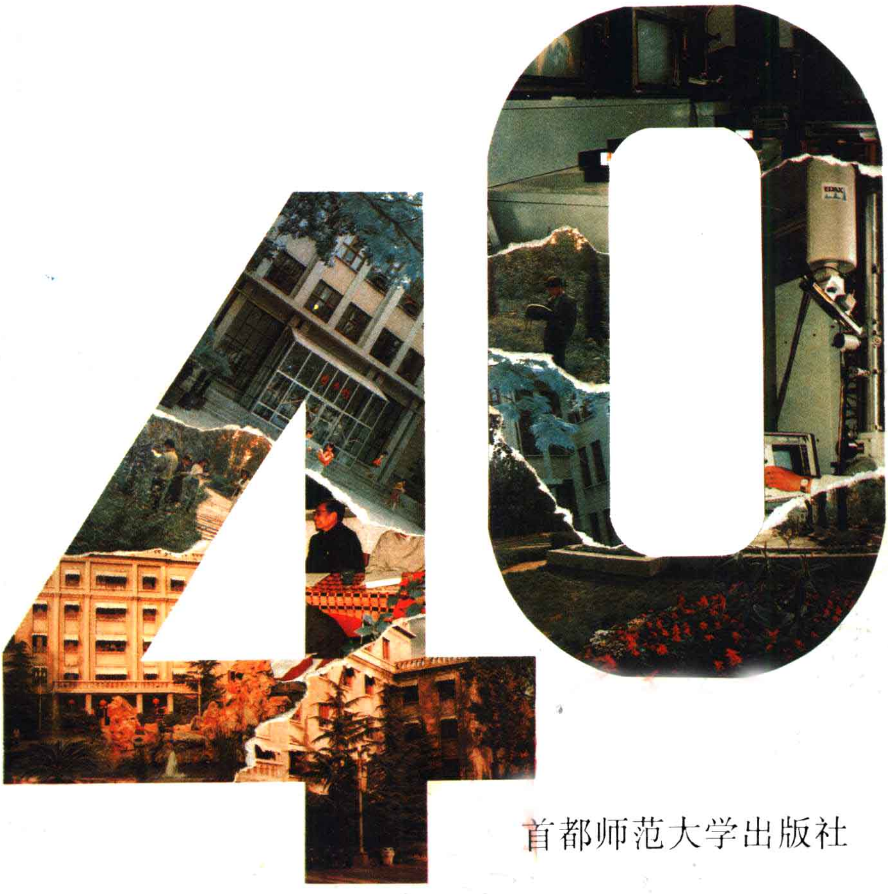
自然科学

自然科学

首都师范大学四十周年校庆

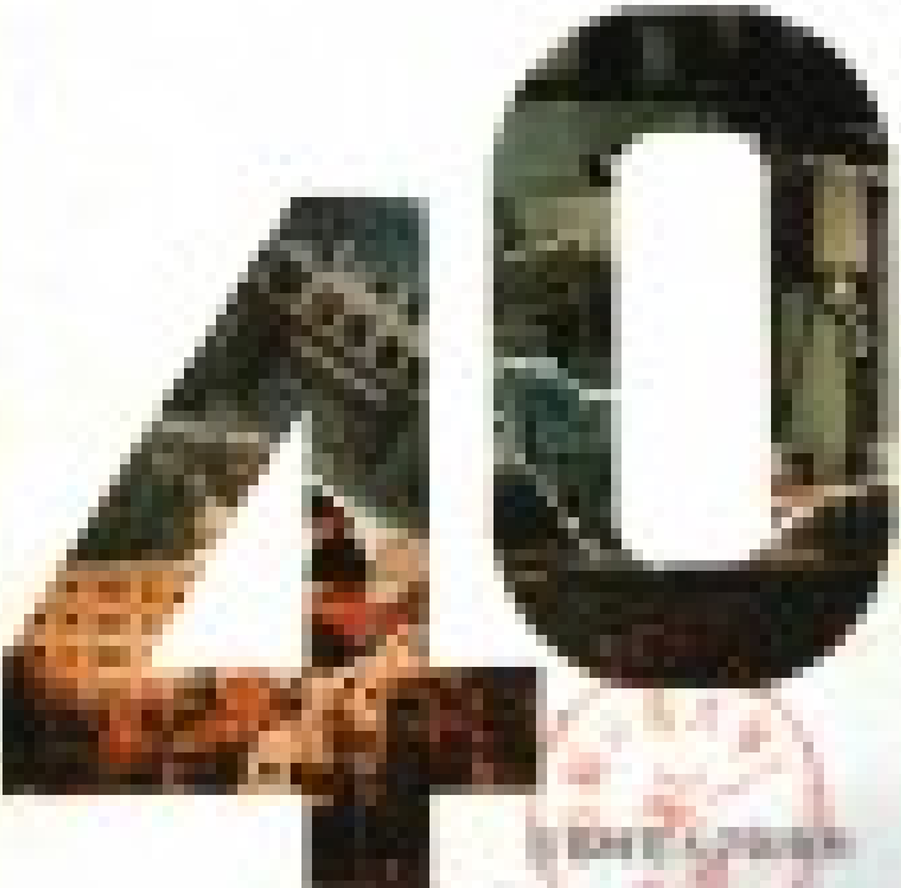
学术论文选



首都师范大学出版社

首都师范大学四十周年校庆

学术论文选



首都师范大学40周年校庆

学术论文选

（自然科学）

首都师范大学出版社

（京）新 208 号

图书在版编目(CIP)数据

首都师范大学四十周年校庆学术论文选：自然科学。

北京：首都师范大学出版社，1994.9

ISBN 7-81039-484-3

Ⅰ.首… Ⅱ.Ⅲ.自然科学-文集 Ⅳ.N53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 08960 号

首都师范大学出版社

（北京西三环北路 105 号　邮政编码 100037）

国防工业出版社印刷厂印刷　全国新华书店经销

1994 年 9 月第 1 版　1994 年 9 月第 1 次印刷

开本 850×1168 1/32　印张 12.125

字数 320 千　印数 0 001-1 700 册

定价 9.80 元

序

为了纪念首都师范大学建校四十周年，我们出版了两本论文选：人文社会科学一本、自然科学一本。作为毕生在首都师范大学工作的一名老教师，我想借此机会对我校的科研工作做一简单的回顾，并试做一些展望。

首都师范大学是在1954年创建的，建校初期，学校的主要精力放在稳定教学秩序上，科学研究尚未提上日程。此外，某些领导和教师对科学研究的重要性，也认识不足。经过几年的建设，科学研究逐步开展起来，但不久又受到了十年动乱的冲击，完全停顿下来。

