科学版

大学物理习题精解系列

《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》习题详解

主编 陈义成

编者 谢晓梅 程正则 王建中

科学出版社
www.sciencep.com

大学物理习题精解系列

《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》习题详解

主编 陈义成

编者 谢晓梅　程正则　王建中

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是科学出版社出版的《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》一书的配套教辅用书,全书由作者根据其讲授电磁学和电动力学课程的教学经验,收集、整理、探究编写而成.全书共分8章,内容涉及静电学的基本规律、静电场、导体和电介质、恒定电流、恒定电流的磁场、随时间变化的电磁场和麦克斯韦方程、物质中的电场、物质中的磁场、电磁场的能量、交流电路等.

本书可作为高等院校本科物理类专业电磁学课程的参考书,亦可供其他相关专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》习题详解/陈义成主编.—北京:科学出版社,2005

大学物理习题精解系列

ISBN 7-03-014392-2

Ⅰ.电… Ⅱ.陈… Ⅲ.电磁学-计算机辅助教学-高等学校-解题 Ⅳ.O44-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第102410号

责任编辑:吕 盛 张邦固/责任校对:刘小梅

责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年1月第一次印刷 印张:14 1/4

印数:1—3 000 字数:268 000

定价:22.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

这本习题详解是与科学出版社出版的《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》一书相配套的参考书.

承蒙读者厚爱,《电磁学及其计算机辅助教学(CAI)》一书销路看好.为了让广大读者,特别是使用此书的教师腾出更多的时间和精力深钻教材,作者深感有必要编写一本相配套的习题解答书.在科学出版社编辑的提议下,我们组织了几位教师,根据讲授电磁学和电动力学等课程的教学经验、在教学研究中得出的结果以及作者们在教学过程中使用过的例题、习题和考题,经收集、整理、探究编成本书.各章分工如下:程正则老师(我的一位在职研究生)负责编写第一章、第二章、第七章;谢晓梅老师负责编写第四章和第六章;王建中老师负责编写第三章;我负责编写第五章和第八章以及每一章教材中所没有的题目,同时还负责全书所有内容的审查和编排修改及绘制了全书所有插图;我的另一研究生桂容同学也参加了部分工作.

顺便提一下,教材中有几个题目(如习题1.14、习题7.8、习题7.11、习题7.20、习题7.17(2)和习题7.22(4)等)只能用电动力学的知识才能求解,这是我们的一个小疏忽.这些题目我们将不给出解答.另外,每一章还增加了一些教材中没有的题目,以加深对基本概念的理解和扩充知识面.

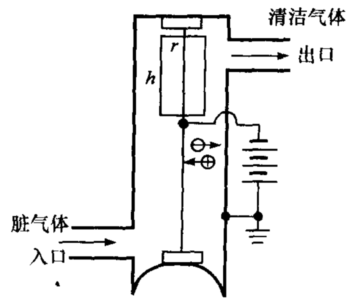
最后,由于时间紧迫,作者学识有限,书中错误和不妥自知难免,热诚地欢迎读者指教.

陈义成
2004年夏
于武昌桂子山

目　　录

第一章　真空中的静电场

1.1　圆筒型静电除尘器(如图)是由一个金属筒和沿其轴线的金属丝构成的，两者分别接到高压电源的正负极上．若金属丝的直径为2.0mm，圆筒的半径为20cm，两者的电势差为15 000V，圆筒和金属丝均可近似看作是无限长的，试求离金属丝表面0.010mm处的电场强度．



习题1.1图

解　两极间的电场可近似认为是"无限长"同轴带电圆柱体间的电场，设金属丝上单位长度带电量为λ，产生的电场具有轴对称性．$\lambda>0$时，场强$\boldsymbol{E}$的方向沿径向向外．作一半径为$r(R_1<r<R_2)$，高为h的封闭圆柱面为高斯面，如图，该高斯面侧面上各点的场强大小为E_r．由高斯定理$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$得

$$E_r 2\pi rh=\frac{+\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E_r=\frac{+\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \tag{1}$$

而两极间的电势差

$$U=\int_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{+\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{2}$$

所以

$$\lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln R_2/R_1} \tag{3}$$

将此式代入式(1)中得

$$\boldsymbol{E}_r=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{2\pi r\varepsilon_0\ln R_2/R_1}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{U}{\ln R_2/R_1}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}\ (\hat{\boldsymbol{r}}\text{ 为 }\boldsymbol{r}\text{ 的单位矢量}) \tag{4}$$

