

中华人民共和国地质矿产部

地质专报

七 普查勘探技术与方法 第3号

虚分量电磁法

许洪海 王守坦 著

地质出版社

中华人民共和国地质矿产部

地 质 专 报

七 普查勘探技术与方法 第3号

虚 分 量 电 磁 法

许洪海 王守坦 著

地 质 出 版 社

内 容 简 介

本专报作为虚分量电磁法各研究阶段的全面总结,内容包括:方法理论、无参考线虚分量仪的原理和技术性能、野外工作方法、解释推断法和实例以及附录模型实验技术。在方法理论方面,系统地论述了均匀场和磁偶极子场,并以后者为重点。在解决异常场正演问题时,主要采用计算机模拟的方法,以计算量较小的有限差分法、积分方程法和它们的混合方法为主,在复杂地电条件下还采用了有限元法。解释推断中介绍了定性解释、半定量解释和数值解释的方法。野外工作部分讨论了各种偶极装置的适用条件,以及采用几种装置组合以利提高解释能力的办法。本专报可供物探技术人员阅读,也可作为地质院校物探专业学生和研究生的参考书。

中华人民共和国地质矿产部
地质专报

七 普查勘探技术与方法 第3号

虚 分 量 电 磁 法

许洪海 王守坦 著

责任编辑:袁方

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ 印张: $11\frac{1}{2}$ 插页 2 字数: 267,500

1987年6月北京第一版·1987年6月北京第一次印刷

印数: 1—1,100册 国内定价: 4.25元

统一书号: 13038·新312

前 言

电磁法是五十年代初开始发展起来的一种新的物探方法。由于它具有区分异常的能力和工作效率高等优点,所以得到较快的发展。在初期主要是研究总和场观测方法,但因这类方法有受地形和覆盖层影响较大、探测深度较浅等缺点,故适用地区的局限性较大。在地形和地电条件较好的国家,如瑞典、加拿大等国,该方法取得了良好的找矿效果。而在我国,地形和地电条件均较复杂,观测总和场的方法未能取得好效果。为了研制一种适用于我国条件的电磁法,原北京地质学院物探系低频感应法科研组于1962年开始研究虚分量电磁法。这是一种纯异常绝对测量的方法,它具有受地形影响小,发现异常能力强和资料便于解释等优点。曾先后研制了回线场多频虚分量-振幅仪、同点偶极仪,并于1976年研制成功无参考线虚分量仪,后者已小批量生产。由于该仪器接收机与发射机之间没有参考导线相连接,故可采用压制覆盖层影响较好的旁线(α, z)装置进行工作,而且还可采用多种场源形式和多种工作装置,所以比较机动灵活,适应性强。实践表明此仪器能适用于我国的条件。

在方法理论方面,1964年完成回线场虚分量异常的解释方法,1971年在偶极场的模型实验结果基础上总结出“似作用中心”的近似理论,并依此理论建立了偶极场虚分量异常的定性和半定量解释方法。最近几年又开展了计算机模拟和数值解释的研究,已完成虚分量异常的数值正演和数值反演,三维导体和导电导磁体电磁响应的数值解,以及复杂地电条件下电磁响应的数值计算。

曾在不同类型矿区和不同地区进行过野外试验,都取得了良好的效果,并在广泛实践的基础上总结出一套较合理的工作方法。

本专报将这些研究成果进行了系统的总结,包括方法理论、仪器、野外工作方法、资料解释方法和部分实例,同时也对一些基本理论作了简要介绍。

长期参加虚分量电磁法科研组的同志有许洪海(Xu Honghai)、王守坦(Wong Shou-tan)、杨旭(Yang Xu)、孙正纲(Sun Zhenggang)等。潘玉玲、鲁永康、宁淑敏等也曾参加科研组工作。张胜业、杨庆锦、俞黎明等参加了数值计算工作。本专报的第七、八章和附录由王守坦编写,其余均由许洪海编写。由于我们水平有限,难免有错误之处,请同志们批评指正。

