# 数列的通项公式与前 n 项和的求法

魏鑫来　王艳芬　侯奇　编著

山西教育出版社

魏鑫来　王艳

# 数列的通项公式与前n项和的求法

山 西 教 育 出 版 社

社　　长　任兆文
总 编 辑　左执中
责任编辑　王玉成
封面设计　马　麟

数列的通项公式与前 n 项和的求法
魏鑫来　王艳芬　侯　奇　编著
*
山西教育出版社出版　(太原并州北路 69 号)
山西省新华书店发行　晋阳光明印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/32　印张:6.875　字数:146 千字
1996 年 3 月第 1 版　　1996 年 3 月山西第 1 次印刷
印数:1—3000 册
*
ISBN 7—5440—0848—7
G·849　　定价:7.80 元

# 前　　言

数列不仅是中学数学的一项重要内容，而且是培养学生计算能力、推理能力、综合应用能力的重要题材，同时也是进一步学习高等数学的基础知识.

近年来，有关递归数列的试题在高考中屡次出现.这就更引起了中学生、中学数学教师及广大数学教学工作者的极大兴趣与重视.为此，特编撰这本书，将介绍数列的有关概念、递归数列的实际意义、递归数列的通项公式的求法、数列的求和问题以及和数列有关的其他问题等内容.其中，重点介绍递归数列通项公式的求法.在这过程中，试图通过常用的几种方法由所给的递推关系式导出通项公式来.此外，还注重研究了数列的综合应用.

本书在编写过程中，参考了有关书刊和资料，谨向这些作者致以谢意.

由于笔者水平有限，书中定会有不少缺点和错误，欢迎广大读者批评、指正.

**编者**

# 目　　录

# 一、数列的有关概念

## 1. 数列

数列是按一定次序排列的数，也可以说数列就是数的集合. 它的元素是按自然数编号一个一个地排列起来的.

例如：几个奇数排列成一数列：

$$1,3,5,7,9,11,13. \tag{1}$$

自然数 1,2,3,4,5,…的倒数排列成一数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots. \tag{2}$$

100 以内的质数排成一数列：

$$2,3,5,7,11,13,\cdots 97. \tag{3}$$

$\sqrt{3}$的不足近似值，按精确到 1,0.1,0.01,…依次排列成一数列：

$$1,1.7,1.73,1.732,1.7320,\cdots. \tag{4}$$

把$-\frac{1}{2}$的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，…依次排列成一数列：

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32},\cdots. \tag{5}$$

把$-1$的 0 次幂，1 次幂，2 次幂，…依次排列成一数列：

$$1,-1,1,-1,\cdots. \tag{6}$$

正 $n$ 边形的每一个内角是$\frac{(n-2)\pi}{n}$弧度，依次计算正三角形，正四边形，正五边形，…排列成一数列：

$$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{5},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{7},\cdots. \tag{7}$$

自然数 1,2,3,4,5,…的 0 次幂依次排成一数列：

$$1,1,1,1,\cdots. \tag{8}$$

以上各例中，数列中的每一个数都叫做这个数列的项，各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，…，第 $n$ 项，…. 对于上面数列(1)，每一项与它的序号有下面的对应关系：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 项 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

**2. 数列的通项公式**

不妨再看一例：

函数 $f(n)=n^2-(n+2)(n-2)$，当自变量依次取自然数 1,2,3,4,…，所得的函数值排列成一数列：

$$4,4,4,4,\cdots. \tag{9}$$

从上例可知，数列可看作是定义在自然数集(或它的有限子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的函数 $f(n)$，当自变量依次取由小到大的自然数时，相对应的一列函数值 $f(1),f(2),f(3),\cdots$.

数列的一般形式为

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

也可简记为 $\{a_n\}$，其中 $a_n$ 是数列的第 $n$ 项. 例如，把数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

简记为 $\{\frac{1}{n}\}$. 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 $n$ 项 $a_n$ 与 $n$ 之间的函数关系式可用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公

式.

例如：数列(1)的通项公式是 $a_n=2n-1,(n\leqslant 7)$；

数列(2)的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$；

数列(5)的通项公式是 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$；

数列(6)的通项公式是 $a_n=(-1)^{n-1}$；

数列(7)的通项公式是 $a_n=\frac{(n-2)\pi}{n}$；

数列(8)的通项公式是 $a_n=(n)^0$；

数列(9)的通项公式是 $a_n=n^2-(n+2)(n-2)$.

考察以上数列知，关于数列的通项公式有以下结论：

(1)如若给定了数列的通项公式时，就必定能写出这个数列的任何一项。反过来讲，一般地，也能判断某数是不是这个数列的一项，如果是的话，是第几项.

(2)给出一个数列，未必能写出它的通项公式，如数列(3)、数列(4).

(3)如果给出了一个数列的前几项，假若它有通项公式时，那么这个数列的通项公式不是唯一的.

