国家工科数学课程教学基地
研究生教学用书

图论及其应用

Graph Theory and Its Applications

3

电子科技大学应用数学学院 张先迪 李正良 主编

高等教育出版社

图论及其应用

Graph Theory and Its Applications

电子科技大学应用数学学院
张先迪　李正良　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是一本有一定学术参考价值的理工科研究生教学用书。它是根据作者多年从事研究生图论教学的经验，并结合国内外优秀教材的长处和图论的新近发展状况编写而成。全书共十章，分别讨论图的基本概念、树、图的连通度、Enler 图与 Hamilton 图、匹配与因子分解、平面图、图的着色、Ramsey 定理、有向图以及代数图论中的一些内容。其内容详尽，既有基本内容，又有提高内容；不仅较为全面地介绍了图论中的一些基本概念，基本理论和基本方法，而且还反映了近期图论及其应用中的一些研究课题和结论。

本书论证简明，叙述清晰，内容深入浅出，循序渐进，便于教学。书中还配有较多数量的典型例题和习题，既可作为研究生教学用书，也可作为本科高年级学生的教材以及有关科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/张先迪，李正良主编．—北京：高等教育出版社，2005.2

ISBN 7-04-016090-0

Ⅰ.图… Ⅱ.①张…②李… Ⅲ.图论-研究生-教材 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 140723 号

策划编辑 李艳馥　　责任编辑 张耀明　　封面设计 李卫青
责任绘图 黄建英　　版式设计 史新薇　　责任校对 王　超
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.handraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 2 月第 1 版
印　　张	19.25	印　　次	2005 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	定　　价	26.80 元

物料号　16090-00

前　言

现实生活中，许多问题都可归结为一个由点和线组成的图形的问题。例如，由点代表车站，线代表铁路线的铁路网络图；点代表路口，线代表街道的城市交通图；点代表管道接头，线代表管道的自来水供水系统；点代表电网络的结点，线代表结点间的电气元件的电网络图等等。图论正是研究这些由点和线组成的"图形"问题的一门学科。

图论起源于 18 世纪，其第一篇论文是由 Euler(1707—1782)于 1736 年所完成。这篇论文不仅解决了一个当时还没有解决的著名问题——哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题(见第四章)，也使欧拉成为了图论和拓扑学的创始人。图论诞生后，特别是近 30 年来发展十分迅速，应用也十分广泛。其应用已涉及物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及管理科学等诸多领域。由于图论与计算机科学紧密相联系，近若干年来，计算机科学、计算机网络的迅猛发展，更拓展了图论的应用发展空间。在计算机的许多领域内，它都占有一席之地。图论在其他数学分支中，如矩阵论、群论中也有其重要的应用。

本书是根据作者多年从事图论教学的经验并结合国内外优秀教材的长处和图论的新近发展状况编写而成的。书中着重介绍了图论及其应用中的一些基本概念、基本理论和基本方法，同时也对一些扩展问题展开了讨论，并注意到了适当地反映图论研究中一些近期的研究问题和研究结果。全书共十章，分别讨论图的基本概念、树、图的连通度、Euler 图与 Hamilton 图、匹配与因子分解、平面图、图的着色、Ramsey 定理、有向图以及代数图论中的一些基本内容。

本书既有基本内容，又有提高内容，编排由浅入深，循序渐进，层次分明，并配有较多的实例和难易程度不同的习题。教师可根据教学要求、课时多少、授课对象、灵活选取授课内容。书中§1.6、§1.7、§3.4、§4.7、§4.9、§7.6、§7.7、§8.3、§9.7 及第十章等章节具有相对独立性，这些章节选讲或不讲基本不影响其他部分的学习。为了在有限的篇幅中包含尽可能多的信息量，书中一些较繁的证明被省略。书中证明后的符号"□"表示"证毕"。