在整个研究过程中,始终得到地质矿产部科技司和物化探局的积极支持,在此表示衷心的感谢,并对协助过我们进行野外试验的物探队和地质队表示感谢。

本专报摘要由靳职理、安海忠译成英文,韩晓泉校。

目 录

第一章 概论	1
第一节 低频电磁法的物理基础.....	1
第二节 虚分量电磁法及其特点.....	4
第三节 电磁场的基本方程.....	4
第二章 均匀场	8
第一节 导电导磁水平圆柱体和球体的异常场.....	8
第二节 板状导体的异常场.....	16
第三节 参数与导体几何形状的关系.....	23
第四节 异常源电性不均匀性的影响.....	25
第三章 偶极场	29
第一节 磁偶极子场的一些特性.....	29
第二节 磁偶极子场中导电球体的异常场.....	32
第三节 薄板状导体电磁响应的数值解及各种装置的异常.....	34
第四节 三维导体异常的数值计算.....	49
第五节 线框装置及其他.....	52
第六节 三维导电导磁体电磁响应的数值解.....	60
第四章 复杂地电条件下的磁偶极子场	65
第一节 无限均匀介质中的偶极子场.....	65
第二节 均匀大地上垂直磁偶极子场.....	69
第三节 二层介质上的垂直磁偶极子场.....	73
第四节 均匀大地上水平磁偶极子场.....	76
第五节 存在导电围岩和导电覆盖层时二度导体的异常场.....	81
第五章 解释推断	86
第一节 均匀场资料的解释.....	86
第二节 偶极场资料的解释.....	91
第六章 无参考虚分量仪	101
第一节 无参考线虚分量观测方法的原理.....	101
第二节 整机设计.....	102
第三节 发射机部分.....	104
第四节 接收机部分.....	108
第七章 野外工作方法	118
第一节 回线法的一次场及各种影响.....	118

第二节 工作地区及方法的选择.....	128
第三节 回线法的野外工作方法.....	129
第四节 偶极场的野外工作方法.....	132
第八章 应用实例.....	138
附 录 物理模拟实验.....	157
参考文献.....	163
英文摘要.....	165

CONTENTS

Chapter 1 Introduction	1
1.1 Physical principles of EM methods at low frequency	1
1.2 Quadrature EM method and its characteristics	4
1.3 Fundamental EM field equations	4
Chapter 2 Uniform EM field	8
2.1 The responses of a conducting and permeable horizontal cylinder or sphere	8
2.2 The responses of conducting plates	16
2.3 The relationship between the response parameter and the shape of a conductor	23
2.4 The effect of the inhomogeneity of a conductor	25
Chapter 3 The EM field of a magnetic dipole	29
3.1 Some behaviors of a magnetic dipole field	29
3.2 The response of a conducting sphere in the field of a magnetic dipole	32
3.3 Numerical solution of the response of a thin plate conductor and some results in various configurations	34
3.4 Numerical modelling on the response of a three-dimensional conductor	49
3.5 Loop source and some other configurations	52
3.6 Numerical solution of the response of a three-dimensional body with both conductivity and permeability	60
Chapter 4 The EM field of a magnetic dipole in a complex geoelectric situation	65
4.1 The EM field of a magnetic dipole in an uniform infinite space	65
4.2 The EM field of a vertical magnetic dipole on the surface of an uniform Earth model	69
4.3 The EM field of a vertical magnetic dipole on the surface of a two-layer Earth model	73
4.4 The EM field of a horizontal magnetic dipole on the surface of an uniform Earth model	76
4.5 The response of a two-dimensional conductor in the presence of conducting host rock and overburden	81

Chapter 5 Interpretation of data	86
5.1 Interpretation of data in an uniform EM field.....	86
5.2 Interpretation of data in a magnetic dipole field	91
Chapter 6 Quadrature component instrument without intercon-	
 ting cable	101
6.1 The principle of measuring Quadrature component without in-	
terconnecting cable	101
6.2 The design of the solid instrument	102
6.3 The transmitter	104
6.4 The receiver	108
Chapter 7 Field techniques	118
7.1 The effects of primary EM field and other factors in a loop	
source field	118
7.2 The choice of work site and method	128
7.3 The field techniques for loop source method.....	129
7.4 The field techniques for magnetic dipole source method	132
Chapter 8 Some examples of application.....	138
Appendix Physical modelling experiments	157
References	163
Abstract in English.....	165

第一章 概 论

第一节 低频电磁法的物理基础

电磁法找矿的基本原理是基于物理学中的电磁感应定律，它可用图1.1.1来作扼要的说明。

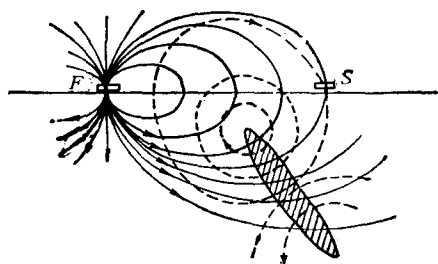


图 1.1.1 电磁法原理示意图

实线——一次场磁力线； 虚线——二次场磁力线，
 F —发射线圈； S —接收线圈

Fig.1.1.1 General principle of electromagnetic methods ("—" , lines of magnetic force of the primary field, "----", lines of magnetic force of the secondary field, F , transmitting coil, S , receiving coil)

