高等工科数学系列课程教材

概率论与数理统计

孙振绮 总主编
孙振绮
丁效华 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工科数学系列课程教材

概率论与数理统计

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　丁效华
副主编　伊晓东　孙建邵

机 械 工 业 出 版 社

本书是以教育部（原国家教委）1995年颁布的高等工科院校本科概率论与数理统计课程的教学基本要求为纲，广泛吸取国内外知名大学的教学经验编写而成的.

全书共8章：随机事件与概率，随机变量及其概率分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验. 书中配有大量例题与习题，便于自学.

本书可作为工科院校本科生的数学课教材，也可供准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/孙振绮，丁效华主编 .—北京：机械工业出版社，2005.1

（高等工科数学系列课程教材）

ISBN 7-111-15909-8

Ⅰ.概… Ⅱ.①孙…②丁… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第138981号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：郑 丹 责任编辑：郑 丹 郑 玫

版式设计：张世琴 责任校对：张晓蓉 封面设计：鞠 杨

责任印制：洪汉军

原创阳光印业有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005年2月第1版·第1次印刷

1000mm×1400mm B5·8.625印张·333千字

定价:22.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

68326294、68320718

前　言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法，为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等工科数学教学过程的优化设计”课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖．这套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结．其中包括：《工科数学分析教程》（上，下），《空间解析几何与线性代数》，《概率论与数理统计》，《复变函数论与运算微积》，《数学物理方程》，《最优化方法》，《计算技术与程序设计》等．

这套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养．具体地，①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与相互交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机地结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别．

本套教材由孙振绮任总主编.

我们知道，测度论给予空间点集一种定量的描述，以此出发来研究数学分析上的许多基本概念都得到比以前更为深刻的结果. 俄国数学家A.H. 柯尔莫哥洛夫把概率理解为一种抽象测度，这使概率论的面目完全改观，并拓展了概率论的研究范围. 本书介绍了他提出的概率的公理化定义，包括可测集合、概率空间等概念，并由此出发介绍概率论的某些基本概念与基本定理，从而加强了概率论与数理统计这门课程有关理论基础与数学思想的叙述.

此外，我们认为，必须把教师与学生、内容与方法、教学活动看作是教学过程中三个有机联系的整体，教学必须实现两个结合（即传授知识与培养学习能力，发挥教师主导作用与调动学习积极性的结合)，为此，在教材内容的编写上十分注意教师运用启发式进行教学，有利于教师积极组织教学过程，充分调动学生学习的积极性，不断地引导学生进行深入思维.

书中每节内容都包括基本概念、基本理论、例题、练习，每章末附有综合习题．本书注意知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使之形成一个有机的整体，使内容具有较高的系统性与逻辑性，从而有利于学生从整体结构上掌握知识的共同本质和内在联系．作为工科数学教材，本书注意突出工科特点，密切联系实际，书中含有大量的结合实际的应用题．

本书可供工科大学自动控制、计算机、机电一体化、工程物理、通信、电子等数学要求较高的专业本科生使用．按大纲讲授需50学时，全讲需64学时．

本书由孙振绮、丁效华任主编，伊晓东、孙建邵任副主编．参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）的李福梅、邹巾英、杨毅、范德军．刘铁夫教授、李宝家副教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见，在此对他们的辛勤劳动表示衷心的感谢！

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意！

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

目 录

第 1 章 随机事件与概率

1.1 随机事件与概率的概念

包括概率论在内,每门数学课程都有自己的、与所研究对象相联系的基本概念,这些概念是从实际生活现象中抽象出来的. 如在概率论中将介绍“随机事件”与“随机事件的概率”等一些基本概念. 这要求我们必须对这些概念给出数学定义,并用数学的方法研究它们的某些合乎客观实际的度量性质,这就构成了概率论的基本内容.

首先看几个例子.

例 1.1 掷一均匀对称的硬币,观察其正反面出现的情况.

例 1.2 掷一颗骰子,观察出现的点数.

例 1.3 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数.