当$r=R_1+0.01\mathrm{mm}=1.01\times10^{-3}\mathrm{m}$时

$$E_r \approx \frac{15000}{\ln\dfrac{0.2}{1.0\times10^{-3}}} \times \frac{\hat{r}}{1.01\times10^{-3}} = 2.8\times10^{6}\hat{r}\ \ (\mathrm{N/C}) \tag{5}$$

1.2 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成.根据经典模型,在正常状态电子绕核作圆周运动,轨道半径是5.29×10^{-11}m.已知电子带负电,质子带正电,它们的电量相等,都是1.60×10^{-19}C,电子质量$m_e=9.11\times10^{-31}$kg,质子质量$m_p=1.67\times10^{-27}$kg,万有引力恒量$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$,试求

(1) 电子所受的库仑力;

(2) 库仑力是万有引力的倍数;

(3) 电子速度.

解 (1) 根据库仑定律

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

把$q_1=-1.6\times10^{-19}$C,$q_2=1.6\times10^{-19}$C,$r=5.29\times10^{-11}$m,$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$代入上式得

$$F_{电子} = -8.22\times10^{-8}\,\mathrm{N} \tag{2}$$

方向指向质子(或原子核).

(2) 质子与电子间的万有引力为

$$\boldsymbol{F}_{万} = \frac{Gm_pm_e}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{3}$$

而

$$F_{库} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \tag{4}$$

所以

$$\frac{F_{库}}{F_{万}} = \frac{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}}{G\dfrac{m_pm_e}{r^2}} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0Gm_pm_e}$$

$$= \frac{1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{6.67\times10^{-11}\times4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1.67\times10^{-27}\times9.11\times10^{-31}}$$

$$= 2.27\times10^{39} \tag{5}$$

故库仑力是万有引力的2.27×10^{39}倍.

(3) 由$F_{库}\gg F_{万}$,不计电子和质子间的万有引力,电子绕核作圆周运动的向心力看作只由库仑力提供,根据牛顿第二定律

$$F_{库} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \tag{6}$$

解得

$$v^2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} \tag{7}$$

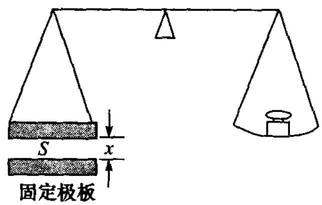
即

$$v = \sqrt{\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} \tag{8}$$

代入数据得

$$v = 2.18\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{9}$$

1.3　静电天平的装置如图所示,一空气平行板电容器两极板的面积都是 S,相距为 x,下板固定,上板接到天平的一端,当电容器不带电时,天平正好平衡,然后把待测的电压 U 加到电容器的两极板上,这时天平的另一端须加上质量为 m 的砝码,才能达到平衡.求待测电压 U.



习题 1.3 图

解　当把平板电容器两极加上电压后,则在天平右侧加上质量为 m 的砝码才平衡,说明此时电容器上极板间电场力与砝码的重力平衡,即

$$F_{电} = mg\ (天平等臂) \tag{1}$$

平板电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x} \tag{2}$$

平板电容器带电量为

$$Q = CU = \frac{U\varepsilon_0 S}{x} \tag{3}$$

两极间电场强度为

$$E = \frac{U}{x} \tag{4}$$

所以

$$F_{电} = \int E\mathrm{d}q = QE = \frac{U^2\varepsilon_0 S}{x^2} \tag{5}$$

代入式(1)得

$$\frac{U^2\varepsilon_0 S}{x^2} = mg \tag{6}$$

所以

$$U = x\sqrt{\frac{mg}{\varepsilon_0 S}} \tag{7}$$

1.4 把总电量为 Q 的同一种电荷分成两部分,一部分均匀分布在地球上,另一部分均匀分布在月球上,使它们之间的库仑力正好抵消万有引力.

已知$1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9.00\times10^9 \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$,引力常数 $G = 6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$,地球质量 $M = 5.98\times10^{24}$kg,月球质量 $m = 7.34\times10^{22}$kg.

(1) 求 Q 的最小值;

(2) 如果电荷分配与质量成正比,求 Q 值.