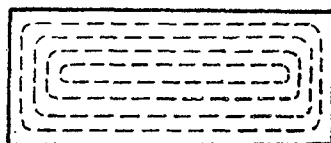


图 1.1.2 薄板状导体内感应电流示意图

Fig.1.1.2 Eddy currents within a conducting sheet

在地面放有一发射机，它供给发射线圈(F)以交变电流，此交变电流在发射线圈四周建立了交变磁场，通常叫做一次场。若地下有良导电矿体存在，则矿体被一次场所激发，在矿体内便产生感应电流，这是一种涡旋电流(涡流)。矿体内的涡流也在空间产生交变磁场，叫做二次场或异常场。在离发射线圈一定距离的地方放有接收线圈(S)，它接收一次场和二次场，再用接收机把所接收的场强大小读出来。通过分析二次场的变化规律来达到找矿和其它目的。

研究矿体所产生的二次场的规律，是方法理论的主要内容。如上所述，二次场是由矿体内的感应电流所形成。为此首先以简化模型讨论矿体内感应电流的分布规律和它的特性。

设在垂直均匀交变磁场中，有一水平薄板状导体，由于一次场的激发，在薄板内产生感应电流。感应电流线的分布如图1.1.2所示，是一些同轴线的长方形闭合电流线。于是可以把薄板导体看成由无限多长方形闭合线圈叠加而成。先计算出一次场在每一圈中直接感应出的电流，再求各圈之间互感产生的电流，然后得出每一闭合线圈中最终的感应电流密度，就可算出所有感应电流产生的二次场。

当一次场穿过薄板导体时，每一闭合线圈都产生一个感应电动势 ε 。第 n 圈的感应电动势

ε_n 的大小为

$$\varepsilon_n = -\frac{d\Phi_n}{dt}$$

这里 t 为时间； Φ_n 为通过第 n 圈的磁通量，它的数值为一次场 H_1 和第 n 圈面积 S_n 的乘积。若一次场为正弦形变化的交变磁场，即 $H_1 = H_0 \sin \omega t$ （这里 H_0 为一次场的振幅， ω 为圆频率， $\omega = 2\pi f$ ），则第 n 圈的感应电动势为

$$\varepsilon_n = -H_0 S_n \frac{d \sin \omega t}{dt} = -H_0 S_n \omega \cos \omega t$$

第 n 圈中的感应电流 $i_n = \frac{\varepsilon_n}{R_n}$ （ R_n 为第 n 圈的电阻 且 $R_n = \frac{L_n}{\sigma \cdot \Delta Q_n}$ ； L_n 为第 n 圈的周长，且 $L_n = 2\alpha + 2b$ ； α 为长边； b 为短边； ΔQ_n 为第 n 圈导线的截面积； σ 为薄板导体的电导率）。所以 i_n 有如下的表达式

$$i_n = \frac{\varepsilon_n}{R_n} = -H_0 \cdot \sigma \cdot \Delta Q_n \cdot \omega \cdot \frac{\alpha b}{2\alpha + 2b} \cdot \cos \omega t$$

当 $\alpha \gg b$ 时，则 $\frac{\alpha b}{2\alpha + 2b} \approx \frac{b}{2} = l_n$ ， l_n 为第 n 圈的半宽，因此 i_n 为

$$i_n = H_0 \cdot \sigma \cdot \Delta Q_n \cdot \omega \cdot l_n \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

第 n 圈的感应电流密度 J_n 为

$$J_n = \frac{i_n}{\Delta Q_n} = H_0 \cdot \sigma \cdot \omega \cdot l_n \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.1.1)$$

由此式可看出：每圈感应电流密度的大小与一次场的强度 H_0 、一次场的频率 ω 、矿体的电导率 σ 和每圈的半宽 l_n 成正比，其相位则较一次场的相位落后 90° 。因此，由各圈感应电流产生的二次交变磁场也与 H_0 、 ω 、 σ 、 l_n 成正比，并且与一次场有 90° 的相位差。

