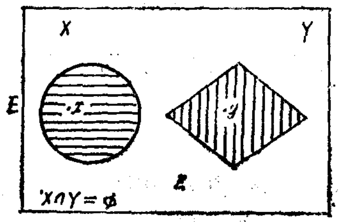

图1.6

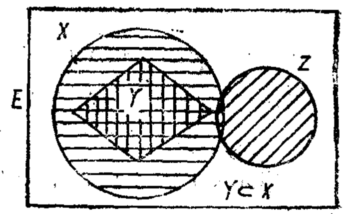

图1.7

在图1.7上，$Y\subset X$，即Y是X的子集；

$$Y\subset X\Longleftrightarrow(\forall y, y\in Y\Longrightarrow y\in X).$$

$Z\bar{\subset}X$表示Z不含于X或Z不是X的子集，即

$$Z\bar{\subset}X\Longleftrightarrow(\exists z, z\in Z\wedge z\bar{\in}X).$$

$\cap$ 交，$\cup$ 并

图1.8所确定的集合Z作为集合X与Y的交集，即

$$Z=X\cap Y\Longleftrightarrow(\forall z, z\in Z)\Longrightarrow(z\in X\wedge z\in Y).$$

集合Z，如果它的元素至少属于集合X、Y中的一个，则Z叫做X、Y的并，并以$Z=X\cup Y$表示（图1.9），即

$$Z=X\cup Y\Longleftrightarrow(\forall z,\ z\in Z)\Longrightarrow(z\in X\vee z\in Y))$$