解 (1) 由于地球与月亮之间的距离远大于它们各自的半径,则地球和月亮均可以看作质点和点电荷来处理,设地球带电量为 q,则月球带电量为 $Q-q$,地球的质量为 M,月球的质量为 m,地球月亮间的库仑力

$$F_{库} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q-q)}{r^2} \tag{1}$$

地球月球间万有引力

$$F_{万} = \frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

根据条件则有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q-q)}{r^2} = \frac{GMm}{r^2} \tag{3}$$

$$q(Q-q) = 4\pi\varepsilon_0 GMm \tag{4}$$

即

$$q^2 - Qq + 4\pi\varepsilon_0 GMm = 0 \tag{5}$$

若 Q 有最小值,则 q 有最小值,上式对 q 求导数得

$$2q - Q = 0 \tag{6}$$

所以

$$q = \frac{Q}{2} \tag{7}$$

代入式(4)得

$$Q = \sqrt{16\pi\varepsilon_0 GMm} = 1.14\times10^{14}\,\text{C} \tag{8}$$

(2) 电荷分布与质量成正比,则有

$$\frac{M}{q} = \frac{m}{(Q-q)} \tag{9}$$

所以

$$\frac{q}{Q-q}=\frac{M}{m}=80 \tag{10}$$

得

$$q=\frac{80}{81}Q \tag{11}$$

代入式(3)得

$$\frac{80}{81^2}Q^2=4\pi\varepsilon_0 GMm \tag{12}$$

所以

$$Q=\sqrt{\frac{81^2\times 4\pi\varepsilon_0 GMm}{80}} \tag{13}$$

代入数值计算得

$$Q=5.4\times 10^{14}\ \mathrm{C} \tag{14}$$

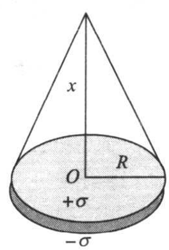
1.5　半径为 R、厚度为 t 的薄圆板上,两表面均匀带电,电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$,试求通过圆板中心的轴线上到板面的距离为 x 的 P 点(于正电荷一侧)的电势和场强.

解　以带负电面的中心为坐标原点,指向正电荷面的方向为正向,建立如图所示坐标系. $-\sigma$ 在 P 点产生的电势为 $U_{-\sigma}$,取一圆环电荷元为 $\mathrm{d}q$,环心为盘心,半径为 r,圆环宽度为 $\mathrm{d}r$,则

$$\mathrm{d}U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{1}$$

$-\sigma$ 盘面在 P 点产生的电势为

$$\begin{aligned}U_{P-\sigma}&=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}\\&=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{x^2+r^2}\Big|_0^R\\&=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-|x|\right)\end{aligned} \tag{2}$$



习题 1.5 图

同理, $+\sigma$ 盘面在 P 点产生的电势为

$$U_{P+\sigma}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(x-t)^2+R^2}-|x-t|\right) \tag{3}$$

所以 P 点的电势为

$$U=U_{P+\sigma}+U_{P-\sigma}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(x-t)^2+R^2} - |x-t|\right) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - |x|\right)$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(x-t)^2+R^2} - \sqrt{x^2+R^2} + t\right) \tag{4}$$

由于圆盘电荷在 P 点场强方向垂直盘面,即沿 x 正方向

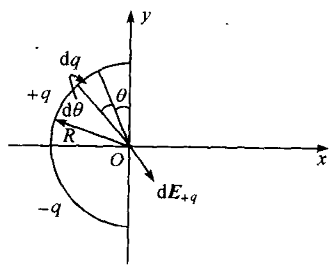
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(x-t)^2+R^2} - \sqrt{x^2+R^2} + t\right)\right]\boldsymbol{i}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x-t}{\sqrt{(x-t)^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\boldsymbol{i}$$

$$\approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{t}{\sqrt{x^2+R^2}}\boldsymbol{i} \tag{5}$$

1.6 一玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆环,半根玻璃棒均匀带正电,另半根均匀带负电,电量都是 q(如图所示),试求这半圆中心 O 点的电场强度.



习题 1.6 图

解 建立如图所示坐标系,对于带正电的半根玻璃棒,取一电荷元

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{\pi R/2}R\mathrm{d}\theta = \frac{2q}{\pi}\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

它在环心产生的电场强度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{+q}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{2q}{\pi}\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} \quad (\text{其中}\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j})$$

$$= \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\sin\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$$

$$\boldsymbol{E}_{+q} = \int_0^{\pi/2}\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\sin\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{-q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \tag{2}$$

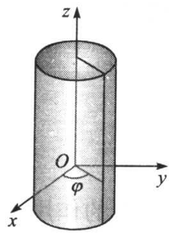
同理，$-q$ 在环心 O 点产生电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{-q}=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) \tag{3}$$

O 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_O$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_O&=\boldsymbol{E}_{+q}+\boldsymbol{E}_{-q}\\&=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})+\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\\&=-\frac{q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{4}$$