党的十一届三中全会的召开，标志着我国进入了改革开放的新的历史时期，我校的科研工作也随之进入了一个迅速发展的阶段。现在，我校已经有10个研究所、5个研究中心、60个研究室，涌现出一批有较高学术造诣的学科带头人和科研能力较强的骨干，并逐步形成了一些具有特色和优势的学科，共计9个市级重点学科、25个校级重点学科。这些研究机构和重点学科在我校的科研工作中发挥了骨干核心作用。

近十年来，我校先后承担国家和部委省市级重大项目和重点项目100多项。目前在研项目共计403项，其中国家级35项，部委省市级38项，厅局级97项，校级233项。十年来，出版各类著作1640部，发表论文4067篇，科研成果增加了近十倍。获得部委省市级以上奖励131项。

科学研究与教学是相互促进的。认真搞好教学工作，教学相长，就能在教学的过程中不断发现有价值的科研课题。反转过来，提高科学研究水平，把科学研究的新成果不断反映到教学中去，才

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

能有高质量的教学，而不是讲稿“数十年如一日”，“炒冷饭”。要想把首都师范大学办成第一流的大学，争取早日进入“211 工程”，我们必须既重视教学，又重视科研。鉴于我校科学研究起步较晚，底子较薄，今后必须大力加强科研工作，尤其要努力提高科学研究的水平，产生一批高质量的科研成果。在以往的四十年中，我们已经取得了相当的成绩，但与先进的兄弟院校相比，不论在数量上还是在质量上，都还有不小的差距。我们没有理由自满，必须急起直追。可喜的是：我校有一批中青年教师已经脱颖而出。我相信，在老教师的带领下，他们必能青胜于蓝，攀登科学的高峰，开创出首都师范大学科学研究工作的新局面。

