2006年

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析

数学三和数学四适用

教育部考试中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2006年

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析

数学三和数学四适用

● 教育部考试中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析. 数学三和数学四适用/教育部考试中心. —北京：高等教育出版社，2005. 7

ISBN 7-04-017163-5

Ⅰ. 2... Ⅱ. 教... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076990 号

策划编辑 刘 佳 **责任编辑** 雷旭波 古 锋 **封面设计** 王凌波
责任绘图 朱 静 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
开 本	850×1168 1/16	**版 次**	2005年7月第1版
印 张	21.25	**印 次**	2005年7月第1次印刷
字 数	530 000	**定 价**	33.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

物料号 17163-00

前　言

全国硕士研究生入学统一考试是国家选拔硕士研究生的重要途径，在教育类全国统一考试项目中(不含博士生招生考试)，就考试水准和层次来说，目前是我国最高水平的.

硕士研究生入学统一考试从测量学角度来说，它应是“常模参照”考试，即选拔性考试. 命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决问题的能力.

我们希望通过对过去命题工作经验的总结，使考生进一步理解考试大纲的内容和要求，增加考试的透明度，缓解考生的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平. 因此我们组织部分参加大纲制订和修订的专家，根据《2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，编写了《2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》，分为数学一、二和数学三、四两册出版.

《2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的主要内容是对 2006 年考试内容和要求的逐条解释和说明，并通过一定数量的例题对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点. 期望以此帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学能力，在考试中取得好成绩.

书中若有疏漏和不足之处，恳请读者指正.

教育部考试中心
2005 年 6 月

目　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微　积　分

一、函数、极限、连续

• 考试内容与要求 •

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

• 考试内容解析 •

(一) 函数

1. 函数的概念及表示法

(1) 函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$.

这时称 x 为自变量，y 是因变量，称 D 是函数 $f(x)$的**定义域**，y 的取值范围为 $f(x)$的**值域**.

一个函数是由它的定义域和对应法则所确定的. 换句话说，两个函数，若它们的定义域相同，在该定义域上的对应法则也相同，则这两个函数相等.

(2) 函数的表示法：常用的函数的表示法有四种：公式法(解析法)、表格法、图像法和文字叙述法. 如，函数 $y=[x]$的对应法则是“y 为不超过 x 的最大整数”，这就是一种文字叙述法. 它比较简洁，虽然用公式法也可表示该函数，但是没有这么直接明了.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y=f(x)$在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$在区间 I 内是**单调增加**的(或**单调减少**的).

区间 I 内单调增加的函数的图像是在区间 I 内上升的曲线，如图 1.1.1;

区间 I 内单调减少的函数的图像是在区间 I 内下降的曲线，如图 1.1.2.

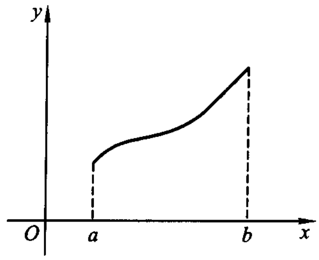

图 1.1.1

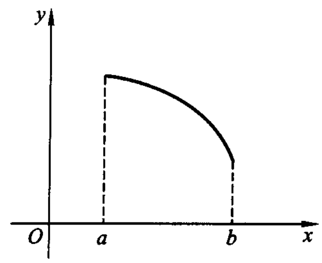

图 1.1.2

值得注意的是，函数的单调性是和某个区间 I 有关系的，一个函数可能在一个区间内单调，而在另外的区间内没有单调性；也可能在一个区间内单调增加，而在另外的区间内单调减少．如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，但是在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调减少．

(2) 奇偶性：设 $y=f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是**奇函数**．

偶函数的图像对称于 y 轴(如图 1.1.3)，奇函数的图像对称于原点(如图 1.1.4)．

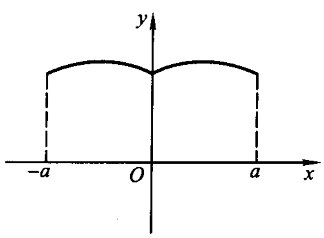

图 1.1.3

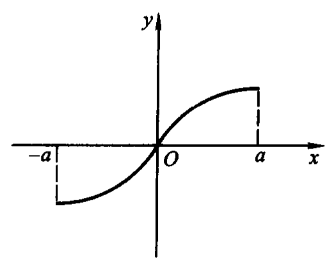

图 1.1.4

关于函数的奇偶性，按其定义易推出以下结果：

① 若 $f(x)$，$g(x)$ 是区间 $(-a,a)$ 内的偶函数，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 也是 $(-a,a)$ 内的偶函数．