本书由张先迪教授和李正良教授主编。执笔分别为张先迪(第三、六、七、八、九、十章)、李正良(第一、四、五章)和杨春(第二章)。

本书由谢云荪教授(电子科技大学)主审。他在肯定本书的同时,提出了十分宝贵的意见和建议,在此深表感谢。

本书的编写得到了电子科技大学研究生教材建设基金的资助,得到了电子科技大学应用数学学院和高等教育出版社理科分社的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢。同时还要感谢洪继俊和汪小平老师,他们为书稿的录入作了大量的工作。

由于编者水平的局限,书中难免存在一些缺点和错误,恳请同行专家及读者提出宝贵意见和建议,以使本书得以不断改进和完善。

编　者

2004.10

目　　录

第一章　图的基本概念

历史上，图论曾经被很多数学家各自独立地建立过，因为图论本身就是应用数学的一部分，所以这种情况并不是偶然的巧合. 事实上，最早是 Euler 的著作中出现了这样的文字，虽然，他所考虑的原始问题似乎是一个颇为无聊的七桥问题，然而这个问题确实有其深刻的实际背景. 后来，Kirechoff 对电网络的研究导致他发展了图论的基本概念和关于图中的树的定理；同时，Cayler 则是为了有机化学中的同分异构物的计数问题而考虑到树. 随着 Hamilton 问题和四色猜想的出现，更大大地推动了图论的发展. 本章介绍图和描述图的局部结构的一些基本概念和术语. 这里的名词和概念较多，但它们都是基本的. 此外，我们还要初步介绍完全子图、极图理论、交图、团图和图的一些有用的运算. 这些对以后的讨论是非常重要的，希望读者能熟练地掌握.

§1.1　图和简单图

我们所讨论的图(graph)与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图表等是很不相同的. 图论中所谓的图是指某类具体事物和这些事物之间的联系. 如果我们用点表示具体事物，用连线表示两个具体事物之间的联系. 那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成.

定义 1　一个图 G 定义为一个有序对 (V,E)，记为 $G=(V,E)$，其中

(1) V 是一个非空集合，称为顶点集或点集，其元素称为顶点或点，$|V|$ 表示顶点数；

(2) E 是由 V 中的点组成的无序点对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可出现多次.

图 G 的顶点集也记为 $V(G)$，边集也记为 $E(G)$. 顶点集和边集都有限的图称为**有限图**. 只有一个顶点而无边的图称为**平凡图**. 其他所有的图都称为**非平凡图**. 边集为空的图称为**空图**. 图 G 的**顶点数**(或**阶数**)和**边数**可分别用符号 $n(G)$ 和 $m(G)$ 表示. 连接两个相同顶点的边的条数，称为边的**重数**. 重数大于 1 的边称为**重边**. 端点重合为一点的边称为**环**. 既没有环也没有重边的图称为**简单图**. 其他所有的图都称为**复合图**.

边记为 uv,也可记 uv 为 e,即 $e=uv$. 此时称 u 和 v 是 e 的端点,并称 u 和 v **相邻**,u(或 v)与 e **相关联**. 若两条边有一个共同的端点,则称这两条边相邻. 若用小圆点代表点,连线代表边,则可将一个图用"图形"来表示.

一、图的同构

定义 2 设有两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$,若在其顶点集合之间存在双射,即存在一一对应的关系,使得边之间有如下的关系:设 $u_1\leftrightarrow u_2$,$v_1\leftrightarrow v_2$,$u_1,v_1\in V_1$,$u_2,v_2\in V_2$;$u_1v_1\in E_1$,当且仅当 $u_2v_2\in E_2$,且 u_1v_1 的重数与 u_2v_2 的重数相同,则称两图同构,记为 $G_1\cong G_2$.

例如在图 1-1 中的 G_1 和 G_2 就是同构的.

