SPT 21世纪高等院校教材

空间解析几何

李养成　郭瑞芝　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

空间解析几何

李养成　郭瑞芝　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括向量代数，空间的平面与直线，柱面、锥面与旋转曲面，椭球面、双曲面与抛物面及一般二次曲面、一般二次曲线方程的研究等. 本书结构紧凑，内容简明精要，编排具有新意，突出解析几何的基本思想方法，注意展现数学知识的发生过程和数学问题解决的思维过程，并注重思维训练和空间想象能力的培养.

本书适合高等院校数学各专业学生、大中学的数学教师等.

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/李养成，郭瑞芝编著. —北京：科学出版社，2004
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-013487-7

Ⅰ. 空…　Ⅱ. ①李…　②郭…　Ⅲ. 空间几何：解析几何-高等学校-教材　Ⅳ. O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第050309号

责任编辑：李[illegible]奇／责任校对：[illegible]　[illegible]
责任印制：[illegible]春生／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004年8月第一版　开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷　印张：15
印数：1—4 000　字数：285 000

定价：19.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

解析几何运用代数方法研究几何图形，把数学的两个基本对象——形与数有机地联系起来．它的思想方法与几何直观性可为许多抽象的、高维的数学问题提供形象的几何模型与背景，对数学的发展发挥了重要的推动作用，现在是高等院校数学各专业的主要基础课程之一．

为适应21世纪高素质人才培养的需要，本教材编写有以下几点考虑：

首先，在教材内容的处理上作了新的尝试，力求体现经典解析几何的现代教学．在教材整体上，注意突出解析几何的基本思想方法．空间解析几何研究的图形主要是空间曲线与曲面．借助于空间坐标系，将曲线与曲面的几何特征性质用三元方程表示，利用代数方法对方程进行分析，进一步研究图形的几何性质．例如，由一般二次曲线或二次曲面的方程系数算出的正交不变量便可识别二次曲线或二次曲面的类型和形状．在现代数学，特别是拓扑与几何中各种类型的不变量得到了深刻的发展．解析几何常用的基本方法包括坐标法、向量法、坐标变换法等．第1、2、3章介绍坐标法与向量法，并将这两种方法相结合讨论空间中的平面与直线，以及柱面、锥面与旋转曲面等常见曲面．第5章介绍坐标变换法，利用它讨论一般二次曲面及二次曲线方程的化简．而对一般的二次曲面进行研究，我们引入了矩阵这一代数工具，使得许多叙述和证明变得较为简洁，这说明代数为研究几何问题提供了有效的方法．但两者是相辅相成，形数结合，相互为用．例如利用旋转变换化简二次曲面方程，要紧的是消去方程中的交叉项，从几何上看就是寻找二次曲面的主方向，我们把这一过程具体描述出来，这样便自然地抽象出矩阵的特征值与特征向量概念，并且为探讨通过正交矩阵将实对称矩阵对角化提供了具体范例，这说明几何可以为抽象的代数概念与方法提供形象的几何模型与背景．由此可见，本书在教材内容处理上表现出了新意．

其次，在教材内容的编排上作了适当调整，使本书结构体系显得更紧凑合理．例如，用平面去截二次曲面，截线一般为二次曲线，并且一般二次曲面被一组平行平面所截得的诸截线是属于同一类型的二次曲线（或同为椭圆型或同为双曲型或同为抛物型），而从这些截线的形状又可想象出曲面的整体形状，这就是第4章所采用的平行截割法．正因为二次曲线与二次曲面之间具有这种内在联系，本书将它们安排在一章内展开讨论，并且着重对一般二次曲面进行介绍．

第三，在教材内容的呈现上改变了传统教材的叙述方式，注意展现数学知识的发生过程以及数学问题解决的思维过程．本书对一些比较重要的概念注意交代实

际背景. 新结果、新方法的介绍, 新理论的建立力求引入自然而非突然, 试图与读者一起, 以"研究者"的姿态去恰当地提出问题, 通过分析寻找解决问题的方法, 从而使读者不仅认识到数学知识是可以理解的, 而且通过努力也有可能有所发现、有所作为.