② 若 $f(x)$，$g(x)$ 是区间 $(-a,a)$ 内的奇函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是 $(-a,a)$ 内的奇函数，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 是 $(-a,a)$ 内的偶函数．

③ 若在区间 $(-a,a)$ 内，$f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则 $f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 是 $(-a,a)$ 内的奇函数．

(3) 周期性：设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正的常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**．通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**．

(4) 有界性：设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在 $M>0$，使得对于任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内**有界**．

对于周期函数的图像，只需关心它在一个周期内的图像，如 $[0,T]$ 内，其他区间的图像可由平移得到．

关于函数的有界性，要注意到它是一个与区间 I 相联系的概念．例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界函数，而在 $(1,2)$ 内都是有界函数．

3. 复合函数

设 $y=f(u)$的定义域为 D_u，$u=\varphi(x)$的定义域为 D_x，值域为 E，若 $E\subseteq D_u$，则对于任意 $x\in D_x$，有 $u=\varphi(x)$ 与 x 对应，而 $u\in E\subseteq D_u$，故又有确定的 y 与 u 对应，从而，对于任意 $x\in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数．此函数是通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系，因而，称此函数为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的**复合函数**，记为 $y=f(\varphi(x))$．

若 $u=\varphi(x)$的值域 E 只有部分含在 $f(u)$的定义域 D_u 内，此时仍能确定复合函数 $y=f(\varphi(x))$，只不过这时它的定义域也只是 D_u 的一部分．

4. 反函数

设 $y=f(x)$的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任意一 y 值，从关系式 $y=f(x)$中可确定唯一的 x 值，则此时按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$．

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此也称 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数．

$y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称．

注意：$x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$的图像相同．

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为**基本初等函数**．

幂函数　$y=x^\mu$ （μ 为实数）．

指数函数　$y=a^x$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）．

对数函数　$y=\log_a x$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）．

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$．

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$．

(2) 初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成，并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**．

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$在其定义域的不同的区间内，其对应法则 f 有着不同的初等函数表达式，则称此函数为**分段函数**．

7. 常见题目类型

(1) 已知 $f(\varphi(x))$的表达式，求 $f(x)$的表达式．

(2) 已知奇(偶)函数 $f(x)$在$[0,a]$(或$[-a,0]$)上的表达式，求其在该区间的对称区间$[-a,0]$(或$[0,a]$)上的表达式．

(3) 已知两个分段函数 $f(x)$，$g(x)$的表达式，求复合函数 $f(g(x))$的表达式．

(4) 已知函数求反函数的表达式．

(5) 判断单调函数经过复合等运算后的函数的单调性．

(6) 求函数经过多次自身复合运算后的表达式．

(7) 求初等函数的定义域．

(二) 极限

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义：对于数列$\{x_n\}$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是$\{x_n\}$的当 n 趋于无穷时的**极限**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也记为 $x_n\to a$ （$n\to\infty$）．此时也称数列$\{x_n\}$**收敛**．若$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**．

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义：

① 设 $f(x)$当$|x|$充分大时有定义．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当$|x|>X$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$的当 x 趋于无穷时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A$ （$x\to\infty$）．

② 设 $f(x)$当 x 充分大时有定义．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x>X$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，

则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义：

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小量的定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

类似地，可定义当 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

(5) 无穷大量的定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大量. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地，可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地，还可定义当 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

(6) 无穷小量阶的定义：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$.

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 高阶的无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$.

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\ (A\neq0)$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 同阶的无穷小量，记为 $\alpha=O(\beta)$. 特别地，若 $A=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 等价的无穷小量，记为 $\alpha\sim\beta$.

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 低阶的无穷小量.

类似地，可定义当 $x\to\infty$ 情形下的无穷小量的阶.