1.7　一无限长带电圆柱面，面电荷密度 $\sigma=\sigma_0\cos\varphi$，$\sigma_0$ 为常数，φ 角为与 x 轴间的夹角，如图所示．求柱面轴线 z 上的场强分布．



习题 1.7 图

解　依题意画图，该圆柱体底面半径为 R，在方位角 φ 处取一 $\mathrm{d}\varphi$，在圆柱体的侧面上分割出宽度为 $R\mathrm{d}\varphi$ 的无限长窄带，将此窄带看成是无限长带电线，其在圆柱面轴线 O 处产生的电场强度的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{\sigma R\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0R}=\frac{\sigma_0\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0} \tag{1}$$

把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为 $\mathrm{d}E_x$、$\mathrm{d}E_y$ 两分量

$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\cos\varphi=-\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\varphi=-\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{3}$$

积分两分量得

$$E_x=-\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$E_y=0 \tag{5}$$

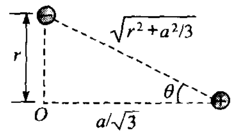
$$E=E_x=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i} \tag{7}$$

1.8　有三个点电荷，电量都是 $q=1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$，分别固定在边长为 $a=3.9\times10^{-10}\mathrm{m}$ 的正三角形的三个顶点，在这三角形的中心 O，有一个质量为 $m=2.3\times10^{-26}\mathrm{kg}$、电荷为 $Q=-4.8\times10^{-19}\mathrm{C}$ 的粒子．

(1) 证明:这个粒子处在平衡位置(即作用在它上面的库仑力为零);

(2) 求这粒子以 O 为中心沿一轴线(该轴线过 O 并与三角形的平面垂直)作微小振动的频率 ν.



习题 1.8 图

解 (1) Q 处于正三角形中心,分别受三个正电荷的库仑引力作用,并且三个引力大小相等,方向互成 120°.

$$\sum \boldsymbol{F}_Q = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0 \tag{1}$$

故这个粒子处在平衡位置.

(2) 设 Q 离开平衡位置 O 的距离为 r,如图所示,则 Q 所受力的方向指向 O,其大小为

$$\begin{aligned} F &= 3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2+a^2/3}\sin\theta \\ &= \frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2+a^2/3)^{3/2}} \end{aligned} \tag{2}$$

在这个力的作用下,粒子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2+a^2/3)^{3/2}} \tag{3}$$

当 $r \ll a$ 时,$(r^2+a^2/3)^{-3/2} \approx (a^2/3)^{-3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{a^3}$,这时式(2)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{9\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_0 m a^3} r \tag{4}$$

由于 $qQ<0$,所以上式是一个简谐振动方程,振动频率为

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-9\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(-9\sqrt{3})\times(-4.8\times10^{-19})\times1.6\times10^{-19}\times9.0\times10^9}{2.3\times10^{-26}\times(3.0\times10^{-10})^3}} \\ &= 2.1\times10^{13}(\mathrm{Hz}) \end{aligned} \tag{5}$$

1.9 电矩为 $\boldsymbol{p}_1$ 的电偶极子位于原点,沿正 x 轴方向,另一电矩为 $\boldsymbol{p}_2$ 的电偶极子在 Oxy 平面内,其中心的坐标为 (r,θ),方向与 $\boldsymbol{p}_1$ 反平行,如图所示,试求

(1) 若将电矩为 $\boldsymbol{p}_2$ 的第二个偶极子由此处移动到无穷远处,外力需做的功;

(2) 若将 $\boldsymbol{p}_2$ 在 Oxy 平面内绕其中心旋转 180°,外力所需做的功.

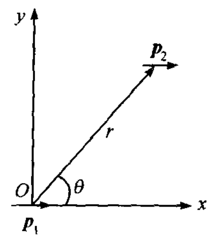
解 (1) 按教材中式(1-6-20),电矩 $\boldsymbol{p}_1$ 在 $\boldsymbol{p}_2$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{\boldsymbol{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

按教材中式(1-9-16),电矩 $\boldsymbol{p}_2$ 在此电场中的相互作用能为

$$W_e=-\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{p}_2\cdot\frac{\boldsymbol{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})$$

$$=-\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{3p_1p_2\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (2)$$



习题 1.9 图

要将 $\boldsymbol{p}_2$ 移动到无穷远处,外力则要克服这个相互作用而做功,故外力做功为上述的 W_e.