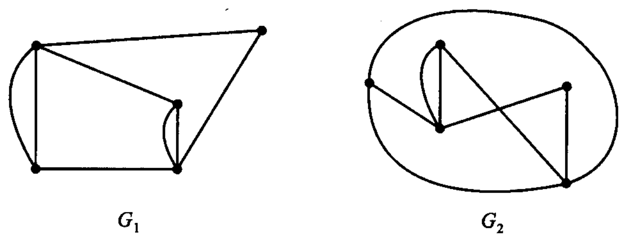


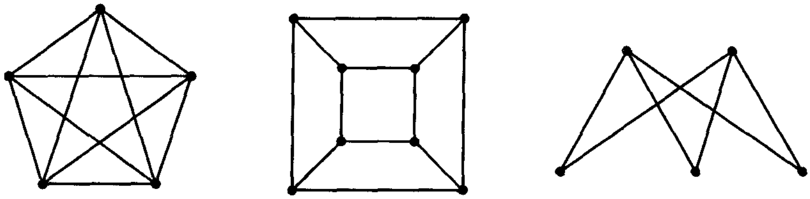
图 1-1

不难证明,图的同构关系是一个等价关系. 所有的图的集合,按照同构关系可划分为一些等价类,以所有等价类为元素构成的集合称为商集. 尽管商集中的元素是一个集合,但这个集合中的任两个图均有相同的结构,差异只是顶点和边的名称不同. 因此在图的图形表示中我们可以不给图的点和边标上符号,称这样的图为**非标定(号)图**,否则称为**标定(号)图**. 非标定图实际上是代表一类相互同构的图. 不误解时我们也不严格区分标定图与非标定图.

二、完全图,偶图,补图

每两个不同的顶点之间都有一条边相连的简单图称为**完全图**. 在同构意义下,n 个顶点的完全图只有一个,记为 K_n. 所谓**偶图**(或二部图)是指具有二分类(X,Y)的图,它的点集可以分解为两个(非空)子集 X 和 Y,使得每条边的一个端点在 X 中,另一个端点在 Y 中;**完全偶图**是指具有二分类(X,Y)的简单偶图,其中 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点相连. 若 $|X|=m$,$|Y|=n$,则这样的完全偶图记为 $K_{m,n}$. 图 1-2(a)是 K_5 的图形;由立方体的顶点和边所确定的图(如图 1-2(b))是偶图;图 1-2(c)

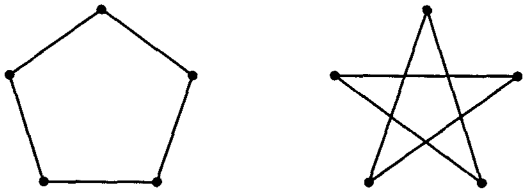
中的图是完全偶图 $K_{2,3}$.



(a)　　(b)　　(c)

图 1-2

对于一个简单图 $G=(V,E)$，令集合 $E_1=\{uv \mid u\neq v, u,v\in V\}$，则图 $H=(V,E_1\backslash E)$ 称为 G 的**补图**，记为 $H=\overline{G}$. 图 1-3 中的(a)，(b)两图是互补的.



(a)　　(b)

图 1-3

定理 1　若 n 阶图 G 是自补的(即 $G\cong\overline{G}$)，则 $n=0,1(\mathrm{mod}\ 4)$.

证明　因为 G 是自补的，则 G 和 $\overline{G}$ 有同样多的边数，且边数

$$m(G)+m(\overline{G})=m(K_n)=\frac{n(n-1)}{2},$$

从而

$$m(G)=\frac{n(n-1)}{4}.$$

又因 G 的边数 $m(G)$ 是整数，故 $n(n-1)/4$ 为整数，即只能有 $n\equiv0(\mathrm{mod}\ 4)$，或 $(n-1)\equiv0(\mathrm{mod}\ 4)$.　□

图 1-3 的(a)或(b)均是自补图.

三、顶点的度，度序列

G 的顶点 v 的度 $d(v)$ 是指 G 中与 v 关联的边的数目，每个环计算两次. 用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点的**最小度**和**最大度**. 为方便，奇数度的顶点称为**奇点**，偶数度的顶点称为**偶点**. 设 $G=(V,E)$ 为简单图，如果对所有 $v\in V$，有 $d(v)=k$，称图 G 为 k **正则图**. 完全图和完全偶图 $K_{n,n}$

均是正则图.