2. 极限的有关性质

(1) 数列极限的有关性质

① (唯一性)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则极限是唯一的.

② (有界性)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得对任意 n 均有 $|x_n|\leqslant M$.

③ (单调有界准则)若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\leqslant x_{n+1}$(或 $x_n\geqslant x_{n+1}$)，且存在常数 $M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

④ (夹逼准则)对于数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，若存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

⑤ (保号性)若数列 $\{x_n\}$ 对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，均有 $x_n\geqslant0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant0$.

(2) 函数极限的有关性质

① (唯一性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则极限是唯一的.

② (局部保号性)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$ (或 $A<0$)，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

③ 若 $f(x)\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$.

④ (局部有界性)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $U^{\circ}(x_0,\delta)$，使得 $f(x)$在该邻域内有界.

⑤ (极限与左右极限的关系) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

⑥ (极限与无穷小量的关系) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\varepsilon$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon=0$.

⑦ (夹逼准则)若在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

以上有关函数极限的性质当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时也有相应的形式，请读者自行写出.

⑧ (单调有界准则)若对于任意两个充分大的 x_1，x_2，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），且存在常数 M，使 $f(x)<M$（或 $f(x)>M$），则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

(3) 数列极限与函数极限的关系

① 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

4. 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=AB$.

(3) 若 $B\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述性质当 $x\to\infty$时也成立.

5. 无穷小量的有关性质

(1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 有界变量乘无穷小量是无穷小量.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

(5) 若 $f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量；反之，若 $f(x)$是当 $x\to x_0$时的无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

(6) (等价无穷小替换)设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时也成立.

6. 常用的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，有以下等价的无穷小量：

(1) $\sin x \sim x$.

(2) $\tan x \sim x$.

(3) $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

(4) $e^x - 1 \sim x$.

(5) $\ln(1+x) \sim x$.

(6) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ （α 是实常数）.

7．常见的题目类型

(1) 利用极限的有关定义和性质的选择题.

(2) 利用等价无穷小替换的性质求“$\frac{0}{0}$”型极限.

(3) 利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$求“$1^\infty$”型极限.

(4) 利用“通分相加”等初等变形将“$\infty-\infty$”型、“$0\cdot\infty$”型、“1^∞”型、“0^0”型、“∞^0”型化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型求极限.

(5) 利用分子、分母有理化变形求极限.

(6) 利用“拆项相消”变形求 n 项和式的极限.

(7) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在，常见于分段函数.

(8) 利用“夹逼准则”求极限.

(9) 利用“单调有界准则”求数列的极限.

(10) 利用极限或无穷小量的性质求极限.

(11) 求有理函数的极限.

(12) 利用“变量替换”求极限.

(13) 利用洛必达法则求极限.

(14) 利用定积分的定义求 n 项和的极限.

(15) 利用收敛级数的通项的必要条件求极限.

以上(13)、(14)、(15)的有关内容见微分学、积分学和级数部分.

（三）连续性

1．函数连续的有关定义

(1) 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**连续**.

(2) 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**连续**.

在上面两式中，若记 $x=x_0+\Delta x$，则可看出这两个定义是等价的.

(3) 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**连续**.

以上三个定义是相互等价的.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**右连续**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**左连续**.

(5) 若 $f(x)$在(a,b)内每一点处都连续，则称 $f(x)$在(a,b)内连续. 若 $f(x)$还在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

2. 函数间断点的定义及分类

(1) 若在 $x=x_0$ 处，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，或 $f(x_0)$无定义，或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**间断**，$x=x_0$称为 $f(x)$的**间断点**.

(2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$的间断点，则

① 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则称 $x=x_0$ 是**可去间断点**.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，但不相等，则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的**跳跃间断点**.

③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的**无穷间断点**.

④ 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，且当 $x\to x_0$ 时函数值在摆动，则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的**振荡间断点**.

上述中，①、②两类称为第一类间断点，③、④两类称为第二类间断点.

3. 连续函数的运算性质

(1) 若 $f(x)$，$g(x)$均在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$也在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 若 $u=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处连续，$y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在 $x=x_0$ 处连续.

