机械振动

仇伟德 编著

石油大学出版社

机 械 振 动

仇伟德　编著

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

机械振动/仇伟德编著.—东营:石油大学出版社,
2001.7
ISBN 7-5636-1502-4

Ⅰ.机… Ⅱ.仇… Ⅲ.机械振动 Ⅳ.TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041588 号

机械振动
仇伟德　编著
出 版 者:石油大学出版社(山东　东营,邮编　257061)
网　　址:http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱:upcpress@mail.hdpu.edu.cn
印 刷 者:石油大学印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话　0546—8392563)
开　　本:787×1092　1/16　印张:12.25　字数:293 千字
版　　次:2001 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数:1—1000 册
定　　价:18.00 元

序言

机械振动是根据牛顿力学发展起来的一门学科，现在已经成为工科院校大学生和研究生选修或必修的一门力学课程。

机械系统在其平衡位置附近做往复运动称为机械振动。可以简化成一个独立坐标（或称为广义坐标）就能描述任何时间机械系统位置时，称为一个或单自由度系统。要多个独立坐标才能描述机械系统任何时间的位置时，称为多自由度系统。弹性体作机械运动时的位置要无穷多个独立坐标才能描述，就称为无穷多自由度系统。本书只研究线性机械振动，根据自由度的数目，分为三大部分。

第一部分是单自由度系统的振动。这一部分占用了本书的近一半的篇幅；分为无阻尼系统的自由振动，有阻尼系统的自由振动，强迫振动和若干工程问题四章，详细地阐述了线性机械振动中大部分的重要概念和理论；讲解了隔振、减振、振动测量、轴的临界转速等应用单自由度振动理论的工程问题。最后，介绍了将任意干扰力分段为常数，用杜哈梅积分方法求数值解，并给出了编制的程序。因此，学习和掌握这一部分后，可以求得任意单自由度系统的响应。

第二部分是多自由度系统的振动。这一部分介绍了应用动力学基本定律或定理，拉格朗日方程，直接刚度法，直接柔度法等建立振动方程组的各种主要方法。重点讲解了主振型分析法（模态叠加法）的理论和求解方法，并加强了某些特别问题的求解方法。最后，给出了瑞利商求解固有频率、里茨法求解多自由度振动系统的前几个固有频率和振动型式和广义 JACOBI 法求解特征值问题的全部特征值和标准振型矩阵的方法，而且提供了 JACOBI 法计算机程序。掌握前两部分内容和两个程序后，应用计算机可以解决单或多自由度振动系统的任何时域响应问题。

第三部分是弹性体振动简介。这一部分只介绍直杆的纵向振动和等直梁平面弯曲振动；给出了建立和解决这两个问题的方法。

根据初学者学习这门课程所出现的各种困难和问题，教材中加强了力学模型或系统的简化过程，强调了建立振动微分方程的训练和说明，增多了工程应用实例，对重点、难点部分反复讲解和列表阐述。教材中有较大数量的例题，阐明和帮助初学者掌握理论的应用方法，有些例题还用几种不同方法求出解答，每章之后，都有较多练习题，供初学者加深训练。对计算步骤较多的算法，如主坐标分析法和多自由度振动响应的数值解，教材中总结了计算步骤，便于初学者使用。

本著作是仇伟德同志阅读国内外大量教材和文献，付出许多时间和精力，并结合本人和石油大学（华东）其他许多同志近二、三十年来的教学经验编著出的很有特色的一本书，可以作为我国工科院校高年级大学生和研究生的教材。

蔡强康

2001 年 6 月

前言

动态问题是现代科学和现代工程中非常突出的一个问题，它区别于静态问题并揭示了静态无法说明的规律和特征，因此研究动态问题越来越受到人们的重视。作为机械振动这门学科，不仅学科本身广泛地应用于机械工程实践，而且它的成果已经广泛地应用于其他学科。机械振动成为研究动态问题的一个重要基础。

根据高等工科院校本科生和研究生在学习机械振动这门课程中所表现出的热情以及出现的种种困难和问题，在“机械振动讲义”(1987 年)和“机械振动”(1992 年和 1997 年)的编写和使用基础上，特修订编著本书。其目的和特色在于：

