21世纪

大学课程辅导丛书

数学分析

例题解析及难点注释

（上册）

（一元函数部分）

李惜雯

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪

大学课程辅导丛书

数学分析

例题解析及难点注释

（上册）

（一元函数部分）

李惜雯

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西安·

内容提要

本书是根据综合大学数学类各专业用数学分析课程的教学大纲编写的。本册为一元函数部分,共分5章,包括252道(大)题。

每章、节均有基本要求、内容提要及例题解析三部分。本书侧重理论分析,每道题之后作有注释,对该题所用概念、知识及解题思路进行分析、讨论;每章最后一节给出适量练习题及部分答案或提示。

本书可作为综合大学、师范类院校数学类专业学生学习数学分析课程的参考书,数学分析习题课教材;可作为全日制理工科各专业学生学习工科数学分析、高等数学课程及中青年教师从事本类课程教学的参考书;也可作为报考数学类各专业研究生考生的数学分析参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析例题解析及难点注释.上册(一元函数部分)/李惜雯编著.—西安:西安交通大学出版社,2004.1
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1766-8

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第094205号

书　名	数学分析例题解析及难点注释.上册(一元函数部分)
编　著	李惜雯
出版发行	西安交通大学出版社
电　话	(029)82668315　82669096(总编办)
	(029)82668357　82667874(发行部)
印　刷	西安建筑科技大学印刷厂
字　数	537千字
开　本	787 mm×1092 mm　1/16
印　张	22
版　次	2004年1月第1版　2004年1月第1次印刷
印　数	0001~5000
书　号	ISBN 7-5605-1766-8/O·199
定　价	28.00元

前　　言

数学分析是数学类各专业的一门学时最高(290学时左右)的专业基础课。其教学目的是培养学生的专业素养,为后续专业基础课、专业课打下知识方面与能力方面的基础。正是这个教学目的,使该课程在研究方法、理论体系、语言表述、分析技巧等的讲授与学习方面均有较高的要求。所以,本课程在教与学两方面都有较大的难度。

为了帮助学生掌握数学分析最基本的研究方法和最核心的理论体系,并能对分析语言运用自如,对基本的分析技巧有所掌握,作者根据自己多年从事数学分析教学工作的经验与体会,经心挑选500余道(大)题(上册含252道(大)题),并给出论证、分析、讨论,编成此书。

本书与多数数学分析题解的不同之处在于:第一,本书侧重于理论部分,因为一般的计算类题目在许多同类书中均可找到;第二,本书每题证(解)之后均有注释,对所用概念、知识作进一步的讨论、分析,特别突出概念与思路的讨论。这样将有助于学生对知识内在联系的把握,有利于对概念与理论的深刻理解。

全书共分10章。上册(一元函数部分)5章,下册(多元函数与级数部分)5章。与本书内容体系基本一致的教材为复旦大学(陈传璋、金福临等编,高等教育出版社出版)的《数学分析》(第二版)。

由于本人水平有限,编写中定有不少错误与不足之处,敬请读者批评指正。在本书的编写过程中,西安交通大学研究生李鑫、方李斌同学参加了十分辛苦的校稿工作,同时作者得到西安交通大学出版社的大力支持,在此一并致谢!

编　　者

2003年9月

于西安交通大学

目　　录

第1章　函数与极限

1.1　函　数

1.1.1　基本要求

1. 掌握函数的定义及有关概念；
2. 掌握函数的几何性态；
3. 掌握反函数、复合函数的概念及其应用；
4. 掌握基本初等函数的性质、定义域、值域及初等函数的概念.

1.1.2　内容提要

1. **定义 1**(函数)　设给定数集 X、Y，若存在对应规则 f，使得对 $\forall\, x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的函数(或映射)，记为 $f:X \to Y.\ x \mapsto f(x)$ 或 $y = f(x)$，$x \in X$，其中 $x \in X$ 称为自变量，$y = f(x)$ 称为因变量. 并称 X 为 f 的定义域，数集 $\{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$ 称为 f 的值域.

