大学数学考研清华经典备考教程

线性代数

俞正光 王飞燕 编

清华大学出版社

大学数学考研清华经典备考教程

线性代数

俞正光 王飞燕 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本套书是以理工类、经管类大学本科数学教学大纲和全国研究生入学考试数学考试大纲的要求为基准编写的教学辅导书，作者是清华大学数学科学系主讲教授.

本书讲述“线性代数”课程的基本概念、基本定理与知识点，从基本概念、基本定理的背景及其应用入手，延伸到解题的思路、方法和技巧，并通过一法多题、一题多解的方式兼顾知识的综合与交叉应用，在内容的安排上，既体现出各知识点间承上启下的关系，保持学科结构的系统性，又照顾到各知识点间的横向联系，为读者从全局上、总体上掌握所学的知识提供平台. 为巩固所学的基本概念和基本定理，安排了基本题、综合题(侧重本章知识点的综合)和交叉综合题(侧重各章知识点间的综合)供读者选用，并附有读者自测题，供读者选用.

考虑到教学大纲和考试大纲中对理工类学生或考生的要求涵盖了对经管类学生或考生的要求，只是对所涉及的知识范围及知识点的掌握程度的要求有所不同，所以编写时并没有将经管类的内容单独列出进行编写. 但在内容的编排及例题和习题的选择上，既体现了两者的不同之处，又兼顾了两者的共同之处. 因此，本书同时适用于理工类与经管类学生或考生.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/俞正光，王飞燕编. —北京：清华大学出版社，2005.2
(大学数学考研清华经典备考教程)
ISBN 7-302-09180-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①俞…　②王…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080214 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：刘　颖
印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂
装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　**印张**：18　**字数**：351 千字
版　次：2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-09180-3/O・385
印　数：1～4000
定　价：25.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

前　言

《大学数学——概念、方法与技巧》是一套学习与复习大学数学的系列辅导教材，主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者，系统地复习大学数学内容，以求巩固提高所学知识，取得良好考试成绩而编写的．这套书包括《微积分(上)》、《微积分(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》四本书．选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的．本教材也可作为大学数学的教学参考书．

本书是编者数十年教学经验的积累，是编者依据对课程内容的研究理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的．许多教学资料是第一次对外公开．这些教师不但有丰富的教学经历，同时也多从事科研工作，对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视．对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究．因此，本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性、系统性、交叉性与技巧性的教学风范．同时，本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来，既突出了基础，又具有较强的针对性，希望能对这两类读者都有全方位的指导意义，为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助．

学好数学，重在基础．一味追求技巧，往往导致无所适从，望题生畏．本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练，各章节均配有相当数量的基本例题(例 *．*．*)，其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧．应该说，扎实熟练的基本概念，加上对基本方法的深入思考，是技巧的真正源泉．另外，在大多数章节里，还选编了一定数量的综合例题(综例 *．*．*)，体现知识的综合性与交叉性，与训练综合运用所学知识进行分析问题及解决问题的能力．基于综合性与交叉性的考虑，在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排．读者在使用本书时，对书内例题应首先立足于独立思考，而后有选择地查阅解答过程，对一些典型题，应争取有自己的解题方法，很可能你的方法会优于书中提供的方法，果真如此，正说明你学习的深入．对准备考研的读者，鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类，在使用本书时，可参照考试大纲，有选择地略去书内某些章节．

每章后配备了练习题及答案．读者应力争独立选做其中的题目，以求达到良好效果．每册书后附有清华大学相应课程的近期试题及答案，以供读者练习．

全书编写工作得到清华大学数学科学系副主任白峰杉教授与其他许多教师的支持与

帮助.限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出.

本书主编为刘坤林.《微积分(上)》的编者为刘坤林(1～13 章),《微积分(下)》的编者为谭泽光(14～23 章);《线性代数》的编者为俞正光(1～3 章),王飞燕(4～6 章);《概率论与数理统计》的编者为叶俊(1～5 章),赵衡秀(6～8 章).

作　者

2004 年 9 月于清华园

作者简介

谭泽光

1962年毕业于清华大学.清华大学责任教授.

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作,曾在奥地利Graz University任访问教授.讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程,分析系列课程负责人.长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

负责过多项科研项目,发表学术论文20多篇,并编著数学规划等教材.先后获省部级以上奖励四次,1992年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委.1997年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,投入较多精力从事数学教改研究工作,2001年获国家教学改革成果二等奖.

俞正光

1962年毕业于清华大学.清华大学责任教授.

清华大学代数系列课程负责人.从事组合图论的研究,发表学术论文10多篇.主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.1997年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,从事数学教改研究工作.

曾参加全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA联考考前辅导教材》,主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

刘坤林

1970年清华大学数学力学系毕业.清华大学责任教授.

从事基础数学与应用数学教学工作,两次获清华大学教学优秀奖.研究方向:控制理论与系统辨识,随机系统建模及预测,并行计算.1994年至1995年在美国Texas A&M University与Duke University任访问研究教授并讲学.发表学术论文30多篇,著有教材《工程数学》,《系统与系统辨识》.先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖.水木艾迪考研辅导班主讲.

中国工业与应用数学学会常务理事,副秘书长.系统与控制专业委员会委员,《控制理论及其应用》特邀审稿专家.