当每圈都有电流通过时，则各圈之间将引起互感作用。就第 n 圈而言，除它以外各圈中的感应电流所形成的磁场，同时作用于第 n 圈，也会引起感应电流，这一感应电流用 i'_n 来表示。计算 i'_n 的大小，需先求出其它各圈感应电流 i_i 所形成的磁场对第 n 圈的磁通量 Φ' ，其表示式为

$$\begin{aligned} \Phi' &= -H_0 \cdot \sigma \cdot \omega \cdot s_n \cdot \cos \omega t \cdot \sum_{i=1}^{\infty} k_i l_i \Delta Q_i \\ &= -H_0 \cdot \sigma \cdot \omega \cdot s_n \cdot \cos \omega t \cdot M_n \end{aligned}$$

这里 k_i 为互感系数， $M_n = \sum_{i=1}^{\infty} k_i l_i \Delta Q_i$

$$\text{则} \quad i'_n = -\frac{1}{R_n} \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -M_n \cdot H_0 \cdot \sigma^2 \cdot \omega^2 \cdot l_n \cdot \Delta Q_n \cdot \sin \omega t$$

可见，由互感作用产生的感应电流 i'_n 与一次场频率的平方成正比，而相位则与一次场相反，亦即有 180° 的相位差。换言之， i'_n 所产生的磁场在矿体内始终是与一次场的方向相反，使激发场减弱。故 i'_n 增大将使 i_n 减小， i_n 减小使 i'_n 也减小，但 i'_n 减小却又使 i_n 增大，它们间相互制约。在某一频率时， i_n 与 i'_n 有一平衡值，而且该值是随频率而变化。

前面说的感应电流 i_n 与频率一次方成正比， i'_n 与频率二次方成正比的规律实际上只适用于频率较低的情况，因这时 i'_n 很小，对 i_n 的影响可以忽略不计。当频率较高时，由于感应电

流与频率关系复杂化, 并出现趋肤效应而使上述模型不适用。

为了简单的分析异常场的全部频率特性, 可采用另一物理模拟电路来说明, 即把导电矿体看成一个简单的、由电阻 R 和电感 L 串联的闭合回路, 并且回路是沿着矿体边缘的。在一次场激发下, 这个回路里产生的电流随频率变化的关系, 类似于矿体异常场与频率的关系。设一次场 $H_1 = H_0 e^{i\omega t}$ (这里 H_0 为一次场幅值, ω 为圆频率, $i = \sqrt{-1}$), 回路面积为 S , 由一次场的激发, 在回路内产生感应电动势 ε 的大小为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -i H_0 \omega S e^{i\omega t}$$

则回路内电流

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon}{R + i\omega L} = -i \frac{H_0 \omega S}{R + i\omega L} e^{i\omega t} \\ &= -H_0 S \left[\frac{\omega^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i \frac{\omega R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right] \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

回路电流 I 的虚分量部分 $\text{Im} I$ 与感应电流 i_n 相当, 实分量部分 $\text{Re} I$ 与感应电流 i_n' 相当, 有

$$\text{Im} I = H_0 S \frac{\omega R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\text{Re} I = -H_0 S \frac{\omega R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

这两部分电流与频率的关系如图1.1.3所示。虚分量值在低频率时与频率成正比, 即随频率升高而加大, 当频率增高到 $\omega = \frac{R}{L}$ 时, 达到最大值, 这时的频率称为最佳频率 f_0 ; 继续增高频率, 则虚分量值反而减小。实分量值在低频率时, 与频率的平方成正比, 其值比虚分量小。当频率增高到 $\omega = \frac{R}{L}$ 时, 实分量与虚分量相等, 继续增高频率, 实分量大于虚分量, 而且随频率增高而增大的速度减慢, 最后实分量趋近于饱和值。

这种回路电流与频率的关系, 定性地说明了矿体异常场的频率特性。

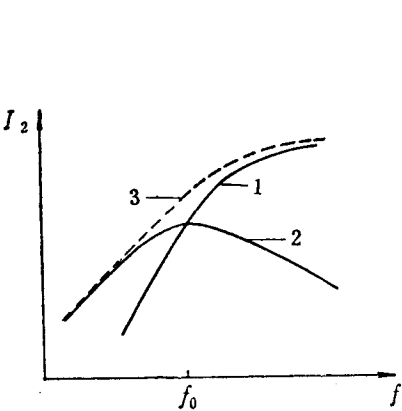


图 1.1.3 异常场与频率的关系

1—实分量; 2—虚分量; 3—振幅

Fig.1.1.3 The relationship between the electromagnetic anomalies and frequencies

(1—in-phase; 2—quadrature; 3—amplitude)