2. **定义 2**(一一对应)　设 $f:X \to Y$，若

(1) $\forall\, x_1, x_2 \in X$，有 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$(此时称 $f:X \to Y$ 为单射)，

(2) $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$(此时称 $f:X \to Y$ 为满射)，

则称 $f:X \to Y$ 为一一对应(也称 $f:X \to Y$ 为双射).

3. **定义 3**(单调函数)　设 $f:X \to Y$，若 $\forall\, x_1, x_2 \in X$，有 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \leqslant f(x_2))$，则称函数 $y = f(x)$ 在 X 上单调增(单调减)，且当其中等号恒不成立时称 $y = f(x)$ 在 X 上严格单调增(严格单调减).

4. **定义 4**(反函数)　设 $f:X \to Y$，若 $\forall\, y \in Y$，由方程 $f(x) = y$ 可确定唯一解 $x \in X$，则此对应规则定义一个从 Y 到 X 的函数(映射)，记之为 $f^{-1}:Y \to X$. 称为 f 的反函数.

5. **定理**(反函数存在性)　函数 $f:X \to Y$ 存在反函数 $f^{-1}:Y \to X \Leftrightarrow f:X \to Y$ 为一一对应.

6. **推论**　若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 f 的反函数必存在，且与 $f(x)$ 具同一单调性.

7. **定义 5**(复合函数)　设 $f:X \to Y$，$\varphi:Y \to V$，则变量 $z = \varphi(y)$ 通过变量 $y = f(x)$ 成为变量 $x \in X$ 的函数. $z = \varphi(f(x))$，$x \in X$，称之为复合函数.

8. **定义 6**(奇偶函数)　设 $a > 0$(可有 $a = +\infty$)，如果 $f(x)$ 定义于 $(-a, a)$，且 $\forall\, x \in (-a, a)$，有 $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$，则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数.

9. **定义 7**(周期函数)　若存在 $\omega > 0$，使得 $\forall\, x \in X$，有 $f(x + k\omega) = f(x)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，则称 $f(x)$ 是 ω 周期函数. ω 称为周期.

10. **定义 8**(有界函数)　设 $f:X \to Y$，若存在 $M > 0$，使得 $\forall\, x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$. 则

称 $f(x)$ 在 X 上有界，M 称为它的一个界.

11. **定义 9**(无界函数)　设 $f:X\to Y$，若 $\forall M>0$，存在 $x_M\in X$，使得 $|f(x_M)|>M$. 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

12. **基本初等函数**：

(1) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$；

(2) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；

(3) 幂函数 $y=x^\mu(\mu\neq 0)$，设 n,m 为自然数.

① 当 $\mu=n$ 时，$x\in(-\infty,+\infty)$；

② 当 $\mu=-n$ 时，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

③ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n}$ 时，$x\in[0,+\infty)$；

④ 当 $\mu=\dfrac{1}{2n+1}$ 时，$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑤ 当 $\mu=\dfrac{m}{n}$ 时，$y=x^\mu=(x^{\frac{1}{n}})^m$；

⑥ 当 μ 为无理数时，$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$，定义域为 $(0,+\infty)$.

(4) 三角函数：　$y=\sin x, y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$，

$y=\tan x,\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，

$y=\cot x, x\neq k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

(5) 反三角函数(反正、余弦)：　$y=\arcsin x, x\in[-1,1]$，值域 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$；

$y=\arccos x, x\in[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$.

(6) 双曲函数：　$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$；

$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$，值域：$[1,+\infty)$.

13. **定义 10**(初等函数)　经过基本初等函数的有限次四则运算及有限次复合所得到的函数，称为初等函数.

1.1.3　例题解析

例 1-1　写出下列定义于 X 上函数的表达式，作出其图像，求其值集，并求指定点的函数值.

