

高等 **工科院校** 试用教材

塑性力学

◎ 主编 王春玲

Suxing
Lixue

中国建材工业出版社

塑性力学

主编 王春玲

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学/王春玲主编. —北京:中国建材工业出版社, 2005. 4

ISBN 7-80159-811-3

I. 塑... II. 王... III. 塑性力学—教材
IV. 0344

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026037 号

塑性力学

王春玲 主编

出版发行: **中国建材工业出版社**

地 址:北京市西城区车公庄大街 6 号

邮 编:100044

经 销:全国各地新华书店

印 刷:北京鑫正大印刷有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:10.75

字 数:262 千字

版 次:2005 年 4 月第 1 版

印 次:2005 年 4 月第 1 次

定 价:19.00 元

网上书店: www.ecool100.com

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010)88386904

前 言

本书是在西安建筑科技大学多年一直使用的塑性力学讲稿及数年教学经验的基础上加以整理和补充而成的。在本书的编写过程中,吸收了国内现有教材的优点,同时突出了本书的特色。

为了兼顾工程力学专业高年级学生和工科研究生这两种不同对象的需要,本书在结构上采取由浅入深、先易后难的原则,除重点讲授塑性力学的基本概念、基本理论和基本方法,加强与土建工程相关的内容外,还针对工科学子数学起点低,力学概念差,增写了一些数学知识和力学概念,并补充了一些工程实例及塑性有限元知识。所以,本书也可作为工科有关专业高年级学生的选修课或工程技术人员的自学参考用书。

本书分9章:第1章 简单应力状态下的弹塑性问题;第2章 应力状态和应变分析;第3章 屈服条件;第4章 塑性本构关系;第5章 弹塑性力学边值问题的简单实例;第6章 理想刚塑性平面应变问题;第7章 极限分析原理;第8章 结构的塑性极限分析;第9章 有限单元法解弹塑性问题。书后附有习题参考答案、主要符号列表和参考文献。

由于各校塑性力学课程学时多少很不一致,在本书目录上有*号的内容可以删去不讲或留给学生自学。

本书第6章由张为民编写,第1、2、4、9章由刘彤编写,其余4章由王春玲编写。全书的编写工作由王春玲负责,书稿由朱寅审阅。

衷心感谢黄义教授对本书提出的宝贵修改意见和建议。另外,在教材的编写过程中,还得到了我校研究生处、教材科、力学教研室的多方面支持,在此一并致谢!

限于编者水平,书中肯定存在一些不妥之处,诚恳欢迎批评指正。

编者

2004年12月

目 录

第 1 章 简单应力状态下的弹塑性问题	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 金属材料的基本试验	(2)
1.3 应力-应变关系的简化模型	(6)
1.4 理想弹塑性材料的三杆桁架	(7)
* 1.5 线性强化弹塑性材料的三杆桁架	(10)
1.6 加载路径对桁架内应力和应变的影响	(11)
第 2 章 应力状态和应变分析	(17)
2.1 张量概念	(17)
2.2 应力分析	(19)
2.3 应变分析	(29)
第 3 章 屈服条件	(35)
3.1 初始屈服条件和初始屈服曲面	(35)
3.2 几种常用的屈服条件	(37)
3.3 屈服条件的实验验证	(42)
3.4 后继屈服条件及硬化模型	(45)
* 3.5 岩土力学中的库伦屈服条件	(48)
第 4 章 塑性本构关系	(51)
4.1 加载与卸载准则	(51)
4.2 弹性应力-应变关系	(52)
4.3 全量型本构关系	(54)
4.4 全量理论的基本方程及边值问题的提法	(56)
4.5 理想塑性材料的增量型本构关系	(57)
4.6 弹塑性强化材料的增量型本构关系	(60)
4.7 增量理论的基本方程及边值问题的提法	(61)
* 4.8 塑性势及流动法则	(62)
第 5 章 弹塑性力学边值问题的简单实例	(67)
5.1 梁的弹塑性弯曲	(67)
5.2 压杆的塑性失稳	(74)
* 5.3 圆杆的弹塑性扭转	(77)

* 5.4	非圆截面杆的塑性极限扭矩	(79)
5.5	理想弹塑性材料的厚壁球壳	(83)
5.6	理想弹塑性材料的厚壁圆筒	(86)
* 5.7	硬化材料的厚壁圆筒	(91)
5.8	旋转圆盘	(92)
第 6 章	理想刚塑性材料的平面应变问题	(97)
6.1	平面应变问题的基本方程	(97)
6.2	滑移线	(99)
6.3	滑移线的性质	(101)
6.4	塑性区的边界条件	(103)
6.5	简单的滑移线场	(105)
* 6.6	基本边值问题及滑移线场的数值求解	(106)
* 6.7	理想刚塑性平面应变问题的完全解	(109)
6.8	楔的单边受压	(110)
6.9	刚性压模的冲压问题	(112)
* 第 7 章	极限分析原理	(114)
7.1	极限状态和极限分析	(114)
7.2	极限分析定理	(115)
7.3	界限定理的应用	(119)
第 8 章	结构的塑性极限分析	(122)
8.1	结构塑性极限分析的基本概念	(122)
8.2	塑性极限分析的界限定理	(123)
8.3	超静定梁的塑性极限分析	(127)
8.4	刚架的塑性极限分析	(132)
8.5	简支方形薄板的塑性极限分析	(137)
8.6	用机动法计算多边形薄板的极限载荷	(141)
8.7	轴对称圆板的极限载荷	(144)
* 第 9 章	有限单元法解弹塑性问题	(149)
9.1	本构关系的矩阵形式	(149)
9.2	求解弹塑性问题的迭代法	(154)
9.3	求解弹塑性问题的增量法	(155)
9.4	初荷载法	(157)
附录 1	习题答案	(159)
附录 2	主要符号	(163)
参考文献		(164)