例 1.4 从一批灯泡中任取一只,测试它的使用寿命.

这里所进行的“观察”、“测量”、“统计”(以后统称为试验) 有下述共同特点:

(1) 试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 试验的所有可能结果不止一个,而且是事先知道的.

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但究竟出现哪一个结果,试验前不能确切预言.

我们将具有上述三个特点的试验,称为随机试验,简称试验,以字母 E 表示.

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事情称为随机事件,简称事件,以字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

练习

1. 试写出例 1.1 ~ 例 1.4 中的随机事件.

一般地,随机试验的每一个可能结果,称为基本事件. 由多个基本事件组成的事件,称为复合事件.

为了以后讨论问题方便,我们把以下两种事件看作随机事件:

必然事件 S:在一定条件下进行试验必然发生的事件.

不可能事件 $\varnothing$:在一定条件下进行试验不可能发生的事件.

同一个随机试验中的不同的随机事件在试验中出现的可能性有的大些,有的小些,有些事件出现的可能性彼此大致相同. 事件出现的可能性大小,是客观存在

的,是事件的基本属性.

为了能从数学方面研究随机事件,必须定量刻画事件出现的可能性的大小,即使每一个事件都应有一个确定的数与之对应,并且等可能性的事件对应有相等的数,较大可能性的事件对应有较大的数,不可能事件对应于零,必然事件对应于1,因而,任意随机事件 A 都有一个数(记为 $P(A)$)与之对应,并且 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

"随机事件"、"随机事件的概率"等严格的数学概念应从对应的"日常通俗概念"中概括出来,既要反映它们的本质特点,同时又应是完全精确的概念.

概率论的基本概念的建立基于一个简单但又非常有益的思想,即样本空间的思想.

1.2 样本空间与古典概率

为了利用点集的知识描述随机事件,我们引进样本空间的概念.

称随机试验E的所有基本事件所构成的集合为E的样本空间,记为 S^*. S^* 中的元素就是E的基本事件.如果抛开基本事件的具体含义,则可以把 S^* 看成一个抽象点集,每一个基本事件,就是 S^* 中的一个点,所以基本事件也称为样本点,用 e 表示.

由于随机事件是基本事件或是由基本事件组成的复合事件,所以随机事件本身就是样本空间 S^* 的一个子集. 如例 1.2 中的样本空间 $S^* = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,其中 e_i 表示"出现 i 点"的基本事件,而在随机试验中"出现偶数点"与"出现不小于5点"的事件可分别表示为 $A^* = \{e_2, e_4, e_6\}$,$B^* = \{e_5, e_6\}$.

由此可见,引入样本空间以后,事件 A 便可定义为样本空间的子集 A^*.而且,当且仅当子集 A^* 中的一个基本事件在试验中发生了,才称事件 A 发生.

例 1.5 袋中装有编号为0,1,2,3,4,5的6个大小相同的小球.每次从袋中任意取出一个球,观察出现的编号是随机试验.

基本事件(样本点)为{0号},{1号},{2号},{3号},{4号},{5号}.

样本空间 S^* = {0号,1号,2号,3号,4号,5号}.

"编号为偶数" = {0号,2号,4号},"编号为奇数" = {1号,3号,5号}也都是随机事件.

若用 x 表示取出球的编号,$A^* = \{x \mid x \leqslant 3\}$,$B^* = \{x \mid x < 6\}$,$C^* = \{x \mid x > 6\}$,$D^* = \{x \mid 1 < x < 5\}$都是随机事件.$B^*$ 是必然事件,C^* 是不可能事件.

例 1.6 投掷两枚匀称硬币,观察正、反面出现的情况也是随机试验.

基本事件: {(上,下)}(第一枚正面朝上, 第二枚正面朝下),

{(下,上)}{(上,上)},{(下,下)}.

样本空间 S^* = {(上,上),(上,下),(下,上),(下,下)}.

事件 A^*(两个正面朝上) = {(上,上)}.

事件 B^*(至少一个正面朝上) = {(上,上),(上,下),(下,上)}.