齐世荣

1994 年 7 月 4 日

目　录

余代数的 co-Frobenius 扩张及其同调性质

数学系　陈家鼐

[2]和[6]讨论了 co-Frobenius 余代数及其同调性质。[5]则把 Frobenius 代数推广为投射的 Frobenius 扩张并得到一系列关于它们的相对意义的同调性质。本文应用[2]和[5]中的方法引入余代数的 co-Frobenius 扩张的概念并将[2]和[6]中关于同调性质的讨论推广为相对的情形。

本文中 k 表一固定的域。k 上的向量空间简称为 k—空间，k—空间之间的线性映射简称为 k—同态。$V\otimes W$ 表示 k—空间 $V\otimes_k W$，$\mathrm{Hom}(V,W)$ 表示 k—空间 $\mathrm{Hom}_k(V,W)$。

k—空间 C 称作(k 上的)余代数，若存在 k—同态 $\Delta:C\to C\otimes C$ 和 $\in:C\to k$ 满足

$$(I\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes I)\Delta \text{ 及 } (I\otimes\in)\Delta=(\in\otimes I)\Delta=\Delta。$$

设 C 是余代数，k—空间 M 称作左 C—余模，若存在 k—同态 ρ_M：$M\to C\otimes M$ 满足

$$(I\otimes\rho_M)\rho_M=(\Delta\otimes I)\rho_M \text{ 及}(\in\otimes I)\rho_M=I。$$

设 M,N 是左 C—余模，一个从 M 到 N 的余模同态 $f:M\to N$ 是一个 k—同态并满足

$$(I\otimes f)\rho_M=\rho_N f。$$

从 M 到 N 的余模同态全体作成的 k—空间记作 $\mathrm{Com}_c(M,N)$，左 C—余模范畴记作 ${}^{C}M$。类似地可定义右 C—余模范畴 M^C。

k-Coalg、k-Alg、${}_RM$ 和 $M^C_{f.d.}$ 分别表示 k-余代数、k-代数、R-模(R 是有单位元的环)和有限维右 C-余模(即作为 k-空间是有限维的右 C-余模)的范畴。我们需要下面几个基本的函子：

(1) F_1: k-Coalg→k-Alg。对任意余代数 C 令 $F_1(C):=C^*=\mathrm{Hom}(C,k)$。乘法定义为 $\alpha\beta:=(\alpha\otimes\beta)\Delta,\alpha,\beta\in C^*$。

(2) F_2: $M^C\to{}_{C^*}M$。对任意右 C—余模 V 定义 $F_2(V):=V$ 上的 C^*—模结构为 $c^*\rightharpoonup v:=(I\otimes c^*)\rho_V(v),c^*\in C^*,v\in V$。类似地可定义 $F_2{}'$: ${}^CM\to M_{C^*}$。对于右 C—余模 M,N 我们有 $\mathrm{Com}_C(M,N)=\mathrm{Hom}_{C^*}(M,N)$。换言之,可以把 $M^C({}^CM)$ 看作是 ${}_{C^*}M(M_{C^*})$ 的全子范畴。

(3) F_3: ${}^CM_{f.d.}\to M^C_{f.d.}$ 对于任意有限维左 C—余模 N 定义 $F_3(N):=N^*$ 上的右 C—余模结构为 $\rho_{N^*}(n^*):=(I\otimes n^*)\rho_N,n^*\in N^*$,这里 ρ_{N^*} 由 $N^*\to\mathrm{Hom}(N,C)\cong N^*\otimes C$ 诱导。

为了进行下面的讨论,我们首先引入余模的余张量积的概念[2,6]。

定义 1[2,6] 设 $M^C,{}^CN$ 是 C—余模。M 和 N 的余张量积 $M\square_C N$ 定义为以下同态的核。

$$\rho_M\otimes I-I\otimes\rho_N:\ M\otimes N\to M\otimes C\otimes N$$

注 (1) $-\square_C-$: $\mathbf{M}^C\times{}^C\mathbf{M}\to\mathbf{M}_k$ 是左正合的、加法的正变函子。