(3) 若 $y=f(x)$在区间 I_x 上单值、单调且连续，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在相应的区间 $I_y=\{x\mid x=f(y),y\in I_x\}$上单值、单调且连续.

(4) 基本初等函数在其定义域内连续.

(5) 初等函数在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) (有界性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) (最值性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上必有最大值、最小值.

(3) (介值性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上可取到介于 $f(x)$在$[a,b]$上最小值与最大值之间的一切值.

(4) (零点存在定理)设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

5. 常见的题目类型

(1) 函数经过加、减、乘、除和复合运算后的连续性判断.

(2) 分段函数在分界点处连续性的判断.

(3) 间断点的判断与分类.

(4) 开区间内连续函数有界性的判断.

(5) 含参变量的极限式所表示的函数间断点的判断.

(6) 利用“连续函数零点存在定理”证明方程的实根的存在性.

(7) 无穷区间内连续函数有界性的判断.

(8) 利用“连续函数的介值定理”证明函数可取到某定值或方程的根的存在性.

·例 题 详 解·

例 1.1.1 已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$__________的定义域为__________.

[答案] $\arcsin(1-x^2)$，$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

[提示] 此题主要考查函数的复合运算、反三角函数的性质以及初等函数的定义域的求法.

[解] 由于 $f(x)=\sin x$，

所以 $$f(\varphi(x))=\sin\varphi(x).$$

由题设知 $$\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

于是 $$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

由于 arcsin x 的定义域是$[-1,1]$,

所以有
$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$
于是得
$$x^2\leqslant 2,$$
即
$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

所以，此填空题的空白处应依次填 arcsin $(1-x^2)$，$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

[典型错误] ① 函数的复合运算不熟练；

② 反三角函数的定义域记错.

例 1.1.2 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查“$\infty-\infty$”型，“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的计算方法. 由于本题是“平方根式之差”的形式，可考虑用分子有理化的方法变形，化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限.

[解]
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}\\&=2.\end{aligned}$$

所以，本题应填 2.

[典型错误] 部分考生得 0 或∞，原因是没有掌握“$\infty-\infty$”型极限的求法.

例 1.1.3 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ ________.

[答案] $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[提示] 本题考查的内容和解题的方法与例 1.1.2 一样，所不同的是先要对根号内的“n 项和式”求和.

[解] 由于
$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$
所以
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

所以，应填$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[典型错误] 部分考生填 0 或∞，原因是没有先求和或不会处理“根式之差”.

例 1.1.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

[答案] $\dfrac{6}{5}$.

[提示] 本题主要考查等价无穷小的替换性质或重要极限的应用. 这是一个“$0\cdot\infty$”型的极限问题，用等价无穷小的替换性质将 $\sin\dfrac{2}{x}$ 换成$\dfrac{2}{x}$，此题将容易化为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限问题.

[解]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x^2+5)}{(5x+3)x}\quad\left(\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}\right)\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{6+\dfrac{10}{x^2}}{5+\dfrac{3}{x}}\\=&\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

[典型错误] 有的考生填 0. 原因是错误地应用极限运算法则：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\\=&0.\end{aligned}$$

例 1.1.5 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

[答案] 1，-4.

[提示] 本题主要考查等价无穷小的替换性质和极限的四则运算法则.

[解] 由题设可知分子的极限

$$\lim_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0.$$

所以有分母的极限

$$\lim_{x\to0}(e^x-a)=0,$$

因而有

$$a=1.$$

将 $a=1$ 代人到原式，有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)\\=&\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)\quad(\sin x\sim x,e^x-1\sim x)\\=&1-b=5,\end{aligned}$$

解得

$$b=-4.$$

所以，应依次填 1，-4.

[典型错误] 有的考生填 $b=-4$，a 任意，原因是不加条件地应用洛必达法则：

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(\cos x-b)-\sin^2x}{e^x}=1-b,$$

故 $b=4$，a 任意. 但是考生没有注意到，若要用洛必达法则，需要分母的极限为零.

例 1.1.6 设函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$,且 $a\neq1$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

[答案] $\dfrac{1}{2}\ln a$.

[提示] 本题主要考查指数函数和对数函数的运算性质以及“n 项和式”的极限求法.