(1)　$X=(-4,5)$，$f(x)=[x]$ 表示"取不超过 x 的最大整数"，求 $f(-3.3)$，$f(4.2)$，$f(0.999)$；

(2)　$X=[0,20]$，$f(x)=\pi(x)$ 表示"取不超过 x 的素数的个数"，求 $f(0)$，$f(10.999)$，$f(11)$；

(3)　$X=(-\infty,+\infty)$，$f(x)=\mathrm{sgn}x$ 表示"大于 0 的 x 与 1 对应，小于 0 的 x 与 -1 对应，0 与 0 对应"，求 $f(-100)$，$f(0)$，$f(55.99)$；

解　(1)　由 $X=(-4,5)$ 及对应规则 f 为"取不超过 x 的最大整数"，得

$$f(x)=[x]=\begin{cases}-4 & -4<x<-3\\ -3 & -3\leqslant x<-2\\ -2 & -2\leqslant x<-1\\ -1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<4\\ 4 & 4\leqslant x<5\end{cases}$$

故值域 $\{f(x)|x\in(-4,5)\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$. 其图像为图 1.1 所示.

且由 $f(x)$ 的定义, $f(-3.3)=[-3.3]=-4$, $f(4.2)=4$, $f(0.999)=[0.999]=0$.

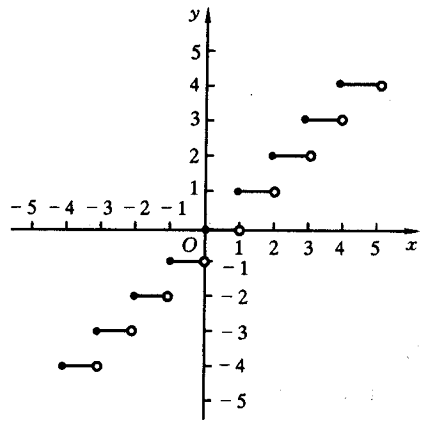

图 1.1

(2) 由 $X=[0,20]$ 及 $f(x)=\pi(x)$ 表示"不超过 x 的素数的个数",得 $f(x)$ 的解析表达式为

$$f(x)=\pi(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ 3 & 3\leqslant x<5\\ 4 & 5\leqslant x<7\\ 5 & 7\leqslant x<11\\ 6 & 11\leqslant x<13\\ 7 & 13\leqslant x<17\\ 8 & 17\leqslant x<19\\ 9 & 19\leqslant x\leqslant 20\end{cases}$$

故值域 $\{f(x)|x\in[0,20]\}=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$.

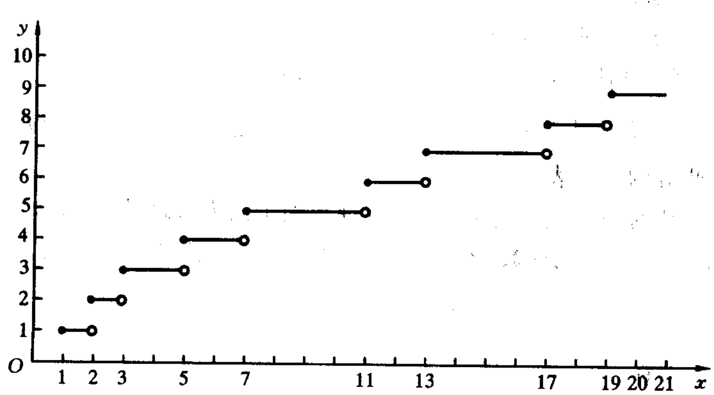

图 1.2

其图像为图 1.2 所示.

$f(0)=\pi(0)=0$； $f(10.999)=\pi(10.999)=5$； $f(11)=\pi(11)=6$.

(3) 由 $X=(-\infty,+\infty)$,$f(x)=\mathrm{sgn}x$ 的对应规则,可得到其解析表达式为

$$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

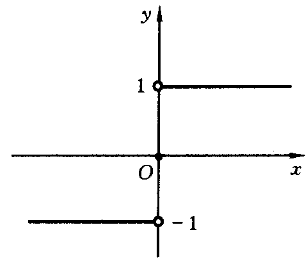

图 1.3

其值域 $\{f(x)\mid x\in(-\infty,+\infty)\}=\{0,\pm1\}$,图像为图1.3所示.故有 $f(-100)=\mathrm{sgn}(-100)=-1$,$f(0)=\mathrm{sgn}0=0$,$f(55.99)=\mathrm{sgn}(55.99)=1$.

