运筹学基础

卢向华　郭锡伯　编

国防工业出版社

运筹学基础

卢向华　郭锡伯　编

国防工业出版社

内容简介

本书是一本简明实用的运筹学教材。内容包括：线性规划、整数规划、动态规划、统筹法、存贮论、决策论、矩阵对策、排队论等共八章，主要介绍这些内容的基本原理和方法。在编写中既注意内容的系统性、又注意各种数学方法的实际应用，具有叙述简洁、取材精炼、形数结合的特点。

本书可作为工科大专院校经济管理、财经等专业和其它有关科系的教材。主要读者对象是上述有关专业的本科生、大专生和教师，也可供管理干部学校、电大、业余大学师生以及广大工矿企业、经济、管理部门的工程技术人员和干部参考。

运筹学基础

卢向华 郭锡伯 编

*

国防工业出版社出版、发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32 印张 $15^{3}/_{8}$ 341千字

1990年11月第一版 1990年11月第一次印刷 印数：0,001—3,000册

ISBN 7-118-00616-5/F·22 定价：9.35元

前　言

运筹学（Operations Research，简称OR）是制定计划、实行科学管理的重要数学方法，已成为我国"四化"建设中进行决策的重要工具。运筹学是从复杂纷呈的现实问题中，抽象出本质的因素，并在此基础上建立数学模型，通过数学模型的分析和求解，形成实际工作中各种可行的方案和对策。经验证明，学习和掌握运筹学的基本原理和方法，是指导经济管理实行科学决策的必要前提。

在多年的运筹学教学中，我们感到迫切需要一本内容简明、通俗和系统性强的教科书，以供工科院校、干部管理学院等经济管理、财经等专业使用，其内容应包括决策中经常使用的线性规划、整数规划、动态规划、统筹法、存贮论、决策论、对策论、排队论等，本书的出版实现了我们的愿望。根据我们在教学中的经验，这样的教材要以应用和介绍方法为主，删繁就简，在不影响理解的基础上少做理论上的推导。在编写本书过程中，我们贯彻了这一原则。

这是一本初学运筹学读者的入门书，只要求读者具有微积分、线性代数和概率论的基本知识，特别适合经济管理专业本科生和大专生作教材使用。

本书脱稿后，清华大学佟一哲教授审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，中国科学院应用数学所研究员桂湘云教授十分关心本书的出版，并作了推荐，在此一并致谢！

由于我们的水平所限，对书中存在的缺点和错误，请读者批评指正。

作者

目　录

绪 论

什么叫运筹学，许多著名运筹学者都曾给它下过定义，然而众说不一，因此我们也先不忙于下定义。

运筹学的英文原名是Operations Research，按照原文直译是“运用研究”，所以当时有人就把这门学科称作“运用研究”，但有人觉得“研究”二字不妥，建议改为“运用学”，最后还是借用《史记》上的两句说：“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，就把这门学科叫做运筹学。这个名称本身极好地概括了运筹学这门学科的实在内容。

在历史上很难说出运筹学这门学科开始形成的标记，因为历史上早期的很多工作现在都可以看作是运筹学的内容。例如，早在我国战国时代，田忌赛马的故事就是一个应用对策论的典型的例子。

战国时期，齐威王（下面简称为齐王）提出要和田忌赛马，田忌答应后双方约定：（1）各自出三匹马，从上中下三个等级中各出一匹；（2）每匹马都得参加比赛而且只参赛一次；（3）每次比赛各出一匹马，一共比赛三次；（4）每次比赛后，负者要付给胜者一千金。当时的情况是三种不同等级的马，齐王的马要比田忌的强一些。但田忌的高一级别的马要比齐王低一级别的马强一些，看来田忌要输三千金了。但是田忌的谋士孙膑给田忌出了个主意：每次比赛让齐王先出马，叫田忌用下马对齐王的上马（齐王胜，大喜），用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马（田忌胜），这样，田忌

反而赢得了一千金。用现在的话来说，这是一个对策论的例子。

在第一次世界大战期间，美国政府给了托马斯·艾迪生(Thomas Edison)一个任务，要他找出商船的运行策略，使之能有效地减少敌人的潜艇对商船的袭击，以取代在实战条件下冒风险的航行路线。用今天的话来说，这是一个决策论的问题。