［解］ 由题设知

$$\begin{aligned}&f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)\\&=a^1\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n=a^{1+2+\cdots+n}\\&=a^{\frac{n(n+1)}{2}}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.\end{aligned}$$

［典型错误］ 有的考生填0. 原因是错误应用极限运算法则：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot\cdots\cdot f(n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ln a\\&=\ln a\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

例 1.1.7 极限$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

［答案］ e^2.

［提示］ 本题主要考查应用重要极限“$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$”来解决“$1^\infty$”型不定式极限问题的能力. 将此极限式化为重要极限的形式，用重要极限的结果即可解决问题.

［解］

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\right)^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)}{x}=2,$$

所以，原式$=e^2$.

应填 e^2.

［典型错误］ 有的考生填1或∞. 原因是没有掌握“1^∞”型极限的求法，错误地采取“部分取极限”的方法：

$$\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}1^{\frac{2}{x}}=1,$$

或

$$\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\infty}=\infty.$$

例 1.1.8 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________.

［答案］ $\frac{1}{1-2a}$.

［提示］ 本题主要考查数列的重要极限“$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$”和连续函数求极限的性质“$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$”.

［解］

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\\&=\frac{1}{1-2a}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)^{n(1-2a)}\right]\\&=\frac{1}{1-2a}.\end{aligned}$$

所以，应填$\frac{1}{1-2a}$.

例 1.1.9 若 $a>0$，$b>0$ 均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$__________.

[答案] $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[提示] 本题主要考查函数的重要极限"$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$"、"$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$"，或考查洛必达法则的应用.

[解法 1]

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}},$$

而由重要极限知

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}=e,$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)\\&=\ln a+\ln b\\&=\ln(ab),\end{aligned}$$

所以 原式$=e^{\frac{3}{2}\ln(ab)}=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[解法 2] 设 $y=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$,

则

$$\ln y=\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}.$$

由洛必达法则，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln y&=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3(a^x\ln a+b^x\ln b)}{a^x+b^x}\\&=\frac{3}{2}\ln(ab)\\&=\ln(ab)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 0}y=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[典型错误] 有的考生填 $\ln(ab)^{\frac{3}{2}}$，原因是取了对数进行运算后忘了取指数还原.

例 1.1.10 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是__________.

[答案] $\lambda>2$.

[提示] 本题主要考查分段函数的导函数的求法以及分段函数连续性的判断方法. 要根据导函数的连续性来确定 λ 的取值范围，所以，应从求导函数 $f'(x)$入手来解决此问题.

[解] 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0} x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x},$$

由于 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，故上面的极限应存在，因而必有 $\lambda>1$，若不然该极限不存在．所以

$$f'(0)=0.$$

于是

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

再由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以有

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0),$$

即

$$\lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

由此可知必有 $\lambda>2$．

综上所述，得到 λ 的取值范围为 $\lambda>2$．应填 $\lambda>2$．

[典型错误] 误认为 $\lambda>1$，原因是极限运算不熟练；还有填 $\lambda>0$ 的，可能是将 $f(x)$ 连续与 $f'(x)$ 连续混淆了．

例 1.1.11 极限 $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=$ ________．

[答案] 2．

[提示] 本题主要考查等价无穷小的替换性质和等价无穷小量"$\sin x\sim x$，$x\to 0$"的应用．

[解] 由于当 $x\to\infty$ 时，$\sin\frac{2x}{x^2+1}\to 0$，且

$$\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$$

故应填 2．

例 1.1.12 函数(　　)在其定义域内连续．

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

[答案] (A)．

[提示] 本题主要考查函数的定义域、初等函数的连续性以及分段函数的连续性的判断方法．初等函数在其定义区间内都是连续的；分段函数在其子区间内往往都是初等函数，也是连续的，而在子区间的分界点处需按照连续函数的定义来判断其连续性．

[解] 应选(A)．

对于选项(A)，$\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)=\ln x+\sin x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，即 $f(x)$ 在定义区间 $(0,+\infty)$ 内连续．

对于选项(B)，$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0$，$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$．

由于 $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$，即 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．故选项(B)不正确．

对于选项(C)，类似地也有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x),$$