(1) 加强了力学模型简化过程的说明，增多了工程应用的实例，使理论联系实际得以具体贯彻。这一点特别体现在单自由度部分。

(2) 加强了建立振动微分方程的阐述和训练，体现在多自由度部分。

(3) 着重介绍主坐标分析法的理论和求解过程，同时加强了某些特殊问题的求解方法。

(4) 本书采用大量的例题，有的一题多解。对初学者经常理解不清和掌握困难的要点作了进一步的阐述，并体现在习题训练上。

(5) 提供了具有实际应用价值的数值计算方法和二个计算机程序。使本课程的学习和实际使用得到进一步强化。

在本书的编著过程中，得到了我的导师蔡强康教授的悉心指导，并采纳了同行们的许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

仇伟德

2001.3

目 录

第二部分 多自由度系统

第三部分　弹性体振动简介

注:各章节前打*或各例题、习题前打*者,以及小字编印内容,为本科生选学部分,研究生必读。实际学时不同或教学要求不同,可选用或不用。

绪　论

在机械工程中和日常生活中，有许多物理量发生随时间变化的往复运动，例如机械钟摆的摆动；乐器气弦的振动；汽车在行驶中的颠动；离心鼓风机发出强烈的噪音和振动；还有桥梁和高层建筑物的晃动等等。从这些现象中可以看到，物体在某个平衡位置附近作往复性或周期性的机械运动，被称为机械振动。

机械振动有利也有弊。例如乘员因车船振动而晕车；桥梁在过大的振动下会破坏；飞机的颤振常使飞机失事；地震运动引起建筑物严重的振动破坏等，这些都是物体发生机械振动有害的一面。另一方面，钟表利用摆的等时性运动；悦耳的音乐来源于乐器合适的谐振；工程中振动传输、振动打桩、动力减振等都是利用了机械振动的规律造福于人类。所以研究物体系统的机械振动规律，可以掌握规律，兴利除弊。

机械振动学科内容大致分为三个方面：

（1）振动分析：已知物体系统特性和激扰条件，分析计算物体系统的振动响应。

（2）振动环境预测：已知物体系统特性和物体系统所许可的响应条件，预测激扰问题。

（3）振动特性测定或系统识别：已知激扰条件和响应条件，修正或确定物体系统的特性，这类问题有时称为振动设计。本书主要介绍振动分析方面的基础知识。

实际振动的物体系统（简称振系）往往是很复杂的，在理论分析中，通常把实际物体系统简化为离散系统和连续系统两大类。

离散系统又称集中参数系统。描述该系统的主要物理量是用集中参数，振体只具有质量，弹簧只具有弹性，阻尼器只起阻尼作用，三者相互独立，分别为点质量或刚体、集中刚度和集中阻尼。例如图 1(a)是实际电动机安装示意图。当把电动机和混凝土视为一个整体（刚体），就可用一个集中质量 m 代替。在只考虑其铅直方向的运动时，用一个铅直方向的 y 坐标就能确定其运动位置。支承土壤具有弹性，土壤内部以及混凝土与土壤之间具有摩擦阻力，它们被分别用一个无质量的弹簧 k 表示其弹性效应，用一个无质量且无弹性的阻尼器 c 表示其阻尼效应，于是画出图 1(b)的力学模型，它被称为单自由度有阻尼系统。若忽略摩擦阻尼效应，就可形成图 1(c)的力学模型，它被称为单自由度无阻尼系统。

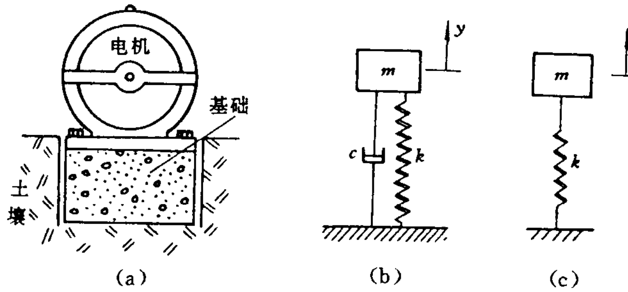
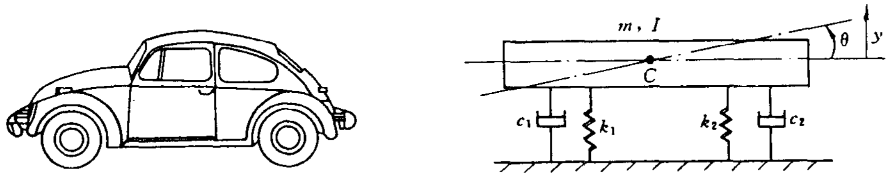