第 1 章 简单应力状态下的弹塑性问题

1.1 引言

当物体承受较小的外力时,卸除外力后,物体可以完全恢复原有的形状.这种可恢复的变形称为**弹性变形**,它是弹性力学研究的对象.而当外力超过一定的限度时,即使卸除全部外力,物体的变形也不能完全恢复.这种不可恢复的变形称为**塑性变形**.**塑性力学**的主要任务就是研究固体发生塑性变形时应力分布和应变分布的规律,是固体力学的一个分支.

塑性力学往往是相对于弹性力学而言的.在弹性力学中,物质微元的应力和应变之间具有单一的对对应关系.然而,材料在一定的外界环境和载荷条件下,其变形往往会具有非弹性性质,即应力和应变之间不是单一的对对应关系.非弹性变形主要有塑性变形和粘性变形两种.在一定的外力下,塑性变形并不随时间而改变,而**粘性变形**则随时间而改变,例如蠕变、应力松弛等现象就是粘性效应的反应.另外,在习惯上也常用塑性和脆性这一对概念来区别物体在经受变形直至破坏时变形的大小.如果变形很小就破坏,就称是**脆性**.这时材料的塑性变形能力较差,通常可近似地用弹性理论进行分析.如果经过了很大的变形才破坏,就称材料具有较好的**韧性**或**延性**,这时材料的塑性变形能力较强.在这种情况下,物体从开始出现永久变形到最终破坏之间仍具有承受载荷的能力.因此,为了发挥韧性材料的承载潜力,就应该采用塑性力学的分析方法.

作为固体力学的分支,塑性力学所研究的问题一般可分为两个方面:一方面是以试验观察所得结果为出发点,建立塑性状态下变形的基本规律,即本构关系,以及有关的基本理论;另一方面则是应用这些关系和理论求解具体问题.塑性力学求解的工程问题又可分为两类:一类是出于机械加工工艺的需要,希望材料发生永久变形,以得到一定形状的零件,如金属压延、拉拔等.这类问题的塑性变形较大,需要研究最为有利的加载方式,以达到最好地发挥材料塑性变形的特性,使其变形均匀且不发生破坏以及如何施加的力最小或消耗的能量最少等.另一类问题,即求物体在载荷等外界因素的作用下应力和变形的分布,包括研究在加载过程中,物体内部各处的应力及变形,以及确定物体内部已进入塑性状态的范围.工程结构在受载过程中,由于应力分布的不均匀性,虽然局部区域的应力已超过弹性极限,产生了一定的塑性变形,但整个结构仍具有承载能力.这类问题需要探讨如何充分利用材料的潜力,以求最大限度地提高结构的承载能力.

塑性力学与弹性力学有着密切的关系.弹性力学中的一些基本假设以及关于应力、应变的分析等与材料物理性质无关的基本概念,都将在塑性力学中得到应用.塑性力学也采用连续介质力学的宏观的方法,但是,它不去探究材料塑性变形的内在机理,而是从材料的宏观塑性行为中抽象出力学模型,建立相应的数学方程来予以描述.因此,应力平衡方程和应变位移间的几何关系,它们对弹性力学和塑性力学都一样.弹塑性的差别主要表现在应力与应变间的物理关系,即所谓本构关系上.塑性力学中没有一个像广义虎克定律那样统一的应力-应变关系.其

次,由于方程是非线性的,变形与加载的历程有关,求解问题时不可避免地存在数学上的困难.还有,在求解问题时,物体的弹性区和塑性区往往是共存的,需要决定两个区域的分界面,并满足分界面上力与变形的连续条件,从而又增加了解题的困难.所以塑性力学首先要解决的问题是在实验资料的基础上确定塑性本构关系,加上平衡和几何的考虑,进而建立弹塑性边值问题;然后,根据不同的具体情况,寻求数学计算方法求解弹塑性边值问题.

学习塑性力学除了要有一定的数学、物理和力学的基础外,还需要有金属物理等工程材料的知识,这样才能把宏观和微观的研究结合起来.所谓微观或细观方法是在金属物理和材料科学中发展起来的,重点研究材料弹塑性变形的微观机理.微观方法往往是因材料而异,例如金属、土壤、岩石、混凝土和各种复合材料,就各有不同的塑性变形机理.塑性力学现代研究的一个重要趋势是把宏观和微观结合起来,吸收材料科学的近代成果,丰富和发展原有的理论.

塑性力学是结构极限设计、金属压力加工、高温蠕变、爆炸力学、断裂力学以及弹塑性有限元等课程必不可少的基础.本课程着重讨论金属材料的塑性性能,不考虑时间、加载速度等因素对材料力学性质的影响,所得结果可部分地应用于解决土壤、岩石、高分子化合物等的力学问题.