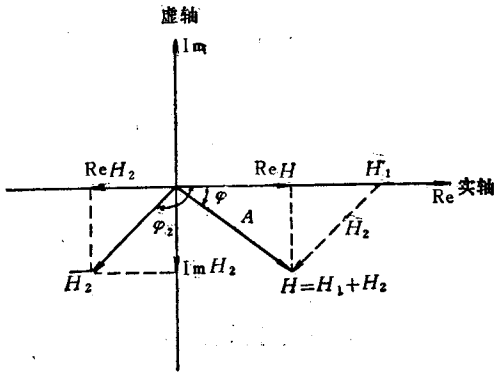


图 1.2.1 一次场和二次场的相位矢量图

Fig.1.2.1 Phase relations of the primary and secondary field

第二节 虚分量电磁法及其特点

地面上任一观测点的磁场是由一次场和二次场所组成,一次场与二次场之间有相位差异,用图1.2.1上的相位矢量图表示。

这里横座标为实轴。纵座标为虚轴;以一次场 H_1 作为相位的参考标准,取其与横轴一致,则它只有实分量;对于二次场 H_2 ,在负异常点,它的相位角 φ_2 是在 $-90^\circ \sim -180^\circ$ 之间,在正异常点则在 $90^\circ \sim 0^\circ$ 之间。一次场与二次场的矢量和为总和场,它的振幅为 A ,相位角为 φ ;总和场及二次场均可分解成虚、实分量。可见电磁法能观测的量比较多,而且观测不同的量,其方法效果也不一样。国外地面频率域电磁法都是发展总和场测定的方法,这类方法适用于地形较平坦,表层是高阻,探测深度要求较浅(在20~30m内)的地区,其优点是仪器制作技术要求不很高。我国自六十年代就开始研究纯二次场测量的地面电磁法,即现在所讲的虚分量电磁法。虚分量电磁法观测二次的虚分量,需要时也可测总和场的振幅。它相对于总和场测定的方法来说有如下一些主要特点:

1. 地形影响较小。由于是纯异常测量,不会出现地形引起的假异常,在有异常的地方,地形仅使异常形态改变。总和场测定的方法则不同,由于地形使一次场大小改变,引起假异常,所以地形影响很大。

2. 发现异常能力较强。由于纯异常测量消除了很强的一次场背景值,使观测精度提高很多,能够观测出弱异常来。总和场测定的方法有一次场的背景值,弱异常在很强的一次场背景值上,均落在允许的观测误差范围内,故很难观测出来。

3. 提高探测深度的潜力较大。在纯异常测量的方法中,只要增大发射磁矩,就能增大异常值,使原来无法测出的、反映深部的弱异常得以放大而被测出来;同时还能提高压制空间电磁干扰的能力,即提高信噪比,以利于提高探测深度。而总和场测定的方法,主要依靠提高观测精度来提高探测深度,所以要困难得多。

4. 区分异常能力较强。虚分量异常的频率特性曲线类似于LC回路中电流的频率特性曲线,选择性较好,最佳频率相当于谐振频率,故很容易按最佳频率把异常进行分类。

5. 观测结果易于解释。因纯异常测量的结果类似地面磁测资料,比较容易解释。

6. 多装置。由于没有一次场的影响,可以采用各种装置测量,而多装置既可以提高适应各种地电条件的勘探能力,又有利于获得较多的资料,大大提高了电磁法的地质效果。

7. 仪器装备可以制作得比较轻便。由于频率域抑制干扰的能力较强,加之纯异常测量时发现异常的能力较强,可使发射功率适当减小,以利于仪器装备的轻便化。

从上面诸特点可以看出,虚分量电磁法应能适用于我国地形、地电和地质条件都比较复杂的实际情况。

第三节 电磁场的基本方程

一、麦克斯韦方程组

电磁法的理论基础是宏观电磁场理论,计算宏观电磁场的出发公式为麦克斯韦方程组。

在国际单位制 (SI) 中, 麦克斯韦方程组为

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (1.3.3)$$

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (1.3.4)$$

这里 H 磁场强度, 单位为 A/m (安培每米);
 E 电场强度, 单位为 V/m (伏特每米);
 B 磁感应强度, 单位为 T (特斯拉);
 D 电位移矢量, 单位为 C/m² (库伦每平方米);
 j 电流密度, 单位为 A/m²;
 ρ 体电荷密度, 单位为 C/m³;
 t 时间, 单位为 s (秒)。