定理 2 图 $G=(V,E)$ 中所有顶点的度的和等于边数 m 的 2 倍，即

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m. \tag{1.1}$$

证明 因为在一个图中移去每一条边均使它的两个端点的度各减少 1，故上定理显然成立. □

推论 1 在任何图中，奇点个数为偶数.

证明 设 V_1 和 V_2 分别是 G 中奇点集和偶点集. 则由定理 2 知

$$\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = \sum_{v\in V} d(v)$$

是偶数，而 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 也是偶数，则 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 是偶数，从而 $|V_1|$ 是偶数. □

推论 2 正则图的阶数和度数不同时为奇数.

证明 设 G 是 k 正则图，若 k 为奇数，则由推论 1 知正则图 G 的点数必为偶数. □

一个图 G 的各个点的度 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的**度序列**，它们的和当然是 $2m$. 反之，设有 n 个非负整数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ 是一个偶数，现问是否存在一个图 G 以数组 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 为它的度序列，如果这样的图存在，怎样重构这个图.

以上问题，实质是数论中的一个划分问题. 所谓**划分**是指将一个正整数 k 表示为若干正整数的和，或者看作一个无序正整数组，这些正整数的和是 k.

若一个 n 阶简单图 G 各点的度为 d_i，则分正整数 k 为 n 个部分的划分 $\sum d_i$ 称为是**图划分**. 若一个划分是图划分，则一定有 $d_i \leqslant n-1$，且 k 是偶数. 反之不一定成立. 例如，偶数 4 有五种划分：

$$4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.$$

但属于图划分的却只有两种(如图 1-4).

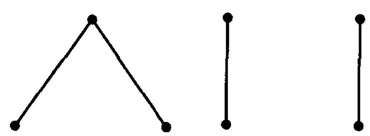


图 1-4

若对一个非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$，存在一个简单图 G，以它为度序列，则称这个数组是**可图的**. 下面的定理给出了可图数组的判断和怎样构造图.

定理 3 设有非负整数组 $\Pi=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ 是一个偶数，$n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，它是可图的充要条件为 $\Pi'=(d_2-1, d_3-$

$1,\cdots,d_{n-1}-1,d_n)$是可图的.

为了说明这个定理,我们试鉴定下列非负整数组:

$$\Pi=(5\ 5\ 3\ 3\ 2\ 2\ 2),$$
$$\Pi'=(\ \ 4\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2),$$
$$\Pi_1=(\ \ 4\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1),$$
$$\Pi_1'=(\ \ \ \ 1\ 1\ 1\ 0\ 1).$$

显然Π_1'是可图的,所以Π也是可图的.这样构成的图画在图 1-5 中.

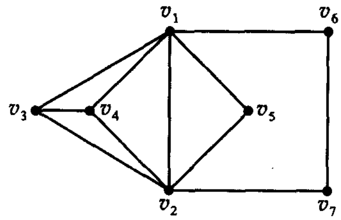


图 1-5

四、图的频序列

定理 4 一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同.

证明 因为对任何这样的图 G,$\Delta(G)\leqslant n-1$. 如果 $\Delta(G)<n-1$,则度不相同的点只可能有 $\Delta(G)+1$ 个(即度是 $\Delta(G),\Delta(G)-1,\cdots,1,0$ 的点),而 $\Delta(G)+1<n$,所以必然另外有些点与圆括弧内的点的度数相同,得证.如果 $\Delta(G)=n-1$,则 G 中没有孤立点,即 $\delta(G)>0$,所以 $\Delta(G)-\delta(G)<n-1$,同上面一样,度不相同的点只有 $\Delta(G)-\delta(G)+1$ 个,显然小于 n,故图 G 中也有度相同的点. □

定义 3 设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 $d_1,d_2,\cdots,d_s$. 又设度为 d_i 的点有 $b_i(i=1,2,\cdots,s)$个,则有 $\sum_{i=1}^{s}b_i=n$. 故非整数组$(b_1,b_2,\cdots,b_s)$是 n 的一个划分,称为 G 的**频序列**.