1.2 金属材料的基本试验

在建立塑性理论和进行结构弹塑性分析之前,必须着重研究材料在塑性阶段的力学性质和变形规律.由单向拉伸(或压缩)和薄壁筒扭转试验所得到的应力-应变曲线是塑性理论最基本的试验资料.由于扭转试验所得的曲线与拉伸曲线近似,而拉伸试验容易实现,在此仅介绍单向拉伸(或压缩)的某些试验结果.此外,还将介绍与塑性理论密切相关的静水压力试验.

1.2.1 简单的拉伸试验

一般来说,当物体承受外力时,应力和应变在物体内是随着位置坐标而变化的;但是一点的应力和应变不好测量;因此需要找一个应力和应变都均匀的状态来测量.简单拉伸或简单压缩试验就能近似地做到这一点.

这类试验通常在常温、准静态加载的试验条件下进行,试件如图 1-1 所示.在材料试验机上进行拉伸(或压缩),便可得到载荷-轴向伸长(或缩短)的关系,从而也得出材料的应力-应变关系.在载荷 P 作用下,试件的初始长度 l_0 和初始横截面面积 A_0 将分别变为 l 和 A .假定试件中部的应力和变形都是均匀的,故可定义名义应力 $\sigma = P/A_0$ 和名义应变 $\epsilon = (l - l_0)/l_0$.图 1-2(a)、(b)分别显示了铝和低碳钢两种材料典型的拉伸试验曲线.

在拉伸的初始阶段,材料的应力与应变成正比,服从虎克(Hooke)定律(其中 E 为弹性模量):

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-1)$$

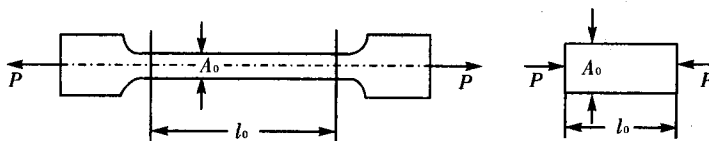


图 1-1

在图上表现为一段直线. 在到达比例极限之后, 直线开始弯曲, 直到弹性极限. 在弹性极限之前, 如果卸除载荷, 而使应力下降到零, 则应变也沿原来曲线下降到零, 变形将完全恢复, 这是弹性的基本特征. 当超过弹性极限后, 如果卸除载荷, 虽然应力降到零, 应变却不为零, 残留的这部分应变称为塑性应变 ϵ^p , 此时, 试件内仍保留一部分变形, 通常称之为永久变形, 或塑性变形. 可见弹性与塑性的根本区别不在于应力-应变关系是否线性, 而在于卸载后变形是否可恢复.

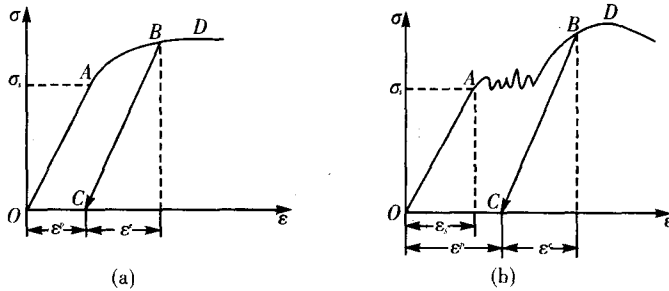


图 1-2

有些材料在达到弹性极限之后, 还将出现一个应力保持不变而应变显著增加的阶段. 这个阶段称为材料的屈服阶段, 这种现象称为材料的屈服. 低碳钢等金属材料的屈服阶段很长, 其应变可以达到最大弹性应变的 10~15 倍. 对于很多材料, 比例极限、弹性极限、屈服极限三者相差不大, 通常在工程上可不加区分, 我们以后将用 σ_s 表示之, 并统称为屈服应力.

铝、铜和某些高强度合金钢没有明显的屈服阶段, 因此, 工程上通常采取产生 0.2% 的塑性应变相对应的应力作为条件屈服应力, 并以 $\sigma_{0.2}$ 表示, 也叫名义屈服应力, 如图 1-3(a) 所示, 或者将拉伸曲线中割线模量为 0.7E 处的应力定义为条件屈服应力, 如图 1-3(b) 所示. 后一种定义方法比前一种更简单, 对于一般钢材两种方法确定的条件屈服应力近似相等.

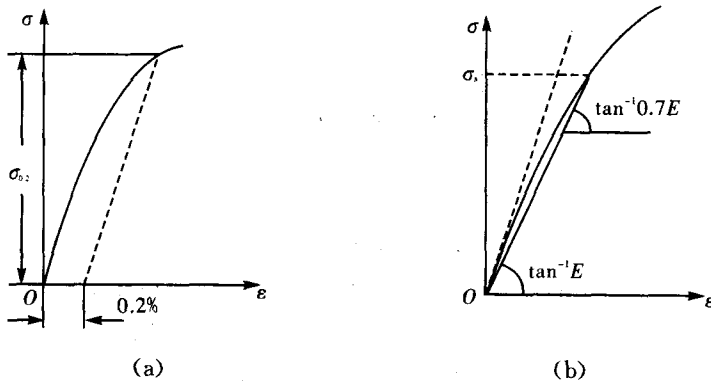


图 1-3

经过屈服阶段后, 材料又恢复了抵御变形的能力, 必须增加载荷才能继续产生变形, 这种现象称为材料的强化(或硬化). 与弹性阶段相比, 材料要产生相同的应变增量, 所需的应力增量要小得多, 而且随着变形的增加而逐渐减小, 即所谓渐减强化, 在 $\sigma-\epsilon$ 图上表现为一段斜率渐减的曲线, 其斜率 E_t 叫做切线模量.