第四, 本书作为一门基础课的教材, 尽可能注意发挥它应有的教育功能. 解析几何在训练学生思维、提高空间想象能力和获取新知识能力等数学素质方面有其独特的作用, 本书努力在这方面进行探索. 由于解析几何所包含的内容比较直观, 无论是从曲面及曲线的几何特征出发建立它们的方程, 还是从方程出发研究曲面及曲线的性质, 描绘其形状, 都对培养学生的空间想象能力很有利. 第 4 章专辟一节讲作图, 介绍画曲面的交线以及由曲面所围成的空间区域, 这对发展空间想象能力也是有好处的. 不仅如此, 本书努力将形象思维与抽象思维相结合, 直觉与逻辑相结合, 一方面注意发掘各种代数表达式的几何意义, 另一方面又注意通过几何直观分析去寻求某种合适的代数关系, 以此来训练学生思维. 期盼通过本课程教学, 使学生能逐步运用这两种思维方式去分析问题, 探求未知, 获取新知识. 书中许多例题给出不止一种求解方法, 一方面可激发学习兴趣, 另一方面可启迪学生思维. 希望读者打开思路, 不受书中解法约束, 勤动脑多动手, 提高思维的灵活性.

本书编写工作由李养成主持, 郭瑞芝撰写第 3 与第 4 章, 何伟博士参与了第 1 章与附录的编写. 李养成不仅撰写本书其余各章而且负责全书的修改与定稿工作. 感谢许多同行的鼓励、支持与帮助, 感谢科学出版社李鹏奇编辑为本书的出版付出的辛勤工作.

由于编者水平有限, 书中仍有许多不足之处, 难免有谬误, 请大家批评指正.

李 养 成
2004 年 3 月于中南大学

目　录

第 1 章　向 量 代 数

解析几何是用代数方法来研究几何图形的. 为了把代数运算引进到几何中来，我们首先在空间引进向量及其线性运算，用有向线段作为向量的几何表示，并且通过向量来建立坐标系. 在空间坐标系中，不仅给向量引进坐标，也给点引进坐标，而且向量的运算可以归结为数的运算. 这样一来，几何图形可以用方程来表示，并通过方程来进一步研究图形的性质，因此坐标方法是解析几何中的最基本方法. 而利用向量的运算来研究图形性质的方法叫做向量法. 这种方法的优点在于比较直观，有时可使某些几何问题能简捷地得到解决，并且它在力学、物理学中也有重要应用. 本章系统地介绍向量代数的基本知识，并把向量法与坐标法结合起来使用，解决某些几何问题，为以后各章的学习提供必要的代数准备，因此可以说，本章内容是学习解析几何的基础知识.

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念

人们在工作与生活中，经常会遇到许多的量. 像温度、时间、长度、面积、体积等这些量在规定了单位后，都可以用一个实数来表示. 我们把这种只有大小的量叫做**数量**(或**标量**). 但是还存在比较复杂的量，例如位移、力、速度、加速度等，它们的共同点是不仅有大小而且有方向. 通常把既有大小又有方向的量叫做**向量**(或**矢量**). 在几何上，我们采用有向线段这一最简单的几何图形来表示向量.

给定空间一线段，如取它的一个端点作为起点，另一端点为终点，并规定由起点指向终点为线段的方向，这样确定了方向的线段叫做**有向线段**. 用有向线段表示向量，有向线段的起点与终点分别称为向量的**起点**与**终点**，向量的方向是由有向线段的起点指向终点，向量的大小用有向线段的长度表示，称为向量的**模**或**长度**. 起点是 A，终点是 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ (如图 1.1)，或用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示，它的长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

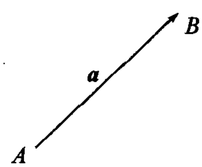

图 1.1

模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不定. 不是零向量的向量叫**非零向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若它们的方向相同且模相等，则称为**相等的向量**(图 1.2)，记

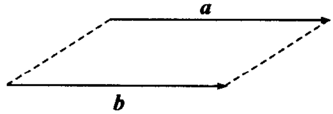

图 1.2

为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 另外,规定所有的零向量都相等. 因此两个向量是否相等与它们的始点无关,今后运用的正是这种始点可以任意选取,只由模和方向决定的向量,这样的向量通常叫做**自由向量**. 也就是说,自由向量可以任意平行移动,移动后的向量仍然是原来的向量.

