新世纪大学数学立体化系列教材

总主编　于义良

线性代数名师导学

主　编　李乃华　滕树军　王莉琴

5

中国人民大学出版社

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编　于义良

线性代数名师导学

主　编　李乃华　滕树军　王莉琴

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数名师导学/李乃华，滕树军，王莉琴主编.
北京：中国人民大学出版社，2005
（新世纪大学数学立体化系列教材）
ISBN 7-300-06313-6

Ⅰ.线…
Ⅱ.李…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 014717 号

新世纪大学数学立体化系列教材
总主编　于义良
线性代数名师导学
主编　李乃华　滕树军　王莉琴

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
开　　本	720×965mm 1/16	版　　次	2005 年 4 月第 1 版
印　　张	15.75	印　　次	2005 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	245 000	定　　价	18.00 元

总　　序

随着科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及与提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体公民的必修课，数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已是教育教学改革的“重中之重”，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。经过多年的教学研究和实践，我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师，编写了这套“新世纪大学数学立体化系列教材”，奉献给大家。

这套系列教材是“21 世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》”成果的延伸，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》、《运筹学》五本教材和《微积分名师导学》、《线性代数名师导学》、《概率论与数理统计名师导学》三本教学指导书。这套教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，“教、学、做”融为一体，内容体系整体优化，使读者实现由知识向能力的转化。

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近

生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、做好数学的信心。

第三，以计算机为工具，传统内容与信息技术应用融为一体，注重基本知识、基本思想、基本能力的培养，对繁、难、抽象的内容，充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现，比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等。

第四，每册教材均配有多媒体助学助教光盘，包括课程要求、电子教案、模拟演示、练习详解、单元测试、实例选编、试题分析、名人简介等众多模块，信息量大，使用方便，便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识，并有助于及时检测和提高。

总之，这套系列教材配有光盘，方便教学，信息量大；融入软件，突出技能，实用性强。内容可视化，你不会再为抽象而烦恼；计算软件化，你不会再为繁难而困扰；方法实用化，你不会再因无用而厌学。

2003 年冬季，我有幸到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察，亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践，它们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用，“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”做得非常出色。让我们可喜的是即将出版的这套系列教材恰好在这方面做了有益的尝试。

我们期盼这套系列教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会主任、总主编　于义良

2004 年 3 月

前　言

学校要以学生为本，给每个学生提供优质的教育资源是每个教育工作者义不容辞的职责。为了提高服务意识，帮助学生学好大学数学中“线性代数”这门重要的基础课，我们在多年教学研究与实践的基础上，总结编写了这本《线性代数名师导学》，旨在教给学生学习、掌握新知识的思路和方法，激活求知欲，启迪悟性，挖掘潜能，使每个学生尽快成为“线性代数”这门课程的实践者。

《线性代数名师导学》的结构：

章、节序号与《线性代数》教材一致，每章均提出学习目标及要求，每节均由知识梳理、易错提示、范例点拨、学做检测、参考答案五部分组成。

《线性代数名师导学》的特点：

1. 每章学习目标明确，便于学生分清主次，突出重点。

2. 每节基本知识表格化梳理，便于学生一览全局，掌握内容体系。

3. 每节针对学生易犯错误编写了易错提示，便于学生明确知识点间的联系与区别。

4. 每节范例点拨注重阐述解题思路，尽量提供一题多解，便于学生很快掌握解题要领，开拓思路，提高创新能力。

5. 每节针对基础知识理解和基本技能训练均配有学做检测，题型全面，内容丰富，便于学生通过实践，亲手做题，检测自己对知识的理解掌握程度。

学做检测是一个应用创新的过程，是培养学生综合能力、应用创新能力的手段，给予学生锻炼能力的机会。学做检测分A、B两类：A类侧重于对知识点的涵盖，侧重于对基础知识、基本技能的考察，侧重于对重点知识的突出。旨在让学生通过对A类题目的解答，夯实基础知识，提高基本技能，确保重点知识的过关。相比之下，B类则比A类提升了一个层次，它侧重对综合能力和应用创新能力的考察。突出综合知识的应用和综合能力的体现，突出创新思维空间的开发。旨在让学生通过对B类题目的解答，使其综合运用知识的能力，联系实际解决具体问题的能力，创新能力得到运用、提高和增强。先做A类，再做B类，由浅入深，由基础知识到应用创新，这给学生以厚积薄发的机会，给学生综合素质的提升搭建了一个阶梯。这两类题目在内容设计上，尽量给学生提供一个"联系实际、注重应用、自主探究、引导创新"的空间，让学生在宽松自如的情境下独立地完成。这不仅有利于对教学效果的真实检测，更重要的是让学生的综合能力、应用创新能力在做题的过程中得到提高。

6. 每节学做检测均配有参考答案，便于学生及时得到反馈信息，进行总结提高。

参加《线性代数名师导学》编著的有于义良、李乃华、滕树军、王莉琴。

限于编著者的水平，书中若有不当之处，敬请读者批评雅正，以期不断修改与完善。

编著者

2005年3月

目　录

第 1 章

行列式

本章学习目标及要求

1. 了解排列、逆序数、n 阶行列式的定义，会求排列的逆序数.

2. 了解 n 阶行列式的性质，熟练掌握计算行列式的方法.

3. 了解代数余子式的定义，熟练掌握利用行列式的展开定理计算行列式的方法.

4. 了解行列式的各种计算方法，能够熟练应用行列式的定义、性质、展开定理等进行行列式的计算和证明.