在电磁场的理论中, 还须考虑到介质对电磁场的影响, 故需引进联系场的基本矢量间关系的公式, 即

$$B = \mu H \quad (1.3.5)$$

$$D = \epsilon E \quad (1.3.6)$$

$$j = \sigma E \quad (1.3.7)$$

式中 μ 、 ϵ 、 σ 为介质的磁导率、介电常数和电导率, σ 的单位为 S/m (西门子每米)。

自由空间的介电常数 ϵ_0 和磁导率 μ_0 分别为

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m (法拉每米)}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m (亨利每米)}$$

在谐变电磁场的情况下, 场矢量可用复数式来表示

$$H = H_0 e^{-i\omega t}$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t}$$

这里 H_0 和 E_0 为场矢量的振幅, ω 为圆频率, $i = \sqrt{-1}$ 。

前面所列出的麦克斯韦方程组中, 所有的场矢量都用复数式表示, 并从所有方程的两边消去 $e^{-i\omega t}$, 则得到

$$\operatorname{rot} H = (\sigma - i\omega\epsilon)E = -i\omega\left(\frac{i\sigma}{\omega} + \epsilon\right)E = -i\omega\overset{\vee}{\epsilon}E \quad (1.3.8)$$

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H \quad (1.3.9)$$

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (1.3.10)$$

$$\operatorname{div} E = 0 \quad (1.3.11)$$

这里的 H 和 E 表示场矢量的振幅, 下角标符号已省略。第一式中的 $\overset{\vee}{\epsilon} = \left(\frac{i\sigma}{\omega} + \epsilon\right)$, 称为复介电常数。引入它后, 方程组就具有明显的对称性。

上面的方程组就是谐变场的麦克斯韦方程组, 也是我们下面讨论问题的出发公式。

二、电磁势和波动方程

利用势函数来解决电磁理论中的问题一般比较方便, 场强则可对势函数求导数来得到。各矢量势与场强的关系式和边界条件见表 1.3.1。

表 1.3.1 Table 1.3.1

矢量势	波动方程	与场强的关系式	边界条件
A	$\nabla^2 A + k^2 A = 0$	$H = \text{rot} A$ $E = i\omega\mu A (+ \frac{1}{k^2} \text{grad div} A)$	$A_{n1} = A_{n2}, \mu_1 A_{t1} = \mu_2 A_{t2}$ $\frac{\partial A_{t1}}{\partial n} = \frac{\partial A_{t2}}{\partial n}, \frac{1}{\varepsilon_1} \text{div} A_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \text{div} A_2$
A^*	$\nabla^2 A^* + k^2 A^* = 0$	$E = \text{rot} A^*$ $H = -i\check{\varepsilon} (A^* + \frac{1}{k^2} \text{grad div} A^*)$	$A_{n1}^* = A_{n2}^*, \check{\varepsilon}_1 A_{t1}^* = \check{\varepsilon}_2 A_{t2}^*$ $\frac{\partial A_{t1}^*}{\partial n} = \frac{\partial A_{t2}^*}{\partial n}, \frac{1}{\mu_1} \text{div} A_1^* = \frac{1}{\mu_2} \text{div} A_2^*$
Π	$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0$	$H = \text{rot} A = -i\omega\check{\varepsilon} \text{rot} \Pi$ $E = k^2 \Pi + \text{grad div} \Pi$	$k_1^2 \Pi_{t1} = k_2^2 \Pi_{t2}, \check{\varepsilon}_1 \Pi_{n1} = \check{\varepsilon}_2 \Pi_{n2}$ $\text{div} \Pi_1 = \text{div} \Pi_2, \check{\varepsilon}_1 \frac{\partial \Pi_{t2}}{\partial n} = \check{\varepsilon}_2 \frac{\partial \Pi_{t2}}{\partial n}$
Π^*	$\nabla^2 \Pi^* + k^2 \Pi^* = 0$	$E = \text{rot} A^* = i\omega\mu \text{rot} \Pi^*$ $H = k^2 \Pi^* + \text{grad div} \Pi^*$	$k_1^2 \Pi_{t1}^* = k_2^2 \Pi_{t2}^*, \mu_1 \Pi_{n1}^* = \mu_2 \Pi_{n2}^*$ $\text{div} \Pi_2^* = \text{div} \Pi_1^*, \mu_1 \frac{\partial \Pi_{t1}^*}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Pi_{t2}^*}{\partial n}$