两个向量,若它们的模相等,但方向相反,则叫做互为**反向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记为 $-\boldsymbol{a}$. 显然有 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

一组非零向量若用同一起点的有向线段表示后,它们在一条直线(一个平面)上,则这组向量叫做**共线(共面)**的. 另外规定零向量与任何共线(共面)的向量组共线(共面).

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 显然,任意两个向量一定共面,三个向量中有两个共线则这三个向量共面. 又共线的向量组必共面.

1.1.2 向量的加法

联系物理学中力、速度、位移的合成,例如接连作两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的效果是作了位移 $\overrightarrow{AC}$(如图 1.3),由此可抽象出两个向量的加法运算定义.

定义 1.1.1 对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,作有向线段 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1.4),即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

由这一公式表示的向量加法法则称为**三角形法则**.

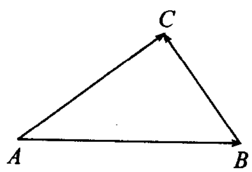

图 1.3

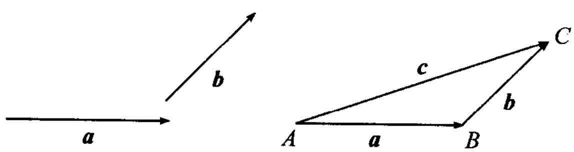

图 1.4

注 对于不共线向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若以空间中任意点 O 为起点,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA 和 OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,则对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$(图 1.5),这称为向量加法的**平行四边形法则**.

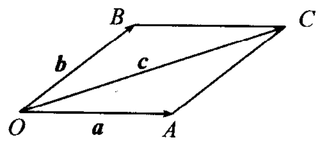

图 1.5

定理 1.1.1 向量的加法满足下面的运算规律:

(1) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(2) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量.

证明 (1)自空间任意点 O 为起点,依次作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$(图 1.6),则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$,于是$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$,所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

(2),(3),(4)留给读者证明.

由于向量的加法满足结合律与交换律,所以三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相加,不论它们的先后顺序与结合顺序如何,它们的和总是相同的,因此可将和写成 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.推广到任意有限个情形,记向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和为$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$,它可以依下列方法求得:自任意点 O 开始,依次引$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,由此得到一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$(图 1.7),那么向量$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是n 个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

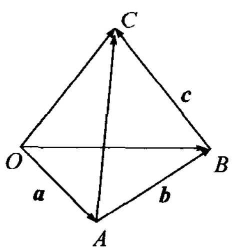

图 1.6

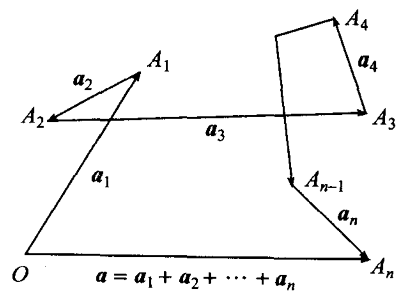

图 1.7

定义 1.1.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的差,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 加上$\boldsymbol{b}$ 的反向量,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别用同一起点的有向线段$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$表示(图 1.8),则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

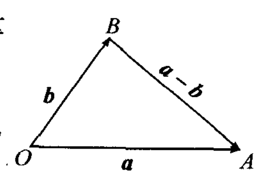

图 1.8

显然我们有

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

由此可见,向量的减法是作为加法的逆运算来定义的.

根据向量加法(含有减法)的三角形法则以及三角形三边之间的关系,容易知道下述关系式是成立的,即对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|;$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|;|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|.$$

问题　从向量的减法定义能否得出向量等式的移项法则?例如由等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 得出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$,请说明理由.