知识结构

- 行列式
  - 排列、逆序数
    - 排列
      - 奇排列
      - 偶排列
    - 逆序和逆序数
    - 对换
  - 行列式
    - 2 阶、3 阶行列式
    - n 阶行列式
      - 定义
      - 性质
    - 行列式按行(列) 展开
      - 余子式与代数余子式
      - 行列式按行(列) 展开
      - 拉普拉斯定理
    - 克莱姆法则

第1.1节　n阶行列式

知识梳理

概念	定义及表示方法	公式或结论
排列	由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列.	n 级排列的总数为 $n!$.
逆序数	在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若两个数的位置与大小顺序相反,称这一对数构成一个逆序;而排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为它的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.	逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.
2、3阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.	$\sum\limits_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$ $\sum\limits_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$
n阶行列式	$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 的项的和.	$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \overset{记}{=} \det(a_{ij})$

易错提示

1. 行列式中每项的代数符号未必都为正.

例　4 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中含 $a_{14}a_{23}$ 的项.

$D=\det(a_{ij})$ 中每项为 4 个数的乘积,且正负号由每项下标的逆序数之和决定,当行标按自然顺序排列时,每项的符号由列标排列的逆序数决定,由 $\tau(4312)=5,\tau(4321)=6$ 可知,所求为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

2. 在含有字母的行列式中,某字母前的系数并非由行列式的某一项完全确定,而是由包含该字母的所有项的代数和确定.

例　求 $D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 中的 x 系数.

解　由定义,找出所有含 x(即 a_{13})的项,求其代数和,进而确定 x 的系数. 该式中,包含 x(即 a_{13})的项为:

$$\underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}}_{(=-x)},\ -\underbrace{a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}}_{(=-x)},\ \underbrace{a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}}_{(=-x)},$$

$$-\underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}}_{(=-x)},\ \underbrace{a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}}_{(=x)},\ -\underbrace{a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}}_{(=-x)},$$

所以 x 的系数为 $-1-1-1-1+1-1=-4$.

范例点拨

例 1　求下列排列的逆序数,并确定排列的奇偶性:

(1)2143765;

(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解　(1) $\tau(2143765)=1+0+1+0+2+1=5$,故此排列为奇排列.

(2)
$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,原排列为偶排列.

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数,原排列为奇排列.

例 2　写出 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3,x^4 的系数.

解　由行列式的定义,含 x^4 的项只能由位于这个 4 阶行列式主对角线上的 4 个元素的乘积 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 组成,计算得 x^4 的系数为 2;含 x^3 的项为 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,计算得 x^3 的系数为 -1.

例 3　已知一个排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I,求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解 **方法1** 在一个 n 级排列中，比自然数 i 大的数有 $n-i$ 个，因此在所给的两个排列中，由 i 产生的逆序数之和为 $n-i$. 于是，两个排列的逆序之和为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

因此，后一个排列的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}-I$.

方法2 如果在排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中，关于 x_1 有 p_1 个逆序，则有 $(n-1)-p_1$ 个顺序；关于 x_2（不考虑 x_1）有 p_2 个逆序，则有 $(n-2)-p_2$ 个顺序；依此类推，关于 x_n 有 p_n 个逆序，则有 $(n-n)-p_n$ 个顺序. 而

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=I,$$

故

$$\begin{aligned}\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)&=(n-1)-p_1+(n-2)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-I\\&=\frac{n(n-1)}{2}-I.\end{aligned}$$

例4 用行列式的定义计算 $D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

解 由定义

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式中只有当 $j_1=2,j_2=3,\cdots,j_{n-1}=n,j_n=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$，所以 $D_n=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n1}=(-1)^{n-1}1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{n-1}n!$.

例5 利用 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$，证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的 n 级排列中，奇偶排列各占一半.

证 由行列式的定义 $D_n=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，知

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

该和式共有 $n!$ 项，且每一项不是1就是 -1. 但 $D_n=0$，所以1和 -1 个数必然相等(均为 $\frac{n!}{2}$ 个)，此即说明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的 n 级排列中，奇偶排列各占一半.

学做检测

1.1A

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} =$ ____.　2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ c & c & c \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix} =0$，则 $x=$ ____ $(c\neq 0)$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$ ____.

4. 4阶行列式中，含 $a_{12}a_{31}$ 且符号为正的项是____.

二、选择题

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ (　　).

(A)24　(B) -24　(C)6　(D) -6

2. 已知 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$，则 D 的展开式中 x 的系数为(　　).

(A)1　(B)2　(C) -1　(D) -2

3. 若 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$，则(　　).

(A) $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$　(B) $x\neq 0$ 或 $x\neq 2$　(C) $x\neq 0$　(D) $x\neq 2$

三、计算题

1. 计算下列9级排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)134782695；(2)217986354；(3)987654321.

2. 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

3. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.1B

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}=$______.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$______.

3. 当 $i=$______,$j=$______时,$1274i56j9$ 为偶排列.

4. n 阶行列式 D 中,若等于零的元素多于 n^2-n 个,则 $D=$______.

5. 若行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$,则 $x=$______.

二、计算题

1. 确定 6 阶行列式中,下列各项的符号.

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$;(2)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

三、证明题

证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

参考答案

1.1A

一、1. 1　2. 1 或 2　3. 24　4. $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$

二、1. (A)　2. (B)　3. (A)

三、1. (1) 10,偶排列　(2) 18,偶排列　(3) 36,偶排列

2. -2　3. 1　4. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$

1.1B

一、1. $x^3+y^3+z^3-3xyz$　2. -24　3. $i=8,j=3$　4. 0　5. 1 或 -2

二、1. (1) 正号,(2) 负号　2. -24　3. $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$

4. $(-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n$

三、提示:利用行列式的定义.