赵衡秀　女

1962年毕业于清华大学．清华大学数学科学系副教授．

研究方向为概率统计应用．长期讲授"概率统计"及"微积分"等课程．并担任水木艾迪考研辅导班数学主讲．

参加编写《MBA全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材．

王飞燕　女

1967年毕业于清华大学．清华大学数学科学系教授．

主要研究方向：运筹学，经济数学．参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍．长期在清华大学从事数学教学与教学研究．主要讲授的课程有：高等数学，代数与几何，数学模型等．长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲．

曾获清华大学优秀教学成果奖．

叶　俊

1993年北京师范大学数学系博士研究生毕业．清华大学副教授．

专业方向：概率统计，应用数学．主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究．曾编写《随机数学》等教材．

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程．曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖，1996，1997年度清华大学优秀教学成果特等奖，1999年获宝钢优秀教师奖．

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲．

目　　录

第1章 行 列 式

1.0 引 言

方阵的行列式是一个数,其值是否为 0 决定了一个矩阵是否可逆;一个矩阵中子式的值决定了矩阵的秩的大小;求矩阵的特征值要通过行列式的计算;讨论向量组的线性相关性、讨论线性方程组的解要利用行列式;一个实对称矩阵的子式的值决定了该矩阵的正定性. 凡此种种说明了行列式在线性代数中的地位与作用.

行列式的重点内容有二,其一是利用行列式的性质计算行列式,其二是行列式的展开定理及其应用. 行列式的直接应用是解线性方程组的克拉默法则.

1.1 行列式的性质

行列式的性质在行列式中占有非常重要的地位. 我们通常总是利用行列式的性质,把一个复杂的行列式化成简单的、易算的行列式,最终计算出结果. 在行列式的诸多性质中,以下几条是最基本的,其他性质都可以通过它们推导出来.

1. 行列式的行列互换,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这条性质说明行列式中关于行成立的性质,对列也成立.

2. 互换行列式的两行，行列式变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 如果行列式中某行元素有公因子 c，则公因子可提到行列式外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. 如果行列式中某行元素是两个数之和，则可拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

从以上四条性质可以推出许多性质，其中最常用的还有：

5. 如果行列式中有两行成比例或相等，则行列式为零.

6. 行列式中某行元素乘以数 k 然后加到另一行相应的元素，其值不变，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.1.1 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

思路 (1) 这个行列式的特点是每行元素的和都相等，因此如果把各列都加到第 1 列，则第 1 列有公因子 $x+(n-1)$，可以提到行列式外，这就形成以下解法一.

(2) 这个行列式的另一特点是每行每列只有一个元素与其他元素不同，可以试图利用性质 4 来简化计算，这就是以下解法二.

【解】 方法 1：

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ x+(n-1) & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-1) & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

方法 2：

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x-1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+x-1 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+x-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1} + (x-1)^n$$

$$= (x-1)^{n-1} \cdot (n+x-1).$$

技巧 方法2中用到一个技巧,即把原来只是一个数的每个元素改为两个数之和,使之形成很有规律又便于计算的行列式.

【注1】 从本例看到性质4的运用,不见得原题已经具备直接应用的条件,这个条件往往需要自己来创造.

方法3:若 $x=1$,行列式显然为0,设 $x\neq 1$,将原行列式加一行一列,使之变成 $n+1$ 阶行列式,但保持值不变.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \cdots & \frac{1}{x-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^n \begin{vmatrix} 1+\frac{n}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \cdots & \frac{1}{x-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^n\left(1+\frac{n}{x-1}\right)$$

$$= (x-1)^{n-1}(x-1+n).$$

【解毕】

【注 2】 方法 3 的方法叫加边法或升阶法. 行列式计算中通常是通过降阶来简化计算,这里却反其道而行之,读者可仔细体会其中的道理.

例 1.1.2 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}| =$ _____.

(1997 年考研题)

【解】

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-1)^{n-1}.$$

【解毕】

【注】 此题为例 1.1.1 中 $x=0$ 的特例.

例 1.1.3 计算

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

思路 (1) 将 1 看成 1+0,就可利用性质 4 解题.

(2) 也可以考虑通过加边方法升阶来计算.

【解】 方法 1:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

方法 2：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

【解毕】

【注】 例 1.1.1 方法 3 和本题方法 2 的解题过程都化出了一个爪形的行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & & \\ -1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

这是又一种常见类型的行列式. 读者不妨按以下三种情形总结一下计算方法：(1) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有两个为0；(2) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中只有一个为 0；(3) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全不为 0.

例 1.1.4　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是三维向量，已知三阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=a$，求$|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1|$.

思路　显然此题要利用性质 4 拆成几个行列式之和.

【解】

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1|\\
=&|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1|+\\
&|2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1|+|2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|+|2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1|\\
=&|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+0+0+0+0+0+0+2^3|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|\\
=&|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+8|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\
=&9a.
\end{aligned}
$$

【解毕】

例 1.1.5　若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是四维列向量，且四阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则四阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|$等于______.

(A) $m+n$;　　(B) $-(m+n)$;

(C) $n-m$;　　(D) $m-n$.

(1993 年考研题)

思路　先用性质 4，再用性质 2.

【解】

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|&=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|\\
&=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\
&=-m+n.
\end{aligned}
$$

故选(C).　　【解毕】

1.2　行列式的展开定理

行列式按一行展开的定理是行列式的一条非常重要的性质，是行列式常用计算方法的重要依据. 不仅如此，还是逆矩阵存在的充分条件的理论根据.

按行展开定理包含两部分内容，其一是说行列式任何一行的元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式的值；其二是说行列式任何一行的元素与其他行的对应元素的代数余子式的乘积之和为零. 合起来用以下式子表示：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

其中 A_{jk} 表示元素 a_{jk} 的代数余子式，其值为

$$A_{jk}=(-1)^{j+k}M_{jk},$$