在产生了一定塑性变形以后, 如果减小载荷, 则应力-应变关系将不按原有的曲线退回原

点,而是沿着一条与初始弹性阶段相平行的直线变化,斜率为 E . 当载荷完全卸掉之后,应变的弹性部分

$$\epsilon^e = \sigma/E \quad (1-2)$$

就会恢复,而塑性应变 ϵ^p 就会残存下来. 从图 1-2 可以看出,应变可以分解为弹性应变和塑性应变两部分,即

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1-3)$$

其中 ϵ^e 已由式(1-2)同应力 σ 联系起来,故有

$$\epsilon^p = \epsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (1-4)$$

在加载和卸载过程中,应力和应变服从不同的规律,是材料在塑性阶段的一个重要特点. 判别材料是加载还是卸载的准则,称之为**加载、卸载准则**. 在简单应力状态下,该准则写成:

$$\begin{cases} \sigma d\sigma \geq 0 & \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (1-5)$$

此式也适用于 $\sigma < 0$ 的压缩情形. 有了这一准则,我们可以把简单拉伸在塑性阶段的应力-应变关系归纳为:

$$\begin{cases} d\sigma = E_t d\epsilon & \sigma d\sigma \geq 0 \\ d\sigma = E d\epsilon & \sigma d\sigma < 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

注意,这时一般只能写出增量形式的应力-应变关系.

若从图 1-2(b)中的 B 点卸载到 C 点,再从 C 点重新加载,开始时应力和应变仍服从弹性规律 $d\sigma = E d\epsilon$,到 B 点后会重新进入塑性状态. 与 B 点相应的应力叫**后继屈服应力**. 由于前面已经提到的材料的强化,后继屈服应力通常比初始屈服应力高,其提高的程度与塑性变形的历史有关,或者说与塑性阶段的加载历史有关. 因此后继屈服应力可写成下述函数形式

$$\sigma = H(\epsilon^p) \quad (1-7)$$

或
$$\varphi(\sigma, h_a) = 0 \quad (1-8)$$

其中 h_a 是记录材料的塑性加载历史的参数, φ 则被称为加载函数.

但是后继屈服应力的提高是有限度的. 图 1-2(b)中的曲线的最高点(D 点)所对应的应力 σ_s ,叫做材料的**强度极限**,它是材料所能承受的最大应力.

1.2.2 包辛格效应

如果从试件的自然状态起,一开始就反向加载,在应变不太大的范围内,材料一般也呈现

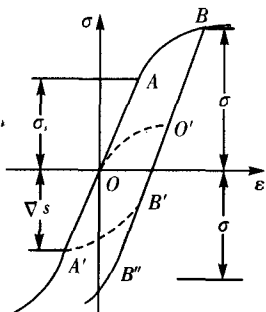


图 1-4

与正向加载同样的性质. 但如果正向加载在塑性变形发展到一定程度之后卸载,例如从图 1-4 上的 B 点开始卸载,然后再反向加载,会出现什么现象呢? 对于单晶体材料所作的试验表明,在这种情况下反向屈服应力的绝对值要大于初始屈服应力 σ_s ,即正向强化时反向也强化,见图 1-4 中的 B' 点. 对于一般材料,在这种情况下反向屈服应力的绝对值小于初始屈服应力 σ_s ,即正向强化时反向会弱化,见图 1-4 中的 B' 点. 这种现象称为**包辛格 (Bauschinger) 效应**,它使具有强化性质的材料由于塑性变形的增加,屈服应力在一个方向上提高,同时在反方向上降低,材料具有了各向异性性质. 在求解问题时,为了简化通

常忽略这一效应,但有反方向塑性变形的问题须考虑包辛格效应.后继屈服应力不仅与所经过的塑性变形的大小密切相关,还受到它所经历的塑性变形的方向的影响.

由上述实验现象,我们看到材料的塑性变形有以下几个共同的特点:

(1)应力-应变关系呈非线性. σ 与 ϵ 之间的线性关系式(1-1)是有适用范围的.

(2)由于加载过程和卸载过程服从不同的规律,应力与应变间不存在单值对应关系.对于不同的加载路径,同一个应力 σ 可对应于不同的应变 ϵ ,或同一个应变 ϵ 可对应于不同的应力 σ .应力的大小不仅与当时的应变大小有关,还与应变的历史有关.所以说,应力与应变间的非单值性是一种路径有关性.

(3)由于塑性应变不可恢复,所以外力所作的塑性功具有不可逆性,或者叫耗散性.在一个加载-卸载的应力循环中,外力做功恒大于零,这一部分能量被材料的塑性变形所消耗.

1.2.3 静水压力试验

在各向均匀高压的条件下,对金属材料进行了大量试验研究,主要结论为:

(1)静水压力对材料屈服极限的影响忽略不计.

对钢试件作静水压力拉伸和无静水压力拉伸的对比试验发现,静水压力对屈服极限影响很小,可以忽略不计,即材料的塑性变形与静水压力无关.但对于铸铁、岩石、土壤等材料,静水压力对屈服极限和塑性变形的大小都有显著影响,不能忽略.

(2)静水压力与材料的体积改变近似地服从线性弹性规律.