表中的下角标 t 表示沿界面的切线分量， n 表示法线分量。

波动方程中系数 k 叫做波数，它的平方为

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

这是一个复数。设 k 为

$$k = a + ib$$

其中

$$a = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad b = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

通常把波数 k 的实部 a 称为相常数，而虚部 b 称为衰减常数。

当谐变场的频率比较低时，可忽略位移电流不计，亦即 $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ ，这时 k^2 成为

$$k^2 = i\sigma\mu\omega$$

波数 $k = \sqrt{i\sigma\mu\omega}$ ，因 $\sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ，所以 $k = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$ 。显然，这时波数的实部和虚部相等。

在电磁法勘探中主要采用10kHz以下的频率，通常位移电流可忽略不计，所以 $k^2 = i\sigma\mu\omega$ 的波动方程很重要。

在均匀介质中，电磁波的波长 λ 是由相常数 a 所确定， $\lambda = \frac{2\pi}{a}$ ，波速 v 等于波长乘频率， $v = \frac{2\pi f}{a} = \frac{\omega}{a}$ 。衰减常数 b 确定电磁波向地下穿透的深度，当地中的电磁波强度衰减为地

面上的 $\frac{1}{e}$ 时，相应的深度 δ 称为趋肤深度，其值为

$$\delta = \frac{1}{b}$$

三、模拟条件

用解波动方程的办法来计算导电体的异常场，可获得完整的严密的异常场规律，这些规律在电磁法勘探中具有重要的理论意义。但是，严格的理论计算方法目前只能适用于简单几何形状的导体。对于复杂形状导体异常场的研究，则物理模拟是一种简便的方法。

当位移电流忽略不计时，谐变场的模拟条件为

$$\sigma\mu\omega = \frac{1}{l^2}\sigma_m\mu_m\omega_m$$

这里 l 为模型缩小的倍数，下角标 m 表示模拟情况。

当用野外仪器来做模型实验，可取 $\omega = \omega_m$ ，若矿体和模型均无磁性，即 $\mu = \mu_m = \mu_0$ ，这时模拟条件就成为

$$\sigma = \sigma_m / l^2$$

第二章 均 匀 场

这里所说的均匀场是指均匀的谐变磁场。在地面用导线铺设一个正方形或长方形的回线，每边的长度通常从数百米到一千多米。如由发射机供给回线谐变电流，则沿回线流动的电流在周围相当大的空间产生谐变磁场。在回线内的中间部分，磁场方向垂直于地面，而且比较均匀，可近似当作均匀场看待。

对理论计算而言，均匀谐变磁场是一种比较简单的场源。一些简单几何形状导体在均匀场中被激发时，通过理论计算可以获得它们的异常场严格的解析表达式，这些计算结果所反映的异常场规律具有普遍指导意义。

第一节 导电导磁水平圆柱体和球体的异常场

一、水平圆柱体异常场的表达式

在垂直均匀谐变磁场 $H_1 = H_0 e^{-i\omega t}$ 中，有一导电导磁的无限长水平圆柱体，它的轴心

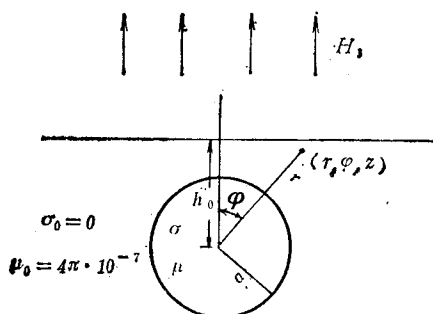


图 2.1.1 垂直均匀磁场中导电导磁水平圆柱体 (Z轴向内)

Fig. 2.1.1 A horizontal conducting and permeable cylinder in the uniform vertical magnetic field

离地面的深度为 h_0 ，圆柱体的半径为 a ，它的电导率为 σ ，磁导率为 μ 。设圆柱的围岩为高阻体，即它的电导率 $\sigma_0 = 0$ ，围岩的磁导率为 μ_0 。现求该圆柱体在地面上磁异常场的表达式。

解波动方程时，需要选用圆柱坐标系，座标原点设在圆柱体的轴心，Z轴与中心轴一致，见图2.1.1。

在上述座标情况下，圆柱体内的感应电流只有沿柱轴方向的分量。这样，由感应电流而产生的二次磁场就没有 z 分量，从而可知二次场的矢量势 A_2 只有 z 分量 A_{2z} 。