例 1.1.1　用向量法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

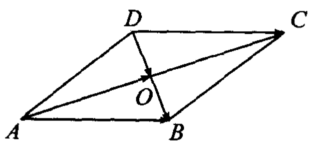

图 1.9

证明　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 互相平分于点 O(图 1.9),则 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$,于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}.$$

由此可见,$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

1.1.3　数乘向量

从著名的牛顿第二定律

$$f=ma$$

看出,需要考虑数与向量的乘法运算,这里 $\boldsymbol{f}$ 表示力,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,m 表示质量.

定义 1.1.3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(图 1.10),当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 我们把这种运算称为**数乘向量**.

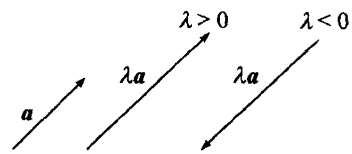

图 1.10

由定义立即得到,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量.特别,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.记与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$,则有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$,且

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

这说明非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的模的倒数,便得到与它同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$,简称为把 $\boldsymbol{a}$ 单位化.

定理 1.1.2　数与向量的乘法满足如下的规律:

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(4) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这里 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数.

证明 (1)与(2)可以根据定义 1.1.3 直接验证.

(3) 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\lambda,\mu,\lambda+\mu$ 中有一个为 0,那么等式显然成立.下面设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\lambda\mu\neq0$ 且 $\lambda+\mu\neq0$.

① 若 $\lambda\mu>0$,则 $\lambda+\mu$ 与 λ,μ 都同号,于是 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{a}$ 同向,并且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|&=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

所以有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

② 若 $\lambda\mu<0$,不失一般性,可设 $\lambda>0,\mu<0$.再区分 $\lambda+\mu>0$ 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形.下面就前一种情形证明,后一种情形可相仿证明.现假设 $\lambda>0,\mu<0,\lambda+\mu>0$,这时 $-\mu>0$.据①有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

所以

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(4) 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$,则等式显然成立.下设 $\lambda\neq0,\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

① 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则存在实数 m 使得 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$(请读者补述理由).于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]=[\lambda(m+1)]\boldsymbol{b}\\&=(\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

② 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OAB$ 与由 $\lambda\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OCD$ 相似(图 1.11),因此对应的第三边所成的向量满足 $\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$.但是 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,所以

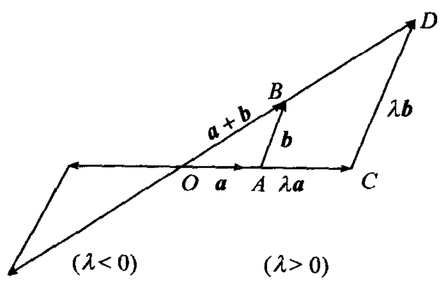

图 1.11

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

由定理 1.1.1 和定理 1.1.2 知,向量的加法以及数与向量的乘法可以像实数及多项式那样去进行运算.

常见错误之一:“设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,则 $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$”.试分析错误原因.

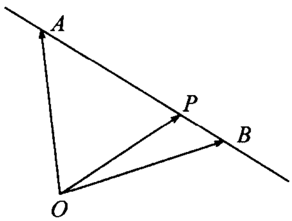

图 1.12

例 1.1.2　线段的定比分点.

对于线段 $AB(A\neq B)$,如果点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,则称点 P 分线段 AB 成定比 λ.当 $\lambda>0$ 时,$\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 同向,点 P 是线段 AB 内部的点,称 P 为内分点;当 $\lambda<0$ 时,$\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 反向,P 是线段 AB 外部的点,称 P 为外分点;$\lambda=0$ 时,点 P 与点 A 重合.假如 $\lambda=-1$,则有 $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{PB}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$,与条件 $A\neq B$ 矛盾,因此 $\lambda\neq-1$.

设点 P 分线段 AB 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$,则对任意点 O(如图 1.12),有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.\tag{1.1.1}$$

事实上,$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$,因此 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$,所以有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

公式(1.1.1)称为向量形式的**定比分点公式**.

特别,若 P 为线段 AB 的中点(此时 $\lambda=1$),则 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,这是线段中点公式.

例 1.1.3　证明平行四边形的两条对角线互相平分.