试验时,若卸除静水压力,材料体积变化可以恢复,没有残留的体积变形,因而可以认为各向均压时体积变化是弹性的,或者说,塑性变形不引起体积变化.当压力约为金属的屈服极限时,材料的体积变形与按弹性规律计算的结果相差约为1%,可以忽略不计,完全可以按弹性规律计算.试验还表明,这种弹性的体积变形是很小的.例如弹簧钢在10000个大气压下体积仅缩小2.2%.因此,对于一般应力状态下的金属材料,当发生较大的塑性变形时,可以忽略弹性的体积变化,而认为材料在塑性状态时的体积是不可压缩的,即体积不变仅改变形状.

最后,简单提一下影响材料性质的其他几个因素.

(1)温度 温度的升高将使屈服应力 σ_s 降低,而塑性变形的能力(韧性)提高.在高温条件下,材料会产生蠕变、应力松弛等具有明显粘性效应的现象,即当应力不变时应变仍会随时间不断增长.通常,塑性力学不考虑这种与时间有关的塑性变形.

(2)应变速率 如果在试验中将加载速度提高几个数量级,则屈服应力 σ_s 也会相应的提高,但材料的塑性变形能力有所下降.对于一般加载速度的情形,可以不考虑这一效应.对于冲击碰撞或爆炸加载条件下材料性能的改变,就需要考虑应变速率效应对材料性质的影响,这通常在塑性动力学中专门研究.

1.2.4 关于材料性质的基本假设

在工程中应用的金属材料种类很多,其性质各有差异.为便于研究,在上述试验观察的基础上,忽略一些次要因素,根据材料的主要性质作出如下假设:

(1)材料是均匀、连续的,在初始屈服前为各向同性.

(2)平均正应力(静水压力)不影响材料的屈服;它只与材料体积应变有关,并且体积应变是弹性的.

- (3) 材料的弹性性质不受塑性变形的影响.
- (4) 不考虑时间因素对材料性质的影响.

1.3 应力-应变关系的简化模型

1.3.1 应力-应变关系简化模型

将具体材料的简单拉伸(或压缩)试验曲线直接用于实际计算,往往是很不方便的.为此,常常根据不同的问题,对不同材料在不同的条件下进行不同的简化.从而可得到基本上能反映该材料的力学性质而又便于数学计算的简化模型.最常用的模型有以下几种:

1. 理想弹塑性模型

在这种模型中,认为材料中应力达到屈服极限以前,应力-应变服从线弹性关系;应力一旦达到屈服极限,则应力保持为常数 σ_s ,如图 1-5 所示,即

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_s) \\ \sigma_s & (\varepsilon > \varepsilon_s) \end{cases} \quad (1-9)$$

对于低碳钢一类材料, $\sigma-\varepsilon$ 曲线有一较长的水平屈服阶段,当所研究问题应变不太大时,可以不必考虑后面的强化阶段,而采用理想弹塑性模型比较合适.

2. 理想刚塑性模型

该材料模型略去理想弹塑性模型的线弹性部分,在应力达到屈服极限 σ_s 前材料为刚性的,而应力达到 σ_s 后材料为理想塑性的.如图 1-6 所示,即

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_s) \\ \text{不定} & (\sigma = \sigma_s) \end{cases} \quad (1-10)$$

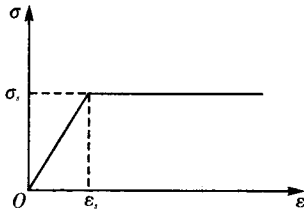


图 1-5

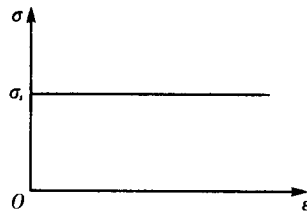


图 1-6

在弹性应变比塑性应变小很多以至可以忽略,如在进行结构塑性极限分析时,则采用理想刚塑性模型.

3. 线性强化弹塑性模型

对于一般合金钢、铝合金等强化材料,可以用两段折线近似实际的拉伸曲线.如图 1-7 所示.当应力达到屈服极限 σ_s 前,应力-应变关系呈线弹性关系,应力超过 σ_s ,则为线性强化关系,即

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_s) \\ \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) & (\varepsilon > \varepsilon_s) \end{cases} \quad (1-11)$$

式中 E_1 为强化阶段直线斜率.当 $E_1=0$ 时即为理想弹塑性模型.

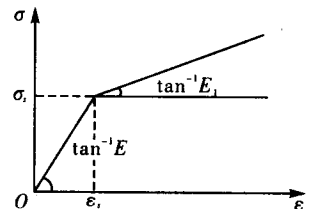


图 1-7

4. 线性强化刚塑性模型

该模型忽略了线性强化弹塑性模型中的线弹性部分,即在应力达到 σ_s 前材料为刚性的,应力超过 σ_s 后应力-应变关系呈线性强化.如图 1-8 所示,即

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (\sigma \leq \sigma_s) \\ \frac{1}{E_1}(\sigma - \sigma_s) & (\sigma > \sigma_s) \end{cases} \quad (1-12)$$

以上仅对拉伸应力状态进行了讨论,其关系同样适用于压缩应力状态.