丹麦工程师欧兰（A.K.Erlang）在哥本哈根电话公司进行的关于自动拨号设备对电话需求影响的实验，现在看来则是一个排队论的问题。

以上是一些具体运用运筹学方法的典型事例。然而，被公认的运筹学的创始人乃是英国的物理学家勃兰克特(M.S.Blackett)。第二次世界大战期间，英国空军调来一批科学家帮助空军运用新发明的雷达以进行有效地空防。1939年9月，来自不同领域的各方面的科学家被集中到英国皇家空军指挥总部组成一个小组。后来这个由勃兰克特领导的小组被称为自觉地有组织的第一个运筹学小组，小组成员共有11人，其中生物学家3人、理论物理学家2人、普通物理学家1人、天体物理学家1人、数学家2人、测量员1人、将军1人。当时人们对这个跨学科的组织不太理解，甚至有人讽刺他们为勃兰克特"杂技团"。这个小组自觉地用系统论的观点，分析和研究作战问题，结果使英国空军有效地拦击了敌机，保卫了英国的领空。他们的工作受到英国政府极大的重视，并把运筹学小组推广到海军、陆军中去。

美国参战以后，很快认识到设立运筹学组织的重要性，并仿效英国在陆海空三军普遍建立起运筹学小组。1942年3月首先在反潜艇部队中成立了以物理学家摩斯（P.M.

Morse）为首的运筹学小组，这个小组共有17人，其中约有一半是物理学家、另一半是数学家（所以有人称摩斯是美国的运筹学创始人），他们的工作很有成绩，使德国被击沉的潜艇成倍地增加。

英国在二次世界大战后，由于工业国有化产生了新型的管理问题，要求有新的管理方法。这些要求被转移到工业上来的运筹学专家们顺利地解决了，他们用运筹学的方法明显地提高了公司的利润和劳动生产率。到了50年代后期，运筹学在政府计划、工业、商业和交通运输业中得到了广泛的应用，运筹学的专业队伍迅速增大。在美国，情况也大致相同，稍有不同的是美国在二次大战后，由于军事上的需要，运筹学专家们仍然留在军队工作，而将运筹学应用于其它各行各业则是50年代以后的事了。

在我国，从1958年起，已开始对运筹学的个别分支如线性规划、统筹法、对策论等进行了研究与应用。近年来运筹学的发展更为迅速，但偏重于理论研究的较多。要将运筹学应用于生产实际，为提高各部门的经济效益，让运筹学在我国的“四化”建设中发挥应有的作用，还需要作出艰苦的努力。

运筹学是由许多分支组成的一门学科，它包括线性规划、非线性规划、几何规划、多目标规划、整数规划、动态规划、图论、网络、统筹法、存贮论、决策论、排队论、对策论、模型论、可靠性理论等。因此，运筹学的内容十分丰富，应用范围非常广泛。资金、资源的最优利用；人力、物力的最佳分配；交通运输的最优调度；水利、电力的合理利用；港口、设厂地点的最佳选择；设计、施工的最优方案；经营销售的最佳决策；服务系统的最优服务；商品、原料的最佳

库存；矛盾双方的最优对策等等都可以用运筹学的方法来解决。因此有人给运筹学下了一个这样的定义“运筹学是为决策者提供最优决策的一种数学方法”。我们认为这个言简意明的定义是十分恰当的。

正是由于上述原因，运筹学则成为现代科学管理方法中的一个强有力的工具。现代科学管理的特点之一是计量管理、即用计量指标进行目标管理。凡属科学管理都应有明确的目标，诸如生产效率是否最高、能源和原材料消耗是否最少、社会和经济效益是否最佳等等，这些问题的解决不仅要求在定性上，而且必须在定量上加以论证，这就是运筹学的任务。

在西方国家，很多大中型公司都设有运筹学小组，直属董事会领导，为公司的领导作出最优决策并提供可靠的理论依据。

今天，我国的四个现代化建设离不开管理现代化，如何利用较少的资金和资源，建设更多更好的重点工程和项目，使我们在较短的时间内，高水平、高速度地发展国民经济，运筹学是大有用武之地的。