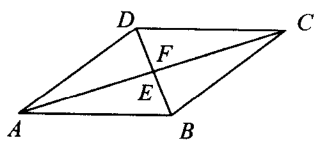

图 1.13

证明　设 $ABCD$ 为平行四边形,AC 与 BD 的中点分别为 E 和 F(图 1.13),

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$

又由中点公式得

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$,即 E 与 F 重合.因而结论得证.

1.1.4 共线及共面向量的判定

向量的加法及数乘向量统称为向量的**线性运算**. 设 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$是一组向量,$k_i(i=1,2,\cdots,n)$是一组实数,经线性运算得到的向量

$$\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$$

叫做向量组 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$的一个**线性组合**,或说向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **线性表示**.

在定理 1.1.2(4)的证明中曾说过,若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则存在实数 m 使得 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$. 进而我们有下面的

定理 1.1.3 设向量 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是存在惟一的实数 λ,使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}. \tag{1.1.2}$$

证明留给读者.

定理 1.1.4 设向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,则向量 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是存在惟一的一对实数 λ,μ,使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2. \tag{1.1.3}$$

证明 根据向量加法的三角形法则,充分性显然成立. 下证必要性.

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$,现假定 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面,我们首先证明存在实数 λ,μ 使得(1.1.3)式成立:

(1) 若 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{e}_1$(或 $\boldsymbol{e}_2$)共线,则依定理 1.1.3,有 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$,其中 $\mu=0$(或 $\lambda=0$);

(2) 若 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 都不共线,则将 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 平移至同一起点 O,并设$\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$,$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$. 过点 P 分别作 OE_2,OE_1 的平行线交 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 所在的直线于 A,B 两点(图 1.14). 据定理 1.1.3,可设

$$\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OB}=\mu\boldsymbol{e}_2.$$

于是

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2.$$

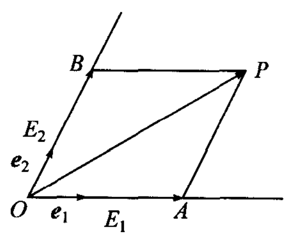

图 1.14

其次证明使得(1.1.3)成立的实数 λ,μ 是惟一的. 假设

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2=\lambda'\boldsymbol{e}_1+\mu'\boldsymbol{e}_2,$$

那么$(\lambda-\lambda')\boldsymbol{e}_1+(\mu-\mu')\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$. 若 $\lambda\neq\lambda'$,则 $\boldsymbol{e}_1=-\dfrac{\mu-\mu'}{\lambda-\lambda'}\boldsymbol{e}_2$,这与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线矛盾,因此 $\lambda=\lambda'$. 同理可证 $\mu=\mu'$.

定理 1.1.5 设向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,则对空间任意向量 $\boldsymbol{r}$,存在惟一的实数

组(λ,μ,ν),使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+\nu\boldsymbol{e}_3.$$

证明　首先证存在性.因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,所以 $\boldsymbol{e}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$,并且它们彼此不共线.

如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 之中的某两个向量共面,例如 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面,那么依定理1.1.4,有 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+0\cdot\boldsymbol{e}_3$.

如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 之中的任何两个向量都不共面,那么将它们平移至同一起点 O,并设 $\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$,$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$.过点 P 作直线与 OE_3 平行,且与 OE_1,OE_2 决定的平面交于 N(图1.15).现 $\overrightarrow{ON}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面,据定理1.1.4,存在实数 λ,μ 使得

$$\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2.$$

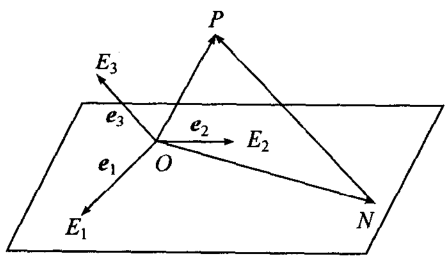

图1.15

又 $\overrightarrow{NP}\parallel\boldsymbol{e}_3$,据定理1.1.3,存在实数 ν 使得

$$\overrightarrow{NP}=\nu\boldsymbol{e}_3.$$

于是

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+\nu\boldsymbol{e}_3.$$

惟一性可仿照定理1.1.4中的证明写出,留给读者.