定理 5 一个 n 阶图 G 和它的补图$\overline{G}$有相同的频序列.

证明 因为根据补图的定义有 $d_G(v_i)+d_{\overline{G}}(v_i)=n-1$,这就是说,若在 G 中度为 $d_i(i=1,2,\cdots,s)$的点有 b_i 个,则同样这 b_i 个点在$\overline{G}$中的度就变为 $d_i'=(n-1)-d_i(i=1,2,\cdots,s)$,故 G 与$\overline{G}$有相同的频序列. □

§ 1.2 子图与图的运算

一、子图

定义 1 如果 $V(H)\subseteq V(G)$,$E(H)\subseteq E(G)$,且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的重数,则称 H 是 G 的**子图**,记为 $H\subseteq G$. 有时又称 G 是

H 的母图.

当 $H\subseteq G$,但 $H\neq G$ 时,则记为 $H\subset G$,且称 H 为 G 的**真子图**. G 的**生成子图**是指满足 $V(H)=V(G)$ 的子图 H.

假设 V' 是 V 的一个非空子集. 以 V' 为顶点集,以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图,称为 G 的由 V' 导出的子图,记为 $G[V']$,简称为 G 的**导出子图**,导出子图 $G[V\backslash V']$ 记为 $G-V'$,它是 G 中删除 V' 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V'=\{v\}$,则把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$.

假设 E' 是 E 的非空子集. 以 E' 为边集,以 E' 中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为 G 的由 E' 导出的子图,记为 $G[E']$,简称为 G 的**边导出子图**,边集为 $E\backslash E'$ 的 G 的导出子图简记为 $G-E'$. 若 $E'=\{e\}$,则用 $G-e$ 来代替 $G-\{e\}$.

设 $G=(V,E)$ 是没有孤立点的图,其边数为 m,由于每条边都有两种选择,即包含于或不包含于某个子图中,如果子图每条边都包含就是图 G,如果每条边都不包含,就是空图. 故有下面的

定理 6 简单图 G 中所有不同的生成子图(包括 G 和空图)的个数是 2^m 个.

事实上,当图包含某边时,也就意味着包含了与该边关联的两个顶点,故不同子图的个数是

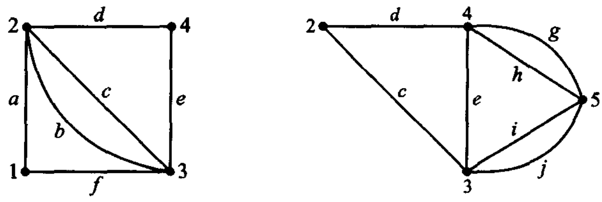
$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m}=2^m.$$

二、图的运算

设 G_1,G_2 是 G 的子图. 若 G_1 和 G_2 无公共顶点,则称它们是**不相交的**;若 G_1 和 G_2 无公共边,则称它们是**边不重的**. G_1 和 G_2 的**并图** $G_1\cup G_2$ 是指 G 的一个子图,其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$,其边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$;如果 G_1 和 G_2 是不相交的,有时就记其并图为 G_1+G_2. 类似地可定义 G_1 和 G_2 的交图 $G_1\cap G_2$,但此时 G_1 和 G_2 至少要有一个公共顶点. G_1 和 G_2 的**差** G_1-G_2 是由 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图. G_1 与 G_2 的**对称差** $G_1\triangle G_2$ 是 G_1 和 G_2 的并中去掉 G_1 与 G_2 的交所得到的图,即

$$G_1\triangle G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)=(G_1-G_2)\cup(G_2-G_1).$$

设 G_1 和 G_2 如图 1-6 所示,它们的并、交、差及对称差分别如图 1-7 所示.