又知一次场矢量势 A_1 也只有 z 分量，故总和场矢量势 A 只有 z 分量 A_z 。于是，可写出圆柱体内、外两个 A_z 的波动方程

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = -ipA_z \quad r < a$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = 0 \quad r > a$$

这里 $p = \mu\sigma\omega$ 。

利用分离变量法解上面两个方程，就可得圆柱体外异常场的表达式。最后，转换成直角坐标系，取Z轴垂直向上，X轴水平并垂直于圆柱轴线，此时异常场的垂直分量和水平分量

的表达式如下

$$H_{2z} = -H_0 \frac{\check{T} a^2}{r^2} \left[\frac{h_0^2 - x^2}{r^2} \right] \tag{2.1.1}$$

$$H_{2x} = -H_0 \frac{\check{T} a^2}{r^2} \left[\frac{2h_0 x}{r^2} \right] \tag{2.1.2}$$

这里 $\check{T}$ 函数为

$$\check{T} = \frac{(\mu_0 - \mu) I_0(\nu_a) + (\mu_0 + \mu) I_2(\nu_a)}{(\mu_0 + \mu) I_0(\nu_a) + (\mu_0 - \mu) I_2(\nu_a)} \tag{2.1.3}$$

I_0 和 I_2 为零阶和二阶第一类修正贝塞尔函数， $\nu_a = \sqrt{i p} a_0$ 。

从异常表达式可看出 乘数 $H_0 a^2 \check{T}$ 只影响异常值的大小，而不影响异常场的空间分布规律。表达式中的其余部分则为空间座标函数，它决定了异常的形态。当 $H_0 \cdot a^2$ 是给定的情况下，异常值的大小只随 $\check{T}$ 函数变化。下面将先讨论 $\check{T}$ 函数，而后分析异常场的空间分布规律。

二、圆柱体异常场的频率特性规律

1. 当圆柱体为无磁性的导体时，即 $\mu = \mu_0$ ， $\check{T}$ 函数的表达式将成为

$$\check{T} = \frac{I_2(\nu_a)}{I_0(\nu_a)} = T \tag{2.1.4}$$

特将此时的 $\check{T}$ 表示成 T ，并称它为“导电圆柱体的频率特性函数”。对于给定的柱体来说， T 函数只随一次场的频率而变。 T 函数与参数 $\alpha = p a^2 = \mu \sigma \omega a^2$ 之间的关系，经计算列于表2.1。把计算结果画在双对数坐标纸上，如图2.1.2所示。

表 2.1 T 函数数值表
Table 2.1 Table of function T

$\alpha = \sigma \mu \omega a^2$	Re T	Im T	T	$\alpha = \sigma \mu \omega a^2$	Re T	Im T	T
0.01	0.0000021	0.00125	0.00125	4.86	0.292	0.364	0.467
0.04	0.000033	0.0050	0.0050	5.76	0.348	0.374	0.511
0.09	0.000145	0.0112	0.0112	6.76	0.410	0.376	0.556
0.16	0.00053	0.0200	0.0200	7.84	0.450	0.372	0.587
0.25	0.0013	0.0312	0.0312	9.00	0.503	0.360	0.619
0.36	0.0027	0.0451	0.0452	10.24	0.543	0.349	0.646
0.49	0.0051	0.0615	0.0617	14.44	0.623	0.306	0.694
0.64	0.0084	0.0791	0.0795	18.49	0.670	0.272	0.723
0.81	0.0152	0.1000	0.1012	25.00	0.720	0.238	0.759
1.00	0.0208	0.1210	0.1215	36.00	0.766	0.206	0.787
1.69	0.0496	0.1970	0.1980	49.00	0.795	0.177	0.814
2.25	0.094	0.2500	0.2510	64.00	0.820	0.160	0.836
3.24	0.155	0.2930	0.3320	100.00	0.858	0.131	0.868
4.00	0.226	0.3440	0.4110				

T 函数包含有实分量和虚分量，这与前一章中所说的一致。从图2.1.2上可以看到，当参数 α 较小时， T 函数的虚分量曲线是一段上升的直线，它与横轴的交角为 45° ，表明此时的虚分量与 α 成正比。当 α 再增大时，虚分量增加的速度就减慢，在 $\alpha \approx 6$ 时，虚分量达到最大值。继续增大 α 值，虚分量反而减小。 T 函数的实分量在小 α 值时，其数值比虚分量小，也