除以上四种简化模型外,还有一种在数学上统一处理弹塑性的幂次强化模型,在简单拉伸情形其加载规律为

$$\sigma = A\varepsilon^n \quad (1-13)$$

更一般地可写成

$$\sigma = A |\varepsilon|^n \text{sig} \varepsilon \quad (1-14)$$

而

$$\text{sig} \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{当 } \varepsilon > 0 \\ 0, & \text{当 } \varepsilon = 0 \\ -1, & \text{当 } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

其中 A 和 n 均为材料常数, $A > 0, 0 \leq n \leq 1$. 当取 $n=0$ 时,相当于理想刚塑性材料, $n=1$ 时为线性弹性材料. 当 $0 < n < 1$ 时, $\sigma-\varepsilon$ 曲线在 $\varepsilon=0$ 处斜率为无穷大,与材料实际性能不符,但这样的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线用于处理应变较大的问题还是方便可行的.

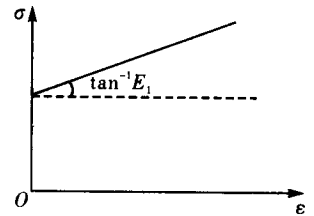


图 1-8

1.3.2 强化模型

材料的后继屈服应力一般将随塑性应变的增加而增加,一个方向上后继屈服应力的这种变化(强化)将会引起相反方向上后继屈服应力的变化(强化或弱化).这是一个很复杂的问题.为了简化数学处理,当前经常采用的简化模型有以下三种,如图 1-9 所示.

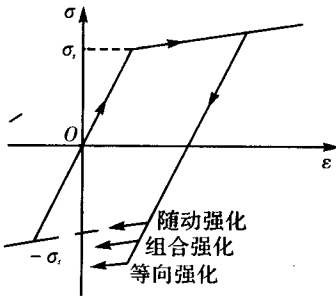


图 1-9

1. 等向强化模型

该模型也叫各向同性强化模型. 这是在不考虑包辛格效应的情况下,假定不论材料经历的是拉伸塑性应变还是压缩塑性应变都将同样影响强化,因而若材料在任一方向强化了,则在相反的方向也得到同等程度的强化.

2. 随动强化模型

该模型假定由于包辛格效应减小了反方向加载时的屈服应力,而总的弹性范围大小保持不变.

3. 组合强化模型

为了克服随动强化模型将包辛格效应绝对化的缺点,更合理地反映材料的真实特性,可将上述两种强化模型组合起来.

1.4 理想弹塑性材料的三杆桁架

以结构弹塑性平衡的一个最简单的例子为例,研究图 1-10 所示的三杆对称桁架受竖力 P 作用的问题. 这是一个静不定桁架,三根杆件均只受轴向力的作用,处于简单拉伸或压缩

状态。

设各杆的初始横截面面积均为 A_0 ，相邻杆间夹角为 45° ，第 2 根杆的初始长度为 l_0 ，则第 1 和第 3 杆的长度均为 $\sqrt{2}l_0$ 。用 F_{N_1} 、 F_{N_2} 和 F_{N_3} 表示 1、2 和 3 杆的内力，则节点平衡方程为：

$$\begin{cases} F_{N_1} = F_{N_3} \\ (F_{N_1} + F_{N_3})/\sqrt{2} + F_{N_2} = P \end{cases}$$

消去 F_{N_3} ，并用 A_0 通除后，得到以应力表示的平衡方程

$$\sqrt{2}\sigma_1 + \sigma_2 = P/A_0 \quad (1-15)$$

其中

$$\sigma_1 = F_{N_1}/A_0, \quad \sigma_2 = F_{N_2}/A_0$$

变形协调关系可由节点的竖直位移 δ 导出：

$$\delta = \epsilon_2 l_0 = \epsilon_1 l_1 \sqrt{2} = 2\epsilon_1 l_0$$

于是第 1 和第 2 杆的应变间满足

$$\epsilon_2 = 2\epsilon_1 \quad (1-16)$$

平衡方程(1-15)和变形协调关系(1-16)均与材料的性能无关。下面分析理想弹塑性材料。

1. 弹性阶段

弹性阶段的应力-应变关系为

$$\sigma_1 = E\epsilon_1, \quad \sigma_2 = E\epsilon_2 \quad (1-17)$$

联立式(1-15)、式(1-16)和式(1-17)，求解得到：

$$\sigma_2 = 2\sigma_1$$

故有

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{P}{A_0} \\ \sigma_2 = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{P}{A_0} \end{cases} \quad (1-18)$$

当 P 增加时，第 2 杆首先屈服。 $\sigma_2 = \sigma_s$ 对应的外载为：

$$P_e = \sigma_s A_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1-19)$$

P_e 是该桁架处在弹性范围内所能承受的最大载荷，称为弹性极限载荷。在 P_e 的作用下，节点的竖直位移为：

$$\delta_e = \epsilon_2 l_0 = \frac{\sigma_2}{E} l_0 = \sigma_s l_0 / E \quad (1-20)$$

2. 约束塑性阶段

当 $P > P_e$ 时，第 2 杆已产生塑性变形，但第 1 和第 3 杆仍处于弹性范围内，因此 2 杆的塑性变形要受到 1、3 杆的限制。结构的这种状态称为约束塑性变形状态。