定义1.1.4　对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,如果存在不全为零的 n 个实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}\qquad(n\geqslant1),$$

我们说向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是**线性相关**.若上式只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才成立,则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是**线性无关**.

命题1.1.1　两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

证明　必要性.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,若其中有一个为零向量,不妨设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则由定理1.1.3知,$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,$1\cdot\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关.

充分性.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关,则存在不全为0的实数 k,l 使得

$$ka + lb = \mathbf{0},$$

不妨设 $k \neq 0$,则有 $\boldsymbol{a} = -\frac{l}{k}\boldsymbol{b}$,因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

命题 1.1.2　三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面(不共面)的充要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关(线性无关).

命题 1.1.3　空间中任意四个向量总是线性相关.

以上二命题的证明留给读者.

例 1.1.4　用向量法证明:三角形 ABC 的三条中线相交于一点.

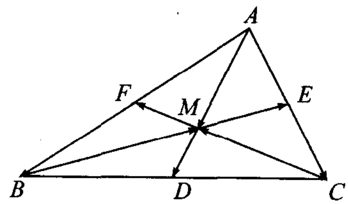

图 1.16

证明　设$\triangle ABC$ 的两条中线 AD 与 BE 相交于点 M.要证第三条中线 CF 经过点 M,只需证$\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CF}$($k$ 为某一实数)即可(图 1.16).

因$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AD}$共线,$\overrightarrow{BM}$与$\overrightarrow{BE}$共线.故可设$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BE}$,其中实数 λ,μ 满足 $0<\lambda,\mu<1$.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)\overrightarrow{AC},$$

又

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \mu\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \mu(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})\\ &= (1-\mu)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

故

$$\left(\frac{\lambda}{2} + \mu - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$

由于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$线性无关,因此$\frac{\lambda}{2} + \mu - 1 = 0$,$\lambda - \mu = 0$,解得 $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$.于是$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.而$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,易见

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF},$$

因此$\triangle ABC$ 的三条中线相交于点 M.

习　题　1.1

1. 设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体,在下列各对向量中,找出相等的向量和互为反向量的向量.

(1)$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$;(2)$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{CG}$;(3)$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{EG}$;(4)$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{GF}$;(5)$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{CH}$.

2. 在平行六面体 $ABCD-EFGH$ 中,令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{AG}$,$\overrightarrow{BH}$,$\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{DF}$.

3. 要使下列各式成立,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$;　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别为 K 和 L. 设$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$,求$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CD}$.

5. 设向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$. 证明:$A,B,D$ 三点共线.

6. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

7. 设 L,M,N 分别为$\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 的中点,证明:三中线向量$\overrightarrow{AL}$,$\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{CN}$可以构成一个三角形.

8. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量,λ,μ,ν 为任意实数,证明向量 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$,$\nu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c}$,$\mu\boldsymbol{c}-\nu\boldsymbol{a}$ 共面.

9. 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,证明:对任意一点 O,有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\,\overrightarrow{OM}.$$

10. 设空间四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 的中点分别是 M 和 N,证明:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=4\,\overrightarrow{MN}.$$

11. 在$\triangle ABC$ 中,点 M,N 为 AB 边上的三等分点. 设$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,求向量$\overrightarrow{CM}$,$\overrightarrow{CN}$对 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的分解式.

12. 设 AL 是$\triangle ABC$ 中角 A 的平分线,其中 L 为角平分线与 BC 边的交点. 记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,将向量$\overrightarrow{AL}$分解为 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的线性组合.

13. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下两底边并且等于它们长度和的一半.

14. 证明定理 1.1.3.

15. 试证三点 A,B,C 共线的充要条件是:存在不全为零的实数 λ,μ,ν,使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0},\lambda+\mu+\nu=0,$$

其中 O 是任意取定的一点.

16. 设 A,B,C 是不在一条直线上的三点,则点 M 在 A,B,C 确定的平面上的充要条件是:存在实数 λ,μ,ν,使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC},\lambda+\mu+\nu=1,$$

其中 O 是任意取定的一点.

17. 设 O 是正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{0}.$$

1.2　标架与坐标

定理 1.1.3、定理 1.1.4 及定理 1.1.5 为我们在直线上、平面内以及空间中引