事件 C^*(恰好一个正面朝上) = {(上,下),(下,上)}.

事件 D^*(两个正面朝下) = {(下,下)}.

有了样本空间的概念,我们将从一个简单的例子出发,引出古典概率定义.

掷一颗均匀的骰子,记 e_1 = "出现1点,…,e_6 = "出现6点",A = "出现偶数点",B = "出现的点数大于4";考虑以上事件的概率.

根据直观想象,人们很自然地认为 $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_6) = \frac{1}{6}$,$P(A) = \frac{1}{2}$,$P(B) = \frac{1}{3}$.

下面仔细分析一下这个试验:

(1) 这个试验的所有可能结果只有6个,其样本空间为 $S^* = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

(2) 由于骰子是均匀的,所以每一个基本事件出现的可能性相等,都等于 $\frac{1}{6}$.

(3) 事件 $A^* = \{e_2, e_4, e_6\}$ 发生的充要条件是 e_2, e_4, e_6 中有一个发生,所以事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{A^* \text{所包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

同理,

$$P(B) = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{B^* \text{所包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

具有本例特点的试验称为古典概型试验,它是概率论初期研究的主要对象,一般定义如下:

定义 1.1 设 E 为一试验,若它的样本空间 S^* 满足下面两个条件:

(1) 只有有限个基本事件 —— 有限性.

(2) 每个基本事件发生的可能性相等 —— 等可能性.

则称 E 为古典概型的试验,简称为古典概型.

在古典概型的情况下,事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{A^* \text{所包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1}$$

1.3 事件的关系与运算

在实际问题中,往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联

系.详细分析事件之间的关系,不仅可以帮助我们更深入地认识事件的本质,而且可以简化一些复杂的事件.

在下面的叙述中,为直观起见,用平面上的一个矩形域表示样本空间 S^*,矩形内的每一点表示样本点(基本事件),并用矩形中的小圆和大圆分别表示事件 A 和事件 B,下面我们来定义事件之间的各种关系和运算.

1. 事件的包含

若事件 A^* 中的每一个样本点都属于事件 B^*,则称事件 B 包含事件 A,记为 $B \supset A$,或 $A \subset B$(图 1.1).

2. 事件相等

若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

3. 事件 A 与 B 之和(并)

$A \cup B$(或 $A + B$)表示事件 A 与 B 至少有一个发生(图 1.2).

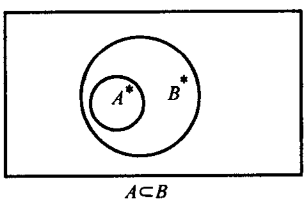


图 1.1　$A \subset B$

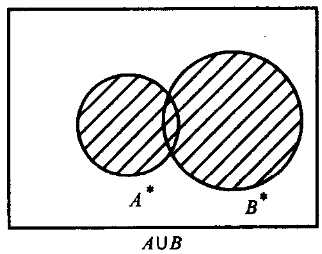


图 1.2　$A \cup B$

推广:

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 至少有一个发生.

性质:

(1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

(2) $A \cap (A \cup B) = A, B \cap (A \cup B) = A \cup B$

(3) $A \cup A = A$

4. 事件 A 与 B 的差

$A - B$ 表示事件 A 发生而 B 不发生.

性质:

(1) $A - B \subset A$

(2) $(A - B) \cup A = A, (A - B) \cup B = A \cup B$

5. 事件 A 与 B 的积

$A \cap B$(或 AB) 表示事件 A 与 B 同时发生(图 1.3).

推广:

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 同时发生.

性质:

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

(2) $(A \cap B) \cup A = A, (A \cap B) \cup B = B$

(3) $A \cap A = A$

(4) $(A - B) \cap A = A - B, (A - B) \cap B = \varnothing$

6. 互斥事件

在试验中,若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称 A、B 为互斥(不相容) 事件(图 1.4).