《中共中央关于体制改革的决定》中强调指出：“经济体制的改革和国民经济的发展，迫切需要大批既有现代化的经济、技术知识，又有革新精神、勇于创造能够开创新局面的经营管理人才，特别是企业管理干部。”很显然，只有有了这样一批企业管理干部，才能够自觉地运用科学技术知识进行生产活动，才能够做到管理科学化、决策最优化，使企业生产达到最佳效果。

1986 年 3 月 18 日《最优化报》上，报道了我国石油生产钻井工艺已进入到优化钻井阶段。过去钻井工艺比较落后，经过石油部石油勘探开发科学研究院等单位的合作研究，我

闲已从单只钻头的优化发展到全井最优设计，从可行性试验、工业性试验、个别公司的实验到许多单位的推广，仅 115 口试验井一项就为国家节省投资 1000 多万元。其中在单只钻头参数的选择上，就运用了约束极值问题的数学模型；在全井序列优化设计中，则用到了运筹学中动态规划的思想和整数规划论中分枝定界法的技巧。

从这则报道可以看出，如果我国一切企事业单位的管理人员，人人都懂运筹学，人人都会应用运筹学，那么每一个单位在不增加人力、物力和资金的情况下，可使劳动生产率和经济效益成倍地提高，这应该是确信无疑的。

运筹学的内容虽然十分丰富，但在本书里，我们只介绍在经济管理中常用的一些分支，这些分支是：线性规划、整数规划、动态规划、统筹法、存贮论、决策论、矩阵对策、排队论等。

这些内容是财经、管理工作中常用的数学模型，因此对于经济和管理工作也是很重要的。

第一章　线 性 规 划

线性规划是运筹学的一个重要分支，它在工农业生产、交通运输和军事等各个方面都有着广泛的应用。小到一个小组的生产计划的合理安排，大到整个国民经济计划的最优编制，都可以用线性规划来解决。线性规划之所以为人们所重视，这不仅因为它的应用十分广泛，还因为它的理论比较完整并有一个统一的行之有效的计算方法——单纯形法。特别是有了快速电子计算机以后，许多大型或超大型的线性规划问题都能求解，而且有的计算机还配有解线性规划问题的专用程序，只要输入有关数据，很快就能算出所需要的结果。因此，线性规划是现代管理科学的一个很重要的工具。

§1.1　线性规划问题及其数学模型

线性规划问题主要用于解决两个方面的问题，一个是用最少的人力、物力、财力资源去完成给定的任务；另一个是用给定的人力、物力、财力资源去完成尽可能多的任务。其实这是一个问题的两个方面。但是，不论从哪一方面来考虑问题，都需要首先建立这个问题的数学模型，即将实际问题表述为数学问题，然后通过求解数学问题来获得所需要的结果。所以，建立数学模型是解决实际问题的首要步骤。

§1.1.1　线性规划问题的数学模型

我们首先通过几个具体的例子，来研究如何建立线性规划问题的数学模型。

例 1 某公司用自己生产的原料 A、B、C、D 生产两种产品Ⅰ和Ⅱ，生产每单位产品Ⅰ和Ⅱ分别需要用各种原料的数量以及在一个计划期内各种原料的现有数量见表1.1。又已知每单位产品Ⅰ、Ⅱ分别可获利 2000 元和 3000 元，问应如何安排生产才能获得最大利润？

表 1.1

产品 \ 单位产品所需原料数量（kg）\ 原料	A	B	C	D
Ⅰ	2	2	4	1
Ⅱ	2	1	0	2
现有原料数量（kg）	14	10	16	12

解 这个问题的目标很明确，就是希望求出一个计划期内产品Ⅰ、Ⅱ各应生产多少才能获得最大利润。为此，我们用 x_1、x_2 分别表示在一个计划期内产品Ⅰ、Ⅱ应生产的数量，用 S 表示该厂所获得的利润，因此根据题意有

$$S=2x_1+3x_2\ （千元）$$

显然，x_1、x_2 越大，公司也就获利越多。但是 x_1、x_2 不能任意增大，因为它们受到各种原料现有数量的限制，即对原料 A、B、C、D 来说，应有如下的不等式：

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2\leqslant 14 \\ 2x_1+x_2\leqslant 10 \\ 4x_1 \qquad\ \ \leqslant 16 \\ x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1、x_2\ \geqslant 0 \end{cases}$$