(2) 若将 $\boldsymbol{p}_2$ 在 Oxy 平面内绕其中心旋转 180°,则电矩 $\boldsymbol{p}_2$ 在此电场中的相互作用能为

$$W_e=-\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{p}_2\cdot\frac{\boldsymbol{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})$$

$$=\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{3p_1p_2\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (3)$$

用这个能量减去式(1)中的能量,即为外力所做功

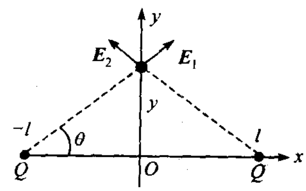
$$W_e=2\left(\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{3p_1p_2\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) \qquad (4)$$

1.10　电量为 Q 的两个点电荷,相距 $2l$,在其连线的中垂面上放一点电荷 q_0,求证该点电荷在中垂面上受力的极大值的轨迹是一个圆,并给出该圆的半径.

解　如图所示,设点电荷带正电,在中垂面上与坐标原点 O 的距离为 r 的点 P 的电场

$$E=2E_1\sin\theta=\frac{2Qr}{4\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{Qr}{2\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)^{3/2}} \qquad (1)$$



习题 1.10 图

令 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$,由此解得

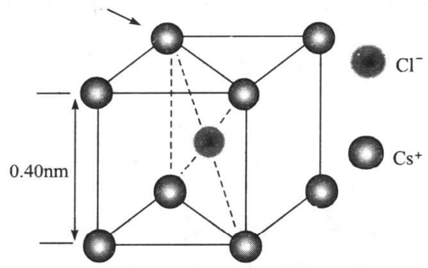
$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}l \qquad (2)$$

即是说,在中垂面上场强最大点的轨迹是以两点电荷连线的中点 O 为圆心,以 $(\sqrt{2}/2)r$ 为半径的圆.

1.11　在氯化铯晶体中,一价氯离子与其最近邻的八个一价铯离子构成如图所示的立方体晶体结构.

(1) 求氯离子所受的库仑力;

(2) 假设图中加箭头所指出缺少一个铯离子(称作晶格缺陷),求此时氯离子所受的库仑力.



习题 1.11 图

解 (1) 由对称性,每条对角线上的一对铯离子与氯离子间的作用力的合力为0,故

$$F_1 = 0 \tag{1}$$

(2) 除了有缺陷的那条对角线外,其他铯离子与氯离子的作用力合力为 O,所以氯离子所受合力 F_2 的值为

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 1.92\times10^{-9}\ \mathrm{N} \tag{2}$$

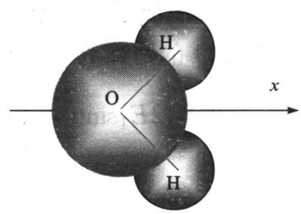
1.12 1964 年,盖尔曼等人提出基本粒子是由更基本的夸克构成,中子是由一个带$2e/3$ 的上夸克和两个各带 $-e/3$ 的下夸克构成.将夸克作为经典粒子处理(夸克线度约为 10^{-20}m),中子的两个下夸克之间相距 2.60×10^{-15}m,求它们之间的斥力.

解 由于夸克可视为经典点电荷,有库仑定律

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{9r^2}\boldsymbol{e}_r = 3.78\boldsymbol{e}_r\ \mathrm{N}$$

$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 方向相同表明它们之间为斥力.

1.13 水分子 H_2O 中氧原子和氢原子的等效电荷中心如图所示,假设氧原子和氢原子的等效电荷中心间距为 r_0.试计算在分子的对称轴线上,距分子较远处的电场强度.



习题 1.13 图

解 等效电荷系统如图所示 H 原子在 P 点的场强大小为

$$E_{\mathrm{H}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \tag{1}$$

其 x 分量为

$$E_{\mathrm{H}x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{r}{x} \tag{2}$$

由于 $x \gg r_0$,所以

$$E_{\mathrm{H}x} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{rx} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x(r_0^2 + x^2 - 2r_0 x\cos\theta)^{1/2}}$$

$$\approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{r_0}{x}\cos\theta\right) \tag{3}$$

O原子在 P 点的场强只有 x 分量

$$E_{Ox} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2e}{x^2} \tag{4}$$

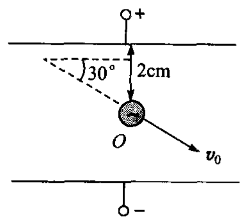
故 P 点的总场强为

$$\boldsymbol{E} = (2E_{Hx} + E_{Ox})\boldsymbol{e}_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{r_0 e\cos\theta}{x^3}\boldsymbol{e}_x \tag{5}$$

***1.14** 如图所示,在与水平面平行,两板间电压为 U 的极板很大的平行板电容器中,有一带负电的微粒沿着与水平面成30°角的方向以 $v_0 = 0.78\text{m/s}$ 的速度朝低电势板匀速直线地飞来.当微粒到达距高电势板 0.02m 的 O 点时,立即把电容器两极板间的电压提高到 $1.5U$.