图 1

又如图 2(a)的汽车，把车身视为刚体，采用两个坐标分析汽车在铅直方向的运动(y)以及“前下后上”的俯仰运动(θ)时，车身被简化为一个集中质量 m 和一个集中转动惯量

I,前后轮系分别简化为弹簧 k_1、k_2 以及阻尼器 c_1、c_2,于是形成二个自由度有阻尼的系统。



(a) (b)

图 2

从以上例子可以看出,集中参数系统的自由度数目取决于对问题的分析要求,并形成相应的集中参数(质量、弹簧和阻尼)。由于集中参数间相互独立,且与时间无关,它们的运动方程在数学上只需要用常微分方程描述,因此在理论分析和计算上有许多优点。

连续系统又称分布参数系统。这种系统的质量、弹性和阻尼不再被离散化为集中参数,而是用分布质量、分布弹性以及分布阻尼描述。例如某些梁的横向振动,质量沿梁轴线分布不同,横截面抗弯刚度 EJ 沿梁轴线分布不同,它的振动就要采用弹性体振动方法来解决,这种振系就称为连续系统。由于连续系统中,质量、弹性和阻尼都与各点处的几何位置有关,各点处振动位移既与该点处的几何位置有关又与时间 t 有关,因此分析连续系统在数学上需要用偏微分方程理论。本书主要介绍集中参数系统的振动分析,对连续系统只作简单介绍。

振动系统的质量、弹簧和阻尼的简化与取值,将直接影响理论分析和计算结果是否反映客观真实情况。例如弹簧恢复力和阻尼器阻尼力,就有线性力和非线性力之分,如图 3 所示。又如在几何运动分析中又有小位移条件和大位移条件之分。因此振动学科可分为两大分支:一是线性振动,二是非线性振动。本书主要介绍线性振动。

在线性振动中采用了两个最基本假设:一是弹性恢复力是位移的一次齐次函数;阻尼力是速度的一次齐次函数。二是在几何运动分析中采用小位移条件,即振体在其稳定的平衡位置附近的往复运动中,位移和速度都是一阶微量,忽略二阶和更高阶微量。例如图 4 所示的单摆,可以用牛顿定律写出它的运动方程为:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

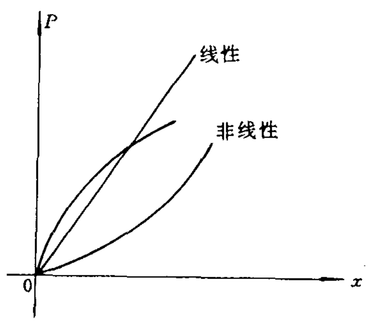


图 3

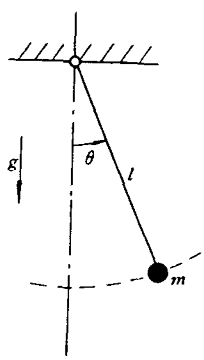


图 4

上式是单摆的非线性运动方程。

当分析单摆微幅运动时，因 θ 很微小，把 $\sin\theta\approx\theta$ 代入(a)式，可化简为线性振动方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{b}$$

由于振系受到的外界激扰在形式上是非常多的，因而其响应也是多种多样的。一般分为下列几种情况：

(1) 自由振动。振体在初始位移、初始速度、初始冲量等作用下产生的振动，在振动过程中振体不再受到外界激扰的作用。这类振动称为自由振动。

(2) 强迫振动。在振动过程中，振体一直受到外界激扰的作用，这类振动称为强迫振动。

若外界激扰可以用确定的时间函数表示，那么振体响应也将是确定的时间函数，这类振动称为规则振动，简称机械振动。

若外界激扰是属随机偶然性质，例如道路凹凸不平对汽车的作用；瞬息万变的海浪对海工结构的作用；复杂的地震运动对建筑物的作用等，它们引起振体的响应也将是随机偶然的，这类振动称为随机振动。