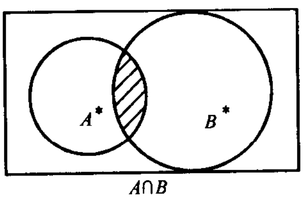


图 1.3　$A \cap B$

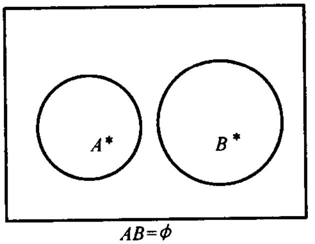


图 1.4　$AB = \varnothing$

推广:在试验中,若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意两个都是互斥的(不相容),则该事件组称为互斥(不相容) 事件组.

7. 对立事件

每次试验中,“事件 A 不发生” 的事件称为事件 A 的对立事件或逆事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$(图 1.6).

性质:

(1) $A \cup \overline{A} = S$(必然事件)

(2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$(不可能事件)

由定义可知:对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

8. 事件的运算律(与集合的运算律相似)

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

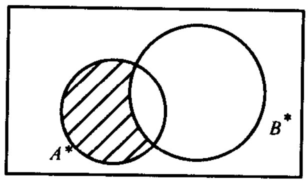
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(4) 摩根律 $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$$

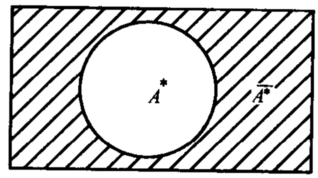
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k, \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$$

(5) 减法运算 $A - B = A\bar{B}$(或 $A \cap \bar{B}$)(图 1.5)



$A-B$

图 1.5 $A - B$



$\bar{A}$

图 1.6 $\bar{A}$

前面利用集合的概念叙述了事件的概念、关系及运算．现将概率论与集合论中相应部分作一对照，如表 1.1 所示．

表 1.1 概率论与集合论中相应部分对照表

符号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间(全集)S^*
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件(样本点)	元素
A	事件	子集 A^*
$\bar{A}$	A 的对立事件	A^* 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A^* 是 B^* 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A^* 与 B^* 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A^* 与 B^* 的和集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	A^* 与 B^* 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A^* 与 B^* 的差集
$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A^* 与 B^* 没有公共元素

例 1.7 设 A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来．

(1) A 出现，B,C 都不出现．(2) A,B 都出现，C 不出现．

(3) 三个事件都出现．(4) 三个事件中至少有一个出现．

(5) 三个事件都不出现．(6) 不多于一个事件出现．

(7) 不多于两个事件出现.(8) 三个事件至少有两个出现.

(9) A,B 至少有一个出现,C 不出现.(10) A,B,C 中恰好有两个出现.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$ (2) $AB\bar{C}$ (3) ABC (4) $A+B+C$ (5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB+BC+AC}$

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 或 $AB+BC+AC$

(9) $(A+B)\bar{C}$

(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

例 1.8 设一个工人生产了四个零件,A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 $(i=1,2,3,4)$,试用 A_i 表示下列各事件.

(1) 没有一个是次品. (2) 至少有一个是次品.

(3) 只有一个是次品. (4) 至少有三个不是次品.

(5) 恰好有三个是次品. (6) 至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ 或

$\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4+$
$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+$
$A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4+$
$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$

(3) $\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4$

(4) $A_1A_2A_3\bar{A}_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$

(5) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$

(6) $A_1A_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3A_4+A_1\bar{A}_2A_3A_4+A_1A_2\bar{A}_3A_4+A_1A_2A_3\bar{A}_4$

例 1.9 下列各式说明什么包含关系.

(1) $AB=A$.(2) $A+B=A$.(3) $A+B+C=A$.

解 (1) $AB=A \Leftrightarrow AB\subset A$ 且 $A\subset AB$

由 $A\subset AB \Rightarrow A\subset A$ 且 $A\subset B \Rightarrow A\subset B$

(2) $A+B=A \Leftrightarrow A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$

由 $A+B\subset A \Rightarrow B\subset A$

(3) $A+B+C=A \Leftrightarrow A+B+C\subset A$ 且 $A\subset A+B+C$

由 $A+B+C\subset A \Rightarrow B+C\subset A$

练习

2. 一名射手连续向某一目标射击三次,事件 A_i 表示该射手第 i 次击中目标 $(i=1,2,3)$.试用 A_i 表示下列事件.