例如，数列 1,2,4,…的通项公式可以是

$$a_n=2^{n-1},$$

也可以是

$$a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1.$$

再如，数列 1,3,5,7,9,…的通项公式是

$$a_n=2n-1,$$

或是

$$a_n=n^4-10n^3+35n^2-48n+23,$$

或是

$$a_n=2n^4-20n^3+70n^2-98n+47,$$

或是

$$a_n=3n^4-30n^3+105n^2-148n+71.$$

应强调的是，在已知一个数列前几项写出这个数列的通项公式时，如若可以写出，并非是唯一的. 只不过我们要选择这个数列的最简单的通项公式罢了. 有关通项公式的求法这是后事了.

(4)还须注意，数列既然可以看作一个定义域为自然数集 $N$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，那么数列和函数一样，它的通项公式有时不是单一的式子. 例如

设 $$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{当 } n \text{ 为奇数时,}\\[2ex] 1+\dfrac{1}{3^n} & \text{当 } n \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

则此数列为

$$1,1\frac{1}{9},\frac{1}{3},1\frac{1}{81},\frac{1}{5},1\frac{1}{729},\cdots.$$

诚然，数列的通项公式就是函数的解析式子，而这个函数的自变量只可取自然数.

### 3. 数列的分类

(1)按项数是有限或无限来分

①一个数列，如果在某一项的后面不再有任何项，这个数列叫做有穷数列.

例如，数列：

$$1,3,5,7,9,\cdots,2n-1.$$

②一个数列，如果在任何一项的后面都有跟随着的项，这个数列叫做无穷数列.

例如，数列：

$$1,3,5,7,9,\cdots;$$

或 $1,3,5,7,9,\cdots,2n-1,\cdots.$

(2)按照项与项之间的大小关系来分

①一个数列，如果从第 2 项起，每一项都不小于它前面的一项(即 $a_{n+1}\geqslant a_n$)，这样的数列叫做递增数列.

例如，数列：

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots.$$

②一个数列，如果从第 2 项起，每一项都不大于它前面的一项(即 $a_{n+1}\leqslant a_n$)，这样的数列叫做递减数列.

例如，数列：

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots.$$

递增数列与递减数列统称为单调数列.

③一个数列，如果从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项，这样的数列叫做摆动数列，或者称为振动数列.

例如，数列：

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots.$$

$$-2,2,-2,2,\cdots,(-1)^n 2,\cdots.$$

④一个数列，如果它的每一项都相等，这个数列叫做常数列.

例如，数列：

$-1,-1,-1,-1,\cdots$;

$5,5,5,5,\cdots$.

(3)按照任何一项绝对值是否都小于某一正数来分

①一个数列，如果每一项的绝对值都小于某一正数(即$|a_n|<M$，这里 $M$ 是某一正实数)，这个数列叫做有界数列.

例如，数列：

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$

$1,1.4,1.41,1.414,\cdots$

$-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$

$1,1,1,1,\cdots$都是有界数列.

考察以上各例可知，递增数列、递减数列、摆动数列都可为有界数列.显然，常数列必为有界数列.

②一个数列，如果不存在某一个正数能使每一项的绝对值都小于它，这样的数列叫做无界数列.

例如，自然数列：

$1,2,3,4,\cdots$不存在某一个正数能使每一项的绝对值都小于它，所以，自然数列是无界数列.

再如，数列：

$\sqrt[3]{1},-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},-\sqrt[3]{4},\cdots$

$-3,-6,-9,-12,\cdots$都是无界数列.

很明显，凡是有穷数列，一定是有界数列，但无穷数列却未必是无界数列.

## 4. 数列的几何意义

由于数列是以自然数为自变量的函数，当然可以用图象

法来表示．我们用坐标平面上的点来表示数列的各项．点的横坐标即为项的序号，纵坐标等于对应项的值．现举例如下：

数列：$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$ (1)

$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$ (2)

$-2,2,-2,2,\cdots,(-1)^n2,\cdots$ (3)

$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots$ (4)

$1,-2,4,-8,\cdots,(-2)^{n-1},\cdots$ (5)

$1,1,1,1,\cdots$ (6)