计算振动响应的方法一般分为两类：解析函数解法和数值近似解法。由于振动方程的复杂性或边界条件的复杂性，使得只有少数振动问题可以求得解析函数解，多数问题只有用数值近似解才能解决。由于电子计算机及程序软件的迅速发展，使得大量过去无法求解的问题如今得以解决。

进行振动分析，常常需要实测试验。一方面理论解是否反映实际，有待于实践验证；另一方面有许多实际问题在无法求得显式的理论解时，必须采用实验方法解决。因此必须重视振动的实际测量和试验。

本书主要分三个部分介绍机械振动。第一部分为单自由度系统的振动，它是全书的基础知识；第二部分为集中参数的多自由度系统，强调线性振动方程的建立和主振型分析方法(或称模态叠加法)；第三部分简单介绍弹性体的振动，主要是杆的纵振和梁的横振。全书提供了大量例题和习题，以及 2 个程序，5 个数值算例，以便读者学习、参考和使用。

第一部分　单自由度系统

第一章　无阻尼系统的自由振动

§1-1　简 谐 振 动

一个单自由度无阻尼系统的力学模型是由一个集中质量的振体和一个无质量的线性弹簧构成，它通常可画成图 1-1 和图 1-3 的两种计算简图。

图 1-1 为弹簧无静变形的模型。x 坐标的原点设在弹簧原长的 o 点处，设振体质量为 m（单位为千克或公斤(kg)）。重量为 $W=mg$（单位为牛顿 N），g 为重力加速度（9.81 m/s²）。弹簧线性刚度系数为 k（单位为牛顿/米，N/m）。在图 1-1 中，设振体位移 x 向右为正，则速度 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ 和加速度 $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ 也以向右为正。当振体偏右，弹簧伸长，振体受到弹性恢复力向左，与 x 反向；当振体偏左，弹性恢复力向右。这两种情况可统一写为

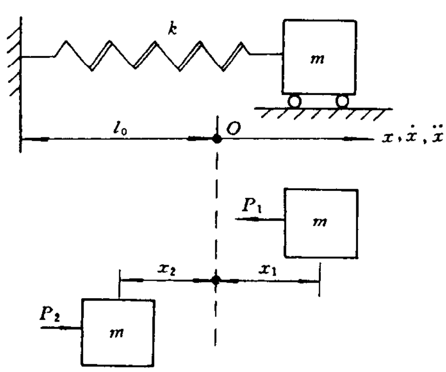


图 1-1

$$P_k=-kx \tag{1-1}$$

若进行下列实验：置振体于右侧后无初始速度地释放，则可以得到表 1-1 所示的运动特性。

表 1-1

振体位置	弹簧变形	恢复力	势能	加速度	速　度	动能
初始 A	伸长最大	P 向左	最大	向左最大	零	零
$O\leftarrow A$	伸长变小	P 向左变小	降低	向左变小	向左加速	增大
O	无变形	零	零	零	向左最大	最大
$B\leftarrow O$	压缩变大	P 向右变大	增加	向右变大	向右减速	降低
B	压缩最大	P 向右最大	最大	向右最大	零	零
$B\rightarrow O$	压缩变小	P 向右变小	降低	向右变小	向右加速	增加
O	无变形	零	零	零	向右最大	最大
$O\rightarrow A$	伸长变大	P 向左变小	增加	向左变大	向右减速	降低
回到位置 A	重复初始 A 的情况					

上述实验说明，振体往复运动的原因在于：振体受到的弹性恢复力始终指向平衡位置；系统的动能与势能相互转化，交替由零变为最大值，维持振体周期性地在平衡位置附近振动。

由图 1-1，可以用牛顿定律建立振动方程为

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad 即 \quad m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1-2}$$

式(1-2)称为单自由度无阻尼系统的自由振动方程。将式(1-2)两边除以质量 m，得：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad 或 \quad \ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{1-3}$$