(1) 求微粒到达高电势板的时间;

(2) 如果 $m = 2\times10^{-6}\text{kg}$,求它由 O 点到高电势极板的过程中动能的增量和电势能的增量.



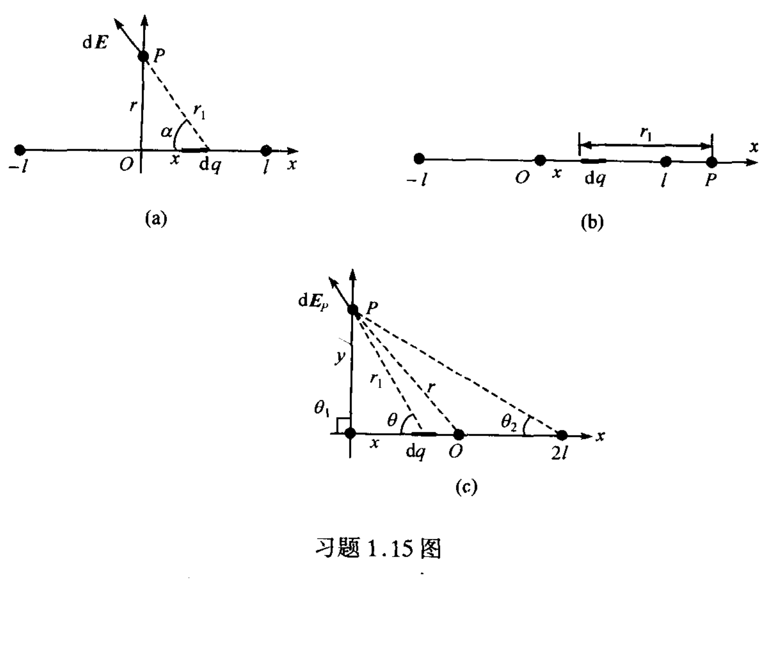
习题 1.14 图

1.15 电荷 q 均匀分布在长为 $2l$ 的一段直线上,线的中心为 O,求下列各处的电场强度:

(1) 线的中垂面上离 O 为 r 处;

(2) 线的延长线上离 O 为 r 处;

(3) 通过一端的垂面上离 O 为 r 处.



习题 1.15 图

解 (1) 由于问题的轴对称性，我们在 Oxy 平面上来讨论. 如图(a)所示，中垂线上一点 P 的场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向垂直于带电直线，大小为

$$E = \int \frac{\sin\alpha \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \tag{1}$$

其中 $\sin\alpha = \dfrac{r}{r_1}$，$r_1 = \sqrt{r^2 + x^2}$. 统一积分变量得

$$E = \int_{-l}^{l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{rq\mathrm{d}x}{2l(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{l^2 + r^2}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{l^2 + r^2}}\boldsymbol{j} \tag{3}$$

(2) 如图(b)所示，延长线上一点 P 的场强沿 x 轴正方向，大小为

$$E = \int_{2l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}q}{r_1^2} = \int_{-l}^{l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\mathrm{d}x}{2l(r - x)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r^2 - l^2)}, \quad r > l \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r^2 - l^2)}\boldsymbol{i} \tag{5}$$

(3) 取一电荷元 $\mathrm{d}q$，在 P 点产生的场强

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\mathrm{d}x}{2lr_1^2} \hat{\boldsymbol{r}}_1 \tag{6}$$

其中 $r_1 = \dfrac{y}{\sin\theta}$，$x = y\cot\theta$，$\mathrm{d}x = -\dfrac{y\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$.

将这些结果代入式(6)，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l} \frac{-\dfrac{y}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta}{\left(\dfrac{y}{\sin\theta}\right)^2} \hat{\boldsymbol{r}}_1$$

$$= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 ly}(-\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

θ 角的变化范围是

$$\theta_2 = \arctan\frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{2l}, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad y = \sqrt{r^2 - l^2} \tag{8}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2l}{\sqrt{3l^2 + r^2}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{\sqrt{3l^2 + r^2}} \tag{9}$$