(2)若 M 是(C,D)—双余模,即 M 有左 C—余模结构 $\rho_l:M\to C\otimes M$ 和右 D—余模结构 $\rho_r:M\to M\otimes D$ 且$(I\otimes\rho_r)\rho_l=(\rho_l\otimes I)\rho_r$。则对于任意 $N\in{}^D\mathbf{M}$,同态 $\rho_l\otimes I$: $M\otimes N\to C\otimes M\otimes N$ 把 $M\square_D N$ 作成左 C—余模,并且易知它是 $M\otimes N$ 的子余模。类似地对于任意 $L\in\mathbf{M}^C$,$L\square_C M$ 是 $L\otimes M$ 的一个右 D—子余模。

(3)对于任意 $M\in\mathbf{M}^C,N\in{}^C\mathbf{M}$,$M\square_C C\cong M$ 通过 $m\otimes c\mapsto\varepsilon(c)m$;$C\square_C N\cong N$ 通过 $c\otimes n\mapsto\varepsilon(c)n$。

(4)若 $M\in\mathbf{M}^C,N\in{}^C\mathbf{M}_{f.d.}$,则 $M\square_C N\cong\mathrm{Com}_C(N^*,M)$是规范同构。

现在来引进 co-Frobenius 余代数和 co-Frobenius 扩张的概念。首先注意到,若 $\alpha:C\to D$ 是余代数同态,则任意 C—余模 V 也是 D—余模,因为 V 上的结构同态 $V\to V\otimes C$ 自然过渡到 $V\to V\otimes D$,通

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

过 $I_V \otimes \alpha$。

定义 2 C 叫做右 co-Frobenius 余代数，若存在一个 C^* －右模单同态 $\theta: C \to C^*$，左 co-Frobenius 余代数可以相似地定义。

注 一个有限维余代数 C 是 co-Frobenius 的，当且仅当 C^* 是一个 Frobenius 代数。后者是左、右对称的。

定义 3 设 C, D 是余代数，$\alpha: C \to D$ 是余代数同态。(C, D) 叫做右 co-Frobenius 对，如果以下条件成立：

$(r1)$ $\mathrm{Hom}_{D^*}({}_{C^*}C^*_{D^*}, D^*_{D^*}) \cong {}_{D^*}C^*_{C^*}$，

$(r2)$ C 作为右 D－余模是有限余生成内射的。(C, D) 叫做一个（余）扩张，如果 α 是单（满）同态。左 co-Frobenius 对可以相似地定义。

注 (1)(C, D) 若是右 co-Frobenius 对，则 (C^*, D^*) 是一个右 Frobenius 对（或 Frobenius 扩张，若 D^* 是 C^* 的子代数[6]）。

证 我们只须验证 $C^*_{D^*}$ 是有限生成投射的。由于 C 是有限 D－余生成的，存在 $\mathbf{M}^D$ 中因而 ${}_{D^*}\mathbf{M}$ 中的分裂正合列 $0 \to C \to D^n$，$n \in \mathbf{N}$。它诱导 $\mathbf{M}_{D^*}$ 中的分裂正合列

$$(D^*)^n \to C^* \to 0, \tag{T}$$

D^* 因而 $(D^*)^n$ 是 D^*－投射的，由列 (T) 的分裂可知 $C^*_{D^*}$ 是有限生成投射的。

(2)若 C, D 是有限维的，则 (C, D) 是右 co-Frobenius 的，当且仅当 (C^*, D^*) 是 Frobenius 的。因为用(1)中的论证可得到 $C^{**} \in {}_{D^{**}}\mathbf{M}$ 是有限生成内射的，因此 $C \in \mathbf{M}^D$ 是有限余生成内射的。特别地，(C, k) 是右 co-Frobenius 的，当且仅当 C 是有限维右 co-Frobenius 余代数。