式中

$$p = \sqrt{k/m} \quad (弧度 / 秒, \mathrm{rad/s}) \tag{1-4}$$

式(1-3)又称为对质量归一的方程。式(1-4)的 p 称为振系的固有频率，因为它只取决于振系的质量和刚度。

由常微分方程理论，式(1-3)的解为

$$x = e^{st}$$

代入式(1-3)，得到特征方程及其根分别为

$$s^2 + p^2 = 0, \qquad s_{1,2} = \pm ip, \quad i = \sqrt{-1}$$

原方程的通解为

$$x = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} \tag{1-5}$$

式中 C_1 和 C_2 为复数。式(1-5)称为振动方程解的复数表达式。本书中主要采用实数表达式，应用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可将式(1-5)转化为

$$x = D_1 \cos pt + D_2 \sin pt \tag{1-6}$$

式中

$$D_1 = C_1 + C_2; \qquad D_2 = i(C_1 - C_2) \tag{1-7}$$

D_1 和 D_2 为实数，由振动系统的初始条件决定。设 $t=0$ 时刻的初始位移和初始速度分别为

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad \dot{x}|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dot{x}_0$$

代入式(1-6)，可得

$$D_1 = x_0, \qquad D_2 = \dot{x}_0 / p \tag{1-8}$$

自由振动位移响应为

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt \tag{1-9}$$

式(1-9)表示了单自由度无阻尼系统自由振动位移响应，它是以初始位移 x_0 为幅值的余弦运动，和以($\dot{x}_0/p$)为幅值的正弦运动的组合，可分别绘出它们的运动曲线如图 1-2(a、b)所示。由于两者频率相同，可以合成为初相不为零的简谐运动，如图 1-2(c)所示，图 1-2(d)为其位移矢量的合成图。合成运动可写为：

$$\left.\begin{aligned} &位移响应 \quad & x &= A\sin(pt + \alpha) \\ &速度响应 \quad & \dot{x} &= pA\cos(pt + \alpha) \\ &加速度响应 \quad & \ddot{x} &= -p^2 A\sin(pt + \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

$$\left.\begin{aligned} &振幅 \quad & A &= \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/p)^2} \\ &初相 \quad & \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = p x_0 / \dot{x}_0 \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

显然，振幅与初相既取决于初始条件又取决于固有频率。

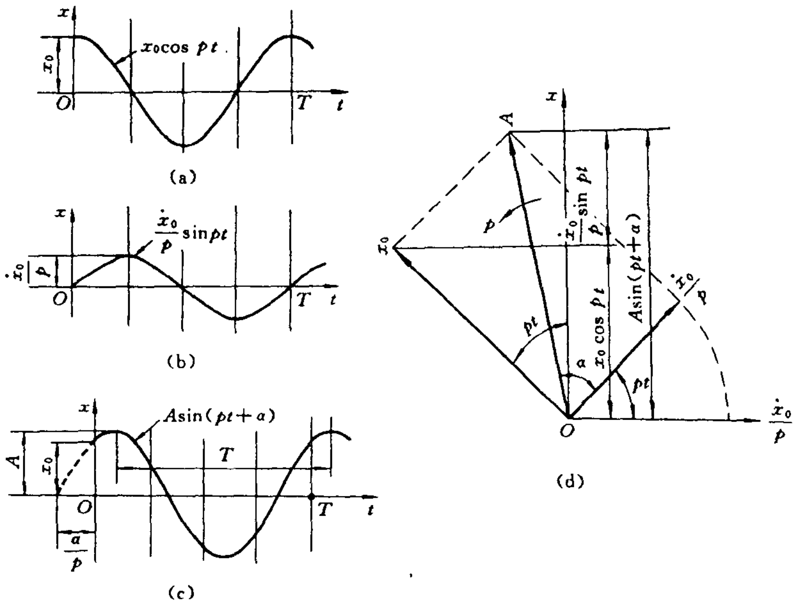


图 1-2

由式(1-10)知，间隔一定的时间(T)，相位增加 2π 弧度，振体重复原来的运动，可得

$$\left.\begin{aligned} &\text{固有周期 } T \qquad T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{秒}, \mathrm{s}) \\ &\text{自然频率 } f \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} \quad (\text{周}/\text{秒}, \mathrm{Hz}) \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