G_1　　G_2

图 1-6

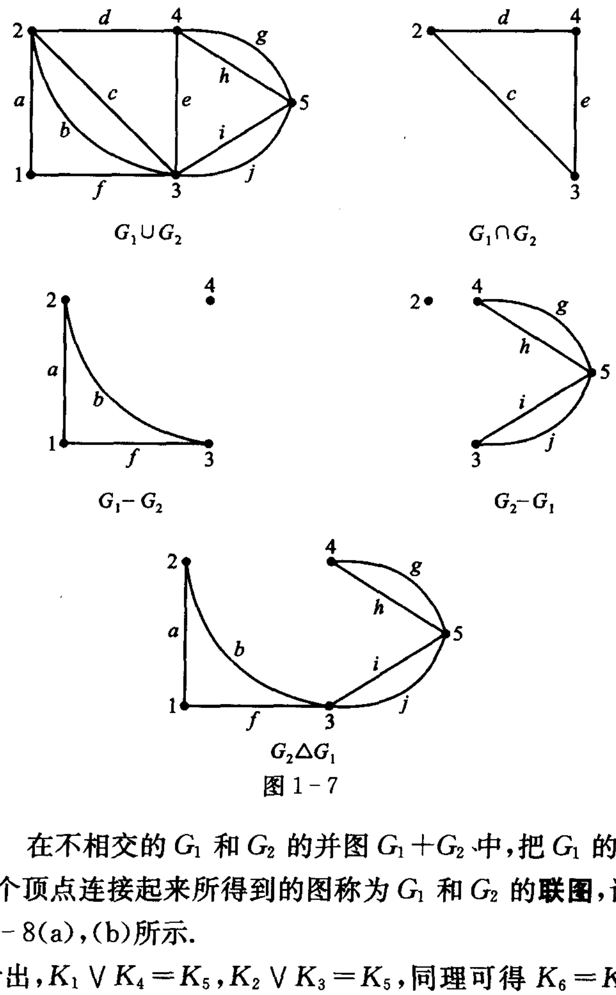
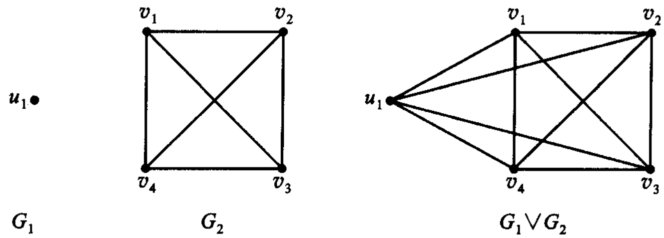


图 1-7

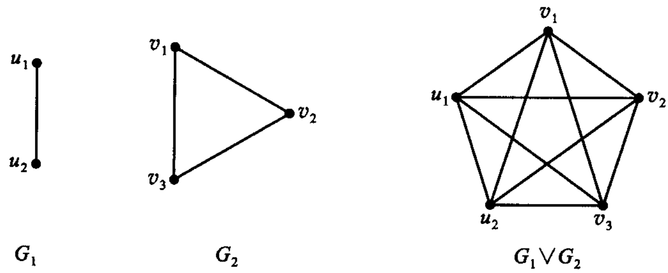
定义 2　在不相交的 G_1 和 G_2 的并图 G_1+G_2 中，把 G_1 的每个顶点和 G_2 的每个顶点连接起来所得到的图称为 G_1 和 G_2 的**联图**，记为 $G_1 \vee G_2$. 如图 1-8(a)，(b)所示.

不难看出，$K_1 \vee K_4 = K_5$，$K_2 \vee K_3 = K_5$，同理可得 $K_6 = K_1 \vee K_5 = K_2 \vee K_4 = K_3 \vee K_3$.

定义 3　设 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，对点集 $V=V_1 \times V_2$ 中的任意两个点 $u=(u_1,u_2)$ 和 $v=(v_1,v_2)$，当($u_1=v_1$ 和 u_2 adj v_2)或($u_2=v_2$ 和



(a)



(b)

图 1－8

u_1 adj v_1）时就把 u 和 v 连接起来所得到的图 G 称为 G_1 和 G_2 的**积图**，记为 $G=G_1\times G_2$，其中 u_i adj v_i 表示 u_i 和 v_i 邻接. 如图 1－9 中所示.