一个 C－余模 V 分别叫做内射的或投射的，若 $\mathrm{Com}_C(-, V)$ 或 $\mathrm{Com}_c(V, -)$ 是正合函子。由于 $\mathbf{M}^C$ 可以嵌入到 ${}_{C^*}\mathbf{M}$ 中，${}_{C^*}\mathbf{M}$ 中的内射性或投射性可导出 $\mathbf{M}^C$ 中的内射性或投射性。逆命题仅当余模是有限维时成立[2]。

设 $\alpha: C \to D$ 是余代数同态。列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 叫做$(C,$

D)－分裂的若它在 $\mathbf{M}^C$ 中是正合的并且在 $\mathbf{M}^D$ 中分裂。一个右 C －余模 V 分别叫做是(C,D)－内射的或(C,D)－投射的，若对于任意(C,D)－分裂列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

列 $0 \to \mathrm{Com}_C(M'',V) \to \mathrm{Com}_C(M,V) \to \mathrm{Com}_C(M',V) \to 0$,

或列 $0 \to \mathrm{Com}_C(V,M') \to \mathrm{Com}_C(V,M) \to \mathrm{Com}_C(V,M'') \to 0$

在 $\mathbf{M}_k$ 中是正合的。

若 C 是有限维余代数，则 $C\in \mathbf{M}^C_{f.d.}$，利用函子 F_3 我们可以得到[2]中的一个证明简化了的命题。然后我们可以得到 co-Frobenius 扩张的性质，它对于其同调性质是关键的。

命题 1(Doi)　设 $V\in \mathbf{M}^C$，C 是有限维的，设 $j:C\to D$ 是嵌入，则以下叙述是等价的：

(a)V 是(C,D)－内射的；

(b)任意(C,D)－分裂的 C－余模列

$$0\to V\to M\to N\to 0$$

是 C－分裂的，

(c)V 同构于 $V\square_D C$ 的一个 C－直和项。

证　(a)和(b)的等价性是显然的。

(b)⇒(c)。考虑 $\mathbf{M}^C$ 中的正合列

$$0 \to V \xrightarrow{J} V\square_D C, \tag{S}$$

其中 f 是 $V \xrightarrow[\cong]{\varphi} V\square_C C \xrightarrow{\lambda} V\square_D C$ 的合成，λ 是嵌入。为了证明 V 作为 C－余模同构于 $V\square_D C$ 的一个直和项我们只须证明列(S)是 D－分裂的，因为由(b)D－分裂性可以提升为 C－分裂性。考虑 D －余模同态 $g:=I\otimes j:V\square_D C\to V\square_D D\overset{\psi}{\cong}V$，其中 j 是嵌入 $C\hookrightarrow D$，则对于任意 $v\in V$，$\psi gf(v)=\psi g\lambda\psi(v)=\psi g(\varepsilon(c))^{-1}(v\otimes c)=\psi(\varepsilon(c))^{-1}(v\otimes j(c))=(\varepsilon(c))^{-1}\varepsilon(j(c))v=v$，即 $\psi gf=I_V$。因此(S)是 D－分裂的。

(c)⇒(a)。考虑上面的列(S)。只须证明$V\Box_D C$是(C,D)－内射的。但

$${}_{C^*}(V\Box_D C)\cong{}_{C^*}\mathrm{Com}_D(C^*,V)={}_{C^*}\mathrm{Hom}_{D^*}({}_{D^*}C^*,{}_{D^*}V),$$

而后者由关于模的熟知结果[1,3]是(C^*,D^*)－内射的，因此$V\Box_D C$是(C,D)－内射的。

命题2 设(C,D)是右co-Frobenius扩张且C是有限维的。则对于任意$V\in\mathbf{M}^C$我们有

$$V\text{ 是}(C,D)-\text{内射的}\Rightarrow V\text{ 是}(C,D)-\text{投射的。}$$

证 由命题1，V同构于C－余模$V\Box_D C=\mathrm{Com}_D(C^*,V)$的一个直和项。因此${}_{C^*}V$同构于$\mathrm{Hom}_{D^*}({}_{D^*}C_C^*,\ {}_{D^*}V)$的一个直和项。由$(r1)$后者同构于$\mathrm{Hom}_{D^*}(\mathrm{Hom}_{D^*}({}_{C^*}C_{D^*}^*,D_{D^*}^*),{}_{D^*}V)\cong C^*\otimes_{D^*}v$，因为$C_{D^*}$是有限生成投射的因而我们可以直接应用[1]或[3]中的结果。命题1的关于模的对偶论述[1,3,5]断言${}_{C^*}V$是(C^*,D^*)－投射的，因而是(C,D)－投射的。