固有频率、固有周期和自然频率均与初始条件无关，只取决于振系特性参数即质量和刚度。当刚度大难以位移或变形，或质量小即易于运动，则振系的固有频率高，发生高频振动。反之，当刚度小或质量大时，振系固有频率低，发生低频振动。因此固有频率是振动分析中一个极重要参数。

由式(1-10)可求得振体最大位移 $x_{\max}$，最大速度 $\dot{x}_{\max}$ 和最大加速度 $\ddot{x}_{\max}$：

$$\left.\begin{aligned} &x_{\max} = A; \qquad \dot{x}_{\max} = pA; \qquad \ddot{x}_{\max} = p^2 A \\ &p x_{\max} = \dot{x}_{\max}, \qquad p\dot{x}_{\max} = \ddot{x}_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

注意：上述最大 $x_{\max}$、$\dot{x}_{\max}$ 和 $\ddot{x}_{\max}$ 的发生时刻 t 是不同的。

公式(1-13)提供了测量振系固有频率的一个方法：若测出振体偏离平衡位置的最大位移值，或最大速度值或最大加速度值中的任意两个值时，就可利用式(1-13)求得振系的固有频率 p，这种方法比直接测量振系的质量和刚度要方便。

图 1-3 为弹簧具有静变形的模型。静变形 λ_S 为

$$\lambda_S = mg/k \tag{1-14}$$

若坐标 x 的原点选取在弹簧静变形的静平衡位置 O 点上，(非弹簧原长 l_0 的 O' 点)，并设 x 正方向为静变形方向，那么可由牛顿定律得到运动方程为

$$m\ddot{x} = mg - k(x + \lambda_S) \tag{1-15}$$

将式(1-14)代入式(1-15)，简化为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1\text{-}16)$$

式(1-16)和式(1-2)在形式上完全一致,因此由图 1-1 弹簧无静变形的模型所推得的式(1-3)至式(1-13)都适用于图 1-3 的模型。差别在于:弹簧的实际变形位移不同,弹簧的实际内力不同。即图 1-3 中弹簧的实际变形 x' 为

$$x' = x + \lambda_S = \lambda_S + A\sin(pt + \alpha) \quad (1\text{-}17)$$

弹簧的内力 P'_k 为

$$P'_k = -kx' = -k(\lambda_S + x)$$

最大受力 $P'_{k\max}$ 为

$$P'_{k\max} = kx'_{\max} = k(\lambda_S + x_{\max})$$

弹簧具有静变形的模型还提供了一个求解振系固有频率 p 的重要公式,即

$$p = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/(mg/k)} = \sqrt{g/\lambda_S} \quad (1\text{-}18)$$

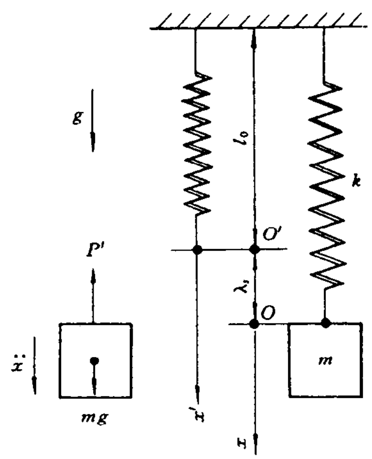


图 1-3

例如绪论中图 2,当只考虑汽车在铅直方向的振动时,只需要测量它铅直方向的静变形 λ_S,利用上式就可以计算出汽车在铅直方向自由振动的固有频率。

下面用例题说明工程实际问题如何简化为上述振动模型,以及分析求解过程。

例 1-1 如图 1-4 所示一个重量为 G 的电机固定在两端简支的工字型截面梁上,梁的抗弯刚度为 EJ,梁的质量略去不计。试求该系统在铅直方向振动的固有频率 p。