由于材料是理想弹塑性的，进入塑性状态的第 2 杆内应力不再增加，即：

$$\sigma_2 = \sigma_s$$

于是，由平衡方程(1-15)直接解出：

$$\sigma_1 = \left(\frac{P}{A_0} - \sigma_s\right) / \sqrt{2} \quad (1-21)$$

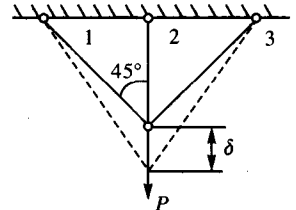


图 1-10

由此看出,当三杆桁架中的一杆进入塑性后,桁架就变成静定的了。

3. 塑性流动阶段

继续增加载荷 P ,使第 1 和第 3 杆达到屈服. 在式(1 - 21)中令 $\sigma_1 = \sigma_s$,得到相应的外载为

$$P_s = \sigma_s A_0 (1 + \sqrt{2}) \quad (1 - 22)$$

P_s 称为**塑性极限载荷**. 由于此时全部结构都已进入塑性,变形已不再受任何限制,结构将产生无限制的塑性变形,或称**塑性流动**. 因此, P_s 表示了结构的**极限承载能力**.

由上面的结果可知对于夹角 45° 的对称三杆桁架.

$$P_s/P_e = \sqrt{2} \quad (1 - 23)$$

同时可求得

$$\begin{aligned} \delta_s &= \varepsilon_2 l_0 = 2\varepsilon_1 l_0 \\ &= 2\sigma_1 l_0 / E = 2\sigma_s l_0 / E = 2\delta_e \end{aligned} \quad (1 - 24)$$

桁架的载荷-位移曲线如图 1 - 11 所示.

由式(1 - 22)可以看出, P_s 与材料的 E 无关,因此,若采用理想刚塑性材料模型(即 $E \rightarrow \infty$),求出的塑性极限载荷 P_s 还是一样.

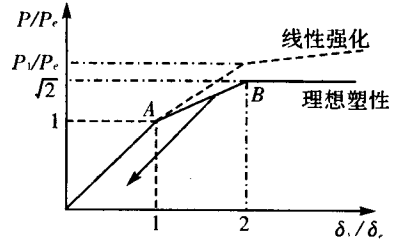


图 1 - 11

对于理想弹塑性材料构成的一般静不定结构,其变形过程都会出现上述三个阶段. 在约束塑性阶段,变形比弹性阶段增长得快,但仍属同一量级,同时承载能力仍在提高. 到了塑性流动阶段,结构丧失了进一步承载的能力,将在塑性极限载荷的作用下无限制地变形下去. 这些结论都具有一定普遍意义.

4. 卸载

若加载到 $P(P_e < P < P_s)$ 后卸载,因卸载服从弹性规律,故应力按式(1 - 18)变化. 并利用式(1 - 19),当载荷变化为 ΔP 时,则各杆内应力和应变相应的变化为:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_2 = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \frac{\Delta P}{A_0} = \frac{\Delta P}{P_e} \sigma_s, & \Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \frac{\Delta P}{A_0} = \frac{\Delta P}{2P_e} \sigma_s \\ \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{E}, & \Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_3 = \frac{\Delta\sigma_1}{E} \end{cases} \quad (1 - 25)$$

若将 P 全部卸除,则残余应力可由约束塑性阶段的应力值减去式(1 - 25)中以 P 代替 ΔP 所得的应力值得到,结果为:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \Delta\sigma_2 = \left(1 - \frac{P}{P_e}\right) \sigma_s < 0 \\ \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \Delta\sigma_1 = \bar{\sigma}_3 = \left(\frac{P}{P_e} - 1\right) \sigma_s / \sqrt{2} > 0 \end{cases} \quad (1 - 26)$$

$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ 代表外载卸至零时构件内的残余应力,注意这个残余应力状态必须与零外载相平衡.

由此,可求得残余位移和残余应变:

$$\bar{\delta} = \sqrt{2} \left(\frac{P}{P_e} - 1\right) \delta_e > 0 \quad (1 - 27)$$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\delta} / 2l_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{P}{P_e} - 1\right) = \bar{\sigma}_1 / E > 0 \\ \bar{\varepsilon}_2 = 2\bar{\varepsilon}_1 > 0 \end{cases} \quad (1 - 28)$$

注意这个残余应变状态自相协调.

对于简单拉伸试件,卸载后的残余应变是塑性应变;而对静不定结构,残余应变中可以含有弹性应变.在本例中,由于在 $P(P_e < P < P_s)$ 作用下第 1 和第 3 杆仍处于弹性范围内,所以第 1 杆和第 3 杆的残余应变 $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_3$ 也是弹性应变.

5. 重复加载

若在卸载以后再重复加载,从 P 卸载到零的过程是一个弹性变形过程,从零再加载到 P 也是一个弹性过程.由于第 2 杆是从压应力 $\bar{\sigma}_2 (< 0)$ 开始的,它的受拉弹性范围现在是 $|\bar{\sigma}_2| + \sigma_s$,比第一次加载时的弹性范围 σ_s 扩大了,从而使得桁架结构的弹性范围也扩大了.如果将桁架加载到 P_s 后卸载,则以后的弹性范围最大可以扩大到 P_s .由此我们注意到,在结构内部产生某种有利的残余应力状态可以扩大它的弹性范围.结构的这种性质,我们常加以利用.

上述讨论的同材料强化后试件的弹性范围将会扩大,其表面上有相似之处,但本质上又有所不同.因为我们讨论的材料属是没有强化的理想弹塑性材料,卸载后重复加载扩大弹性范围所挖掘的是结构的承载潜力,而不是材料承载潜力.