(1) 第三次击中而第二次未击中目标.

(2) 三次都击中目标.

(3) 前两次击中目标,第三次未击中目标.

(4) 后两次射击至少有一次击中目标.

(5) 三次射击中至少有一次击中目标.

(6) 三次射击至少有两次击中目标.

(7) 三次射击至多有一次击中目标.

(8) 三次射击恰有一次击中目标.

(9) 三次射击至多有两次击中目标.

(10) 三次射击恰有两次击中目标.

(11) 前两次射击至少有一次未中目标.

(12) 后两次射击都未击中目标.

(13) 第一次未击中,后两次至少有一次击中目标.

3. 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(取出不再放回),事件 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示第 i 次取到次品. 试用 A_i 表示如下事件.

(1) 五次全取到正品.

(2) 五次中恰好有四次取到正品.

(3) 五次中至少有四次取到次品.

(4) 五次中至多有一次取到正品.

(5) 五次中恰好有一次取到正品.

(6) 五次中至少有四次取到正品.

1.4 古典概率的性质与计算

定理 1.1 事件的古典概率具有如下性质:

(1) 对任一事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) $P(S)=1$

(3) 若 A,B 互不相容,则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

证 由古典概率的定义,性质(1)、(2)是显然的,现证性质(3).

设 $S^*=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,$A^*=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}\}$,$B^*=\{e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_l}\}$. 由于 A,B 互不相容,它们不包含相同的基本事件. 故

$$A^* \cup B^*=\{e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_{k_1},\cdots,e_{k_l}\}$$

由式(1.1)

$$P(A\cup B)=\frac{r+l}{n}=\frac{r}{n}+\frac{l}{n}=P(A)+P(B)$$

证毕.

性质(3) 不难推广到任意 n 个事件中,即若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.2}$$

式(1.2) 称为概率的加法公式,也称为概率的有限可加性.

由定理 1.1 可推出下列古典概率的性质:

(1) $P(\bar{A})=1-P(A)$

(2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

特别地,当 $B\subset A$ 时,$P(A-B)=P(A)-P(B)$,且 $P(B)\leqslant P(A)$.

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\\&P(BC)-P(AC)+P(ABC)\end{aligned}$$

一般地,对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

例 1.10 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$,则 A,B,C 全不发生的概率为________.

解

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)\\&\quad-P(ABC)\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}-P(ABC)\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-0\\&=\frac{7}{12}(\text{因为 } ABC\subset AB)\end{aligned}$$

例 1.11 $P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(\overline{AB})=$ ________.

解 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$

故

$$P(AB)=0.4$$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

下面我们将介绍利用古典概率的定义及性质来计算有关古典概率的几个典型问题:摸球问题、分房问题、随机取数问题.

首先指出,古典概率的计算常需用到排列组合中的几个基本结论.

1. 加法原理

设完成一件事有 n 类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事),若第一类方法有 m_1 种,第二类方法有 m_2 种,……,第 n 类方法有 m_n 种,则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

2. 乘法原理

设完成一件事需有 n 个步骤(仅当 n 个步骤都完成,才能完成这件事),若第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,……,第 n 步有 m_n 种方法,则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法.

3. 排列

从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.从 n 个不同元素取出 m 个元素的所有排列种数记为

$$P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

从 n 个不同元素中全部取出的排列称为全排列,其排列的种数记为

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

规定 $0! = 1$.

4. 允许重复的排列

从 n 个不同元素中有放回地取 m 个按照一定顺序排列成一列.其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{个}} = n^m$$

5. 不全相异元素的全排列

若 n 个元素中,有 m 类 $(1 < m \leqslant n)$ 本质不同的元素,而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素 $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$,则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列.其排列的种数为

$$N = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

6. 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个元素,不管其顺序并成一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合,其组合总数,记为 C_n^m,且有