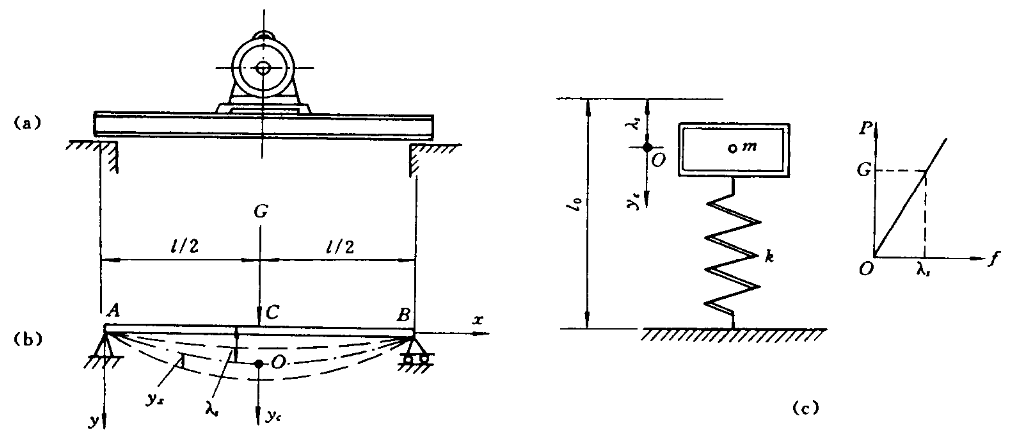


图 1-4

解 首先电机简化为集中质量 m。

$$m = G/g$$

由材料力学知,当不计梁的自重时,在等截面简支梁中部受集中力 G 作用下(图 1-4(b)),电机的静位移(即梁中点静变形挠度)λ_S 为

$$\lambda_S = \frac{l^3}{48EJ}G \quad (1\text{-}19)$$

设物体的振动位移坐标 y_c 的原点在梁中截面(图 1-4(b))C 处的静变形平衡位置上,且 y_c 向下为正。在振动过程中,物体受到梁的弹性恢复力 P 和中截面挠度 y 的关系为

$$y = (y_c + \lambda_S) = \frac{l^3}{48EJ}P \tag{1-20}$$

对于电机而言，由式(1-19)、式(1-20)均可得其刚度系数 k 为

$$k = \frac{48EJ}{l^3} \tag{1-21}$$

于是实物示意图 1-4(a)可简化为图 1-4(c)的类似于图 1-3 的振动模型，即梁被一个等效弹簧 k 所代替，于是系统的固有频率 p 为

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}} \tag{1-22}$$

对于本例，固有频率 p 也可以由静变形公式求解：

$$p = \sqrt{g/\lambda_S} = \sqrt{g\Big/\left(\frac{l^3}{48EJ}G\right)} = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}} \tag{1-23}$$

讨　　论

若已知电机在 y 向运动的初始位移为 y_{co}（设初始速度 $\dot{y}_{co}$ 为零），则可由公式(1-9)写出电机的运动方程

$$y_c = y_{co}\cos pt \tag{1-24}$$

利用式(1-24)，可以求出梁上任意横截面(x 处)的运动方程 y。由材料力学知，任一截面的挠曲线方程 y_x 和中截面 C 挠度 y_c 分别如(图 1-4(b))所示。

$$y_x = \frac{3l^2x - 4x^3}{48EJ}P \qquad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{1-25}$$

$$y_c = \frac{l^3}{48EJ}P \tag{1-26}$$

两式消去 P，可得

$$y_x = \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}y_c \qquad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{1-27}$$

将式(1-24)代入式(1-27)，得到梁上任一截面的位移响应为

$$y_x = \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}y_{co}\cos pt \qquad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{1-28}$$

从而可以求出任一 x 处截面上动弯矩 M_x 及动弯曲正应力 σ_x，它们分别为

$$M_x = EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-24EJx}{l^3}y_{co}\cos pt \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{1-29}$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_z} = \frac{-24EJx}{W_z l^3}y_{co}\cos pt \qquad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{1-30}$$

在振动过程中，全梁上最大动应力 σ_{max} 为

$$\sigma_x\Big|_{x=l/2,\,t=i\pi/p(i=0,1,2\cdots\cdots)} = \pm\frac{12EJy_{co}}{l^2W_z} \tag{1-31}$$

将动应力 σ_{max} 叠加上静应力 σ_j 后，可进行强度校核或截面设计：

$$\sigma = (\sigma_{max} + \sigma_j) \leqslant [\sigma]$$

上述过程说明了利用机械振动知识求解工程问题的最基本过程。

例 1-2　图 1-5 中升降机起吊重物的质量为 5 100 kg，匀速下降 $V_0 = 3$ m/s。钢丝绳的