1.5 线性强化弹塑性材料的三杆桁架

为了检验材料强化对结构弹塑性状态的影响,本节仍考虑图 1-10 所示的三杆桁架,但假设材料是线性强化,应力-应变关系为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \sigma \leq \sigma_s \\ \sigma_s + E_1\left(\epsilon - \frac{\sigma_s}{E}\right) & \sigma > \sigma_s \end{cases} \quad (1-29)$$

当 $P \leq P_e$ 时,桁架处于弹性阶段,对弹性阶段的分析与 1.4 节相同,解式(1-18)仍成立,且弹性极限载荷 P_e 仍由式(1-19)给出.

但当 $P > P_e$ 后,第 2 杆进入塑性(强化),应服从式(1-29)第二式,即:

$$\sigma_2 = \sigma_s + E_1\left(\epsilon_2 - \frac{\sigma_s}{E}\right)$$

将上式与式(1-15)、式(1-16)及式(1-29)第一式 $\sigma_1 = E\epsilon_1$ 联立,可以解得:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\frac{P}{A_0} - \sigma_s\left(1 - \frac{E_1}{E}\right)}{2\left(\frac{E_1}{E} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ \sigma_2 = \frac{\frac{E_1}{E} \cdot \frac{P}{A_0} + \sigma_s\left(1 - \frac{E_1}{E}\right)/\sqrt{2}}{\frac{E_1}{E} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases} \quad (1-30)$$

随着载荷的增加,当 $\sigma_1 = \sigma_s$ 时,第 1 杆也进入塑性状态,以 P_1 表示相应的载荷,则由式(1-30)第一式即可得:

$$P_1 = \sigma_s A_0 \left(\sqrt{2} + 1 + \frac{E_1}{E}\right) \quad (1-31)$$

与理想弹塑性材料的塑性极限载荷之比为:

$$\frac{P_1}{P_s} = 1 + \frac{E_1}{E} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad (1-32)$$

若 $\frac{E_1}{E} = \frac{1}{10}$ (中等强化的情形), 则 $\frac{P_1}{P_s} = 1.041$. 由此可见, 考虑材料强化所得到的 P_1 与理想弹性桁架的塑性极限载荷 P_s 差别并不大, 这说明理想弹塑性的近似还是比较好的, 强化对它的影响并不是很大.

但是, 对于由强化材料制成的桁架, 当各杆均进入塑性之后, 应力仍随应变增大. 因此, P_1 并不是桁架承载能力的极限. 换句话说, 由强化材料制成的结构, 不会发生塑性流动, 也不存在塑性极限载荷.

对于节点位移, 考虑材料为线性强化, 可求得相应于 P_s 的位移 $\delta_s = \sigma_s l_0 / E$, 与式(1-20)相同; 而对应于 P_1 的位移 $\delta_1 = 2\delta_s$, 也与式(1-24)的 δ_s 相似. 由此我们可以画出线性强化弹塑性材料的三杆桁架的载荷-位移曲线, 如图 1-11 中的虚线所示. 由图 1-11 可见, 由强化材料制成的桁架也具有三个变形阶段: 弹性阶段, 约束塑性变形阶段, 自由塑性变形阶段. 第三阶段是与理想弹塑性桁架不同. 在约束塑性变形阶段, 材料的强化效应不显著. 在自由塑性变形阶段, 随着变形的发展, 强化的效应越来越大, 但变形增加很快.

当桁架的材料为理想刚塑性和刚-线性强化时, 桁架的载荷-位移关系可以分别由理想弹塑性解和线性强化解令 $E \rightarrow \infty$ 得到.

1.6 加载路径对桁架内应力和应变的影响

理想弹塑性材料的三杆桁架同时受竖力 P 和水平力 Q 的作用, 如图 1-12(a) 所示, 其节点的竖直位移和水平位移分别以 δ_y 和 δ_x 来表示. 此时的基本方程为:

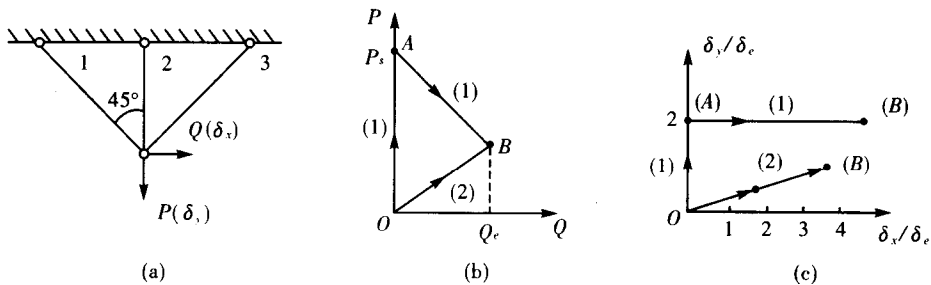


图 1-12

平衡方程:

$$\begin{cases} \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{P}{A_0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{Q}{A_0} \end{cases} \quad (1-33)$$

几何方程:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\delta_x}{2l_0} + \frac{\delta_y}{2l_0} \\ \epsilon_2 = \frac{\delta_y}{l_0} \\ \epsilon_3 = \frac{\delta_y}{2l_0} - \frac{\delta_x}{2l_0} \end{cases} \quad (1-34)$$

且

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + \epsilon_3$$