现在不难看出，所要解决的实际问题用数学语言来表达，就是在上述不等式约束的条件下，求$S=2x_1+3x_2$的最大值问题。

例2 设有某种物质，从m个产地A_1，A_2，…，A_m运往n个销售地B_1，B_2，…，B_n，产地A_i的月产量为a_i t，销售地B_j的月需求量为b_j t，由A_i运往B_j的单位运费价格见表1.2，问应如何调运可使总的运输费用最省？

表 1.2

单位运价（元/t） 销地 / 产地	B_1	B_2	……	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	……	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	……	c_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮
⋮	⋮	⋮		⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	……	c_{mn}

解 设x_{ij}表示由产地A_i运往销售地B_j的吨数，因此，总的运输费用为

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

另一方面，由产地A_i运往各销售地B_j（$j=1，2，…，n$）的总量应等于A_i的月产量，即

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

同时，由各产地 A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）运给销售地 B_j 的总量应等于 B_j 的需求量，即

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

此外，如果供求是平衡的，还应有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$$

这样，所求最优调运方案的问题，就是在上述等式约束条件下求一组非负变量 x_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$），使得上述运输费用 S 达到最小值。

例 3 （合理下料问题） 设要在某种型号的钢板上，裁下 m 种不同型号的板材零件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$。根据经验，在一块钢板上共有 n 个不同的下料方式 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。对每个下料方式 B_j（$j=1, 2, \cdots, n$）可得零件 A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）c_{ij} 个，已知零件 A_i 的需要量为 a_i 个。问应如何下料才能满足需要，又使所用的钢板最少？

解 设用 x_j 表示按方式 B_j 下料所需用的钢板数，因此按各种不同方式下料所需用的钢板总数为

$$S=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

又按各种不同下料方式 B_j 生产零件 A_i 的总数应等于零件 A_i 的需要量 a_i，即

$$c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n=a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

因此所求问题就归结为在上述等式约束条件下求一组非负变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使 $S=\sum_{i=1}^{n} x_i$ 取最小值的问题。

例 4 （生产计划安排问题） 设用 m 种原料 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，可以生产 n 种产品 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。现有各种原料数，每单位产品所需各种原料数和所得到的利润见 表 1.3。问应如何安排生产才能获得最大利润？

表 1.3

单位产品所需原料（kg） 产品 / 原料	B_1	B_2	……	B_n	现有原料
A_1	c_{11}	c_{12}	……	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	……	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	……	c_{mn}	a_m
单位产品利润（元）	b_1	b_2	……	b_n	

解 设 x_j 表示生产产品 B_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的计划数，于是生产 n 种产品的利润总和为

$$S=b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots b_nx_n$$

又生产各种产品所需原料 A_i 的总和不得超过现有数量 a_i $(i=1, 2, \cdots, m)$，即

$$c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots\cdots c_{in}x_n\leqslant a_i$$
$$(i=1, 2, \cdots, m)$$

这样，如何安排生产的问题就归结为在上述不等式约束下，求一组非负变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使利润 S 达到最大值。

例 5 （营养食品配方问题） 设用 m 种原料 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 制成具有 n 种营养成份 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的食品，使食品

所含各种营养成分的含量分别不低于b_1，b_2，…，b_n。又已知原料A_i的单价为a_i元（$i=1$，2，…，m），各种原料含各种营养成份的含量如表1.4所示，问应如何配方，才能使食品既满足营养要求又使食品成本最低？

表 1.4

单位原料所含营养成份的含量（kg） 营养成份 / 原料	B_1	B_2	……	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	……	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	……	c_{2n}
⋮	……	……	……	……
A_m	c_{m1}	c_{m2}	……	c_{mn}

解 设x_i表示食品配方中需用原料A_i的数量，于是食品的成本为

$$S=\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

又食品配方必须满足营养要求，因此食品中营养成份B_j的含量不得少于b_j（$j=1$，2，…，n），因此有

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_i \geqslant b_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

这样，食品配方问题就归结为求一组非负变量x_i（$i=1$，2，…，m）在上述不等式组约束下，使成本S达到最小。

通过上述各例使我们看到，它们都是属于一类最优化问