的图象分别用图 1—1，1—2，1—3，1—4，1—5，1—6 表示．

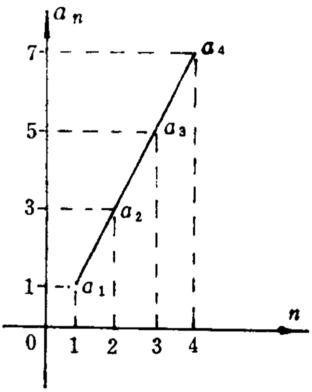


图 1—1

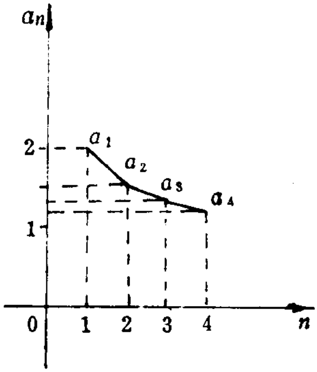


图 1—2

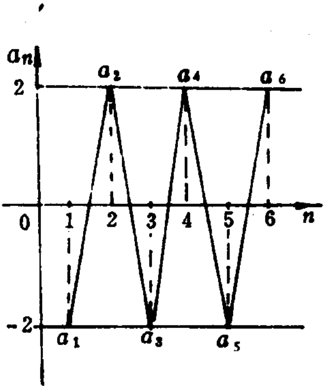


图 1—3

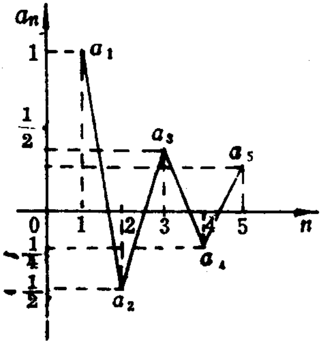


图 1—4

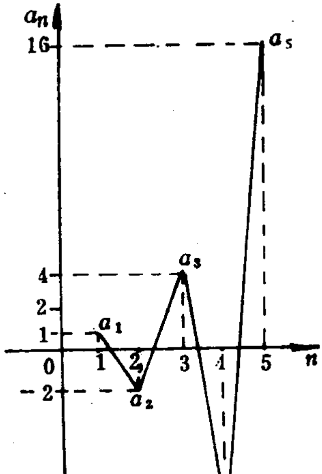


图 1—5

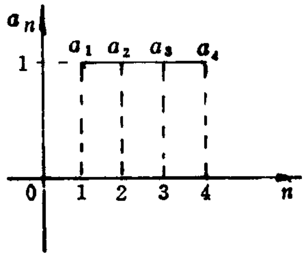


图 1—6

**小结**:综合以上各函数图象知,表示序号的与项对应值的点:点向右移动时,

(1)凡是递增数列,必同时向上移动;

(2)凡是递减数列,必同时向下移动;

(3)凡是摆动数列,必向上向下交替移动;

(4)凡是常数列,必定既不向上也不向下而与横坐标轴平行移动.

必须说明,在图象中有意义的只是横坐标等于自然数时的点,连接点的折线只是为了清楚地显示点的移动情况,在折线上除了横坐标为自然数的各点外,其他点对数列来说是没有意义的.

还须说明,有一些数列的各项,当自变量 $n$ 所沿着自然数从小到大时,所对应的值变化较为简单. 例如数列:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots.$$

把这个数列的对应值$\{\frac{n+1}{n}\}$用一条数轴来表示(图 1—7),不仅在描绘图象时简单,而且在研究数列的变化状态上也颇为方便、直观. 因此,在研究数列的变化状态时,更多地是应用数轴的表示方法.

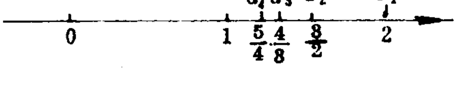


图 1—7

## 5. 等差数列($A \cdot P$)与等比数列($G \cdot P$)

1. 等差数列

不妨先考察数列

$$3,4,5,6,7,8,9.$$

我们可以看出,这个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于 1.

再如,数列

$$2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$$

$$3,-3,-9,-15,\cdots$$

从第 2 项起,每一项与它前一项的差分别为 2、-6. 这就是说,这些数列具有这样的特点:从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数.

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数,这个数列叫做等差数列,记作 $A \cdot P^*$①,这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用字母 $d$ 表示.例如数列

$$1,3,5,7,\cdots$$

$$5,0,-5,-10,\cdots$$

都是等差数列,它们的公差分别为 2 与 -5.

(1)通项公式

如果一个数列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

---

① *A·P 是英文"Arithmetical Progression"两词的第一个字母,表示"等差数列"的意思.

是等差数列，它的公差为 $d$，那么

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$\cdots$$

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

这就是说，等差数列从第 2 项起，每一项都等于首项加上这一项的项数减 1 倍的公差.

很明显，这个通项公式是由不完全归纳法得出的. 现用数学归纳法证明如下：

①当 $n=1$ 时，

左$=a_1$，右$=a_1+(1-1)d=a_1$，

即等式成立.

②令 $n=k$($k$ 为自然数)时等式成立，即 $a_k=a_1+(k-1)d$ 成立，

则在等式两边同时加上 $d$，得

$$a_k+d=a_1+(k-1)d+d.$$

$$\because a_k+d=a_{k+1},$$

$$a_1+(k-1)d+d=a_1+[(k+1)-1]d,$$

$$\therefore a_{k+1}=a_1+[(k+1)-1]d.$$

这就是说，当 $n=K+1$ 时，等式成立.

据①、②知，对于任意的自然数 $n$，等式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 都成立.

例如一个等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差为 2，那么将它们代入上面的公式，就得通项公式