推论 设(C,D)同上且D也是有限维的。若D是右co-Frobenius的，则C也是的。特别地，若D是自投射的，则C也是的。

证 过渡到C^*,D^*及Frobenius对(C^*,D^*)。在那里，对偶论述是熟知的[5]。

以下设定C,D都是co-Frobenius余代数，C是有限维的，(C,D)是co-Frobenius扩张。这时$\mathbf{M}^C$和$\mathbf{M}^D$都是有足够的投射对象的[2,6]，从而可以考虑$\mathbf{M}^C$和$\mathbf{M}^D$中对象的投射和内射维数。对于任意$V\in\mathbf{M}^C$记$\mathrm{Com}_C(V,-)$和$\mathrm{Com}_C(-,V)$的导出函子分别为$\mathrm{Ext}_C^i(V,-)$和$\mathrm{Ext}_C^i(-,V)$，$i\in\mathbf{N}$。$d(V)$和$cd(V)$（$d_{(C,D)}(V)$和$cd_{(C,D)}(V)$）分别表示V的右（相对）投射维数和内射维数。$\mathrm{Dim}(C)$和$\mathrm{Dim}(C,D)$分别表示C和(C,D)的右整体维数。

命题3 设C,D如上。则$\mathrm{Dim}(C,D)=0$或∞。

证 我们证明，对于任意$W\in\mathbf{M}^C$，若$cd_{(C,D)}(V)\leqslant m<\infty$，则$V$是$(C,D)$－投射的。用归纳法证明。$m=0$的情形是显然的。设命题已对一切$m\leqslant n-1(n\geqslant 1)$成立。设$V$满足$cd_{(C,D)}(V)\leqslant n$。考

虑 $\mathbf{M}^C$ 中列

$$0 \to V \xrightarrow{f} V\square_D C \to W \to 0, \tag{U}$$

其中 $W:=\mathrm{coker}f$，f 是命题 1 证明中所定义的同态。在那里我们已看到(U)是(C,D)－分裂的，$V\square_D C$ 是(C,D)－内射的。因此 $cd_{(C,D)}(W)\leqslant cd_{(C,D)}(V)-1$。由归纳假设 W 是(C,D)－内射的。由命题 2，W 是(C,D)－投射的。因而列(U)在 $\mathbf{M}^C$ 中分裂从而 V 同构于 $V\square_D C$ 的一个直和项。因此 V 是(C,D)－内射的。

命题 4 设 C,D 如上。若 $V\in \mathrm{M}^C$ 是(C,D)－内射的，则

$$cd_C(V) = cd_D(V)。$$

证 我们先证 $cd_C(V)\geqslant cd_D(V)$。为此只须证 V 的任意 C－内射分解也是 D－内射分解。任意 C－内射余模 X 是某个余自由余模，即 C 的同构像直积的直和项。由于 C^D 是内射的((C,D)是 co-Frobenius 扩张)且直积是保持内射性的，X 是 D－内射余模的直和项从而也是 D－内射的。

再证 $cd_C(V)\leqslant cd_D(V)$。只须证 $\mathrm{Ext}_C^i(V,W)$同构于 $\mathrm{Ext}_D^i(V,W)$的一个直和项。由于 V 是(C,D)－内射的，它同构于 $V\square_D C$ 的一个直和项。因此 $\mathrm{Com}_C(V,W)$同构于 $\mathrm{Com}_C(V\square_D C,W)$的一个直和项。但后者同构于 $\mathrm{Com}_D(V,W)$([2]，命题 6)。由于 C－内射分解也是 D－内射分解，知 $\mathrm{Ext}_C^i(V,W)$同构于 $\mathrm{Ext}_D^i(V,W)$的一个直和项。

命题 5 设 C,D 如上。设 $V\in \mathbf{M}^C$ 分别是有限内射维或有限投射维的，即 $cd_C(V)<\infty$ 或 $d_C(V)<\infty$。则分别有