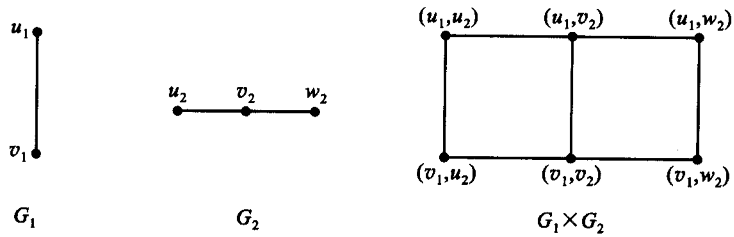


图 1－9

定义 4 设 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，对点集 $V=V_1\times V_2$ 中的任意两个点 $u=(u_1,u_2)$ 和 $v=(v_1,v_2)$，当（u_1 adj v_1）或（$u_1=v_1$ 和 u_2 adj v_2）时就把 u 和 v 连接起来所得到的图 G 称为 G_1 与 G_2 的**合成图**，记为 $G=G_1[G_2]$.

对于图 1－9 中的两个图 G_1 和 G_2，两种合成图 $G_1[G_2]$ 和 $G_2[G_1]$ 都画在图 1－10 中，它们显然不同构.

若 G_1 的点数和边数为 n_1,m_1，G_2 的点数和边数为 n_2,m_2，则经上述 4 种图的运算，图的点数和边数列在表 1－1 中.

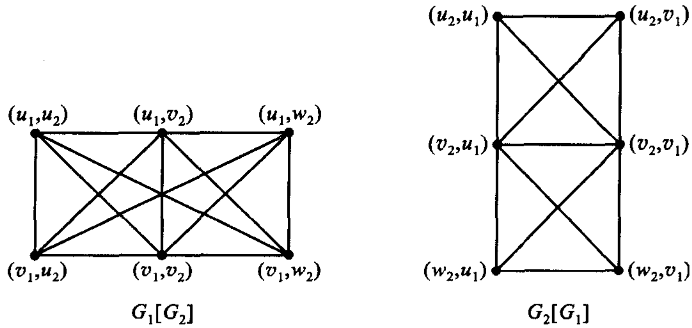


图 1 - 10

表 1 - 1　图的二元运算

运　　算	点的数目	边的数目
并　$G_1 \cup G_2$	n_1+n_2	m_1+m_2
联　$G_1 \vee G_2$	n_1+n_2	$m_1+m_2+n_1n_2$
积　$G_1 \times G_2$	n_1n_2	$n_1m_2+n_2m_1$
合成　$G_1[G_2]$	n_1n_2	$n_1m_2+n_2^2m_1$

一族特别重要的图称为**方体**，它用积来定义最为自然. ***n* 方体** Q_n 递推地定义为 $Q_1=K_2$，$Q_n=K_2\times Q_{n-1}$. 于是 Q_n 有 2^n 个点，它的点可以用 $a_1\,a_2\cdots a_n$ 来标定，其中 a_i 是 0 或者 1. 如果 Q_n 的两个点的二进制表示式中只有一处不同，则它们邻接. 图 1 - 11 中画出了已经经过适当标定的 2 方体与 3 方体.

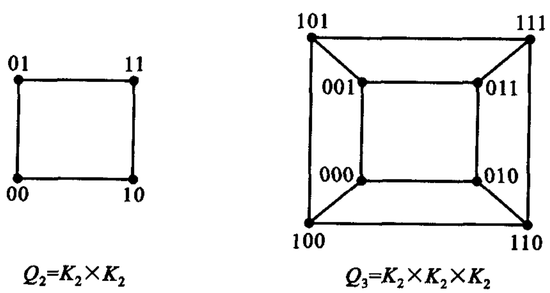


图 1 - 11

将 G_1 的一个任意点与 G_2 的一个任意点等同起来只产生惟一的图(同构图视为同一图)，将这个图记为 $G_1\cdot G_2$. 例如，在图 1 - 12 中的 H_1，H_2 就是这样运算来的.