(*a*) $cd_C(V)=cd_D(V)$ 或

(*b*) $d_C(V)\leqslant d_D(V)$；若 D 是有限维的，则等号成立。

证 (*a*) 设 $cd_C(V)=n<\infty$，$W\in \mathbf{M}^C$ 且 $\mathrm{Ext}_C^n(W,V)\neq 0$。对于 W 考虑命题 3 证明中的列(U)

$$0 \to W \xrightarrow{f} W\square_D C \to X = \mathrm{coker}f \to 0。 \tag{Y}$$

由前提，$\mathrm{Ext}_C^{n+1}(X,V)=0$。因此(Y)诱导正合列

$$\mathrm{Ext}_C^{n^2}(W\square_D C, V) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_C^n(W, V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_C^{n+1}(X, V) = 0,$$

其中 δ 是联接同态。因此 φ 是满同态。由于 $\mathrm{Ext}_C^n(W,V)\neq 0$，有 $\mathrm{Ext}_C^n(W\square_D C,V)\neq 0$。但后者如前指出地，同构于 $\mathrm{Ext}_D^n(W,V)$。这样就有 $cd_C(V)\leqslant cd_D(V)$。命题 4 中已证明逆方向在 V 不带特殊条件时也是成立的。

(b) 在以上证明中调换 V 和 W 的位置，用相似的方法就可以证明。

（原载数学年刊，第 12 卷，A 辑，第 5 期，1991.）

参 考 文 献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[2] Doi, Y., Homological coalgebra, *J. Math. Soc. Japan*, 33:1(1981), 31—50.

[3] Hochschild, G., Cohomology of algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82(1956), 246—269.

[4] Gopalakrishnan, N. S., Ramabhadran, N. and Sridharan, R., A note on the dimension of modules and algebras, *J. Indian Math. Soc.*, 21(1957), 185—192.

[5] Kasch, F., Projektive Frobenius-Erweiterungen, Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wissenschaften, 1960/61, 89—109.

[6] Lin, I. P., Semiperfect coalgebras, *J. Algebra*, 49(1977), 357—373.

[7] Sweedler, M. E., Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

[8] M. Takeuchi, Formal schemes over fields, *Comm, Algebra*, 5(1977), 1483—1528.

带有非退化不变对称双线性型的有限维可解李代数

数学系　　卢才辉

定义 1　g 是复数域上任一有限维李代数，若对$\forall\ x\in g$，$\mathrm{ad}x$ 在若当分解中的半单纯分量及幂零分量都是 g 的内微分，则 g 称为可裂的(splitable)李代数。

本文讨论的李代数 g 是复数域$\mathbb{C}$上带有非退化的不变对称双线性型$(\cdot|\cdot)$的可裂的有限维可解李代数。由于交换李代数没什么可讨论的。因此不妨假定 g 是非交换的可解李代数。

我们暂不附加"可裂的"这个条件。

定理 1　若 g 是$\mathbb{C}$上 n 维非交换可解李代数，带有非退化的不变对称双线性型$(\cdot|\cdot)$。则：

(1)g 的中心 $Z\neq 0$；(2)$n\geqslant 4$；(3)Z 中含有迷向元素 c，即：$(c|c)=0$。

证　(1)因为 g 可解，故有一维理想$\mathbb{C}c$。于是对$\forall\ x\in g$，有

$$[x,c]=\lambda(x)c,\lambda(x)\in\mathbb{C}。$$

由$(\cdot|\cdot)$的不变性可得

$$\lambda(x)(c|y)+\lambda(y)(x|c)=0,\ \forall\ x,y\in g,\tag{1}$$

在(1)式中取 $x=y$，可推出

$$\lambda(x)(x|c)=0,\ \forall\ x\in g。$$

由$(\cdot|\cdot)$的非退化性，可知存在 $x_0\in g$，使$(x_0|c)\neq 0$，代入上式可得：

$$\lambda(x_0)=0。$$

再将此结果代入(1)式中(即取 $x=x_0$)，得

$$\lambda(y)=0,\forall\ y\in g。$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com