注 1. 本题用到函数的概念；

2. 本题中的(1)所给函数称为“取整函数”.易见,$f(x)=[x]$ 可定义于 $(-\infty,+\infty)$,其图像为自左向右的阶梯线段；(2)所给函数可定义于 $[0,+\infty)$,其性质与(1)的大致相同,只不过不是均匀的,这是由 $\pi(x)$ 的对应规则决定的；(3)所给的函数常被称为“符号函数”.由此函数的定义,可有表达式 $|x|=x\mathrm{sgn}x$.由(1)～(3)的图像可见,这里所给的函数均为分段定义的,常称这类分段定义的函数为分段函数,分段函数在实际中应用很广.

例 1-2 对下列函数考查其是否为周期的,若是,求出其周期.

(1) $D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理点时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时}\end{cases}$

(2) $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\text{,其中 } p,q \text{ 互质},q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点}\end{cases}$

(3) $f(x)=x-[x]$ (4) $f(x)=xD(x)$

解 (1) 由 $D(x)$ 的定义,并注意对任一有理数 r,其与有理数之和仍为有理数,其与无理数之和为无理数,所以有：

$$\forall\ \text{有理数 } r, D(x+r)=D(x), x\in(-\infty,+\infty).$$

即 $D(x)$ 是周期函数,且任一有理数均为 $D(x)$ 的周期.

(2) 由 $R(x)$ 的表达式及有理数的性质可知,$x=\dfrac{p}{q}$(其中 p,q 互质,$q>0$)是有理数,且任一有理数可有此既约分数表达.

注意当 p,q 互质时,$p+q$ 与 q 互质,且有理数加1仍为有理数,故 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,若 x 为无理数,有 $x+1$ 为无理数,若 x 为有理数,则存在互质整数 $p,q(q>0)$,使

$$x=\frac{p}{q},\qquad x+1=\frac{p+q}{q}$$

所以由 $R(x)$ 的定义有

$$R(x+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},q,p \text{ 互质},q>0\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

即 $R(x)$ 为周期函数,且1为其周期.

(3) 首先注意，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有$[x] \leqslant x < [x]+1$，

所以 $[x]+1 \leqslant x+1 < [x]+2$，由取整函数的定义及$[x]+1$与$[x]+2$均为整数可知，$[x+1]=[x]+1$. 于是 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x).$$

即 $f(x)=x-[x]$ 是周期函数，且 1 为其周期.

(4) 因为 $xD(x)=\begin{cases} x & \text{当 } x \text{ 为有理点时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理点时} \end{cases}$

注意 有理数 $+\begin{cases} \text{有理数} = \text{有理数} \\ \text{无理数} = \text{无理数} \end{cases}$， 无理数 $+\begin{cases} \text{有理数} = \text{无理数} \\ \text{无理数} \quad \text{结果不一定} \end{cases}$.

故

$$\text{对任意有理数 } \beta \neq 0, f(x+\beta)=\begin{cases} x+\beta & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases};$$

$$\text{对任意无理数 } \alpha, f(x+\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ \text{不定} & \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

即 $f(x)=xD(x)$ 不是周期函数.

注 1. 本题用到有理数、无理数的基本性质、取整函数的定义、周期函数的定义等知识点；

2. (1) 所给函数 $D(x)$ 称为 Dirichlet 函数，由讨论可见，任意一个有理数均为此函数的周期，即此函数虽为周期函数，但并不像我们在初等数学中见过的(如 $\sin x$)具最小正周期的周期函数，$D(x)$ 无最小正周期；(2) 中所给函数称为 Riemann 函数，由互质整数的性质，证明了 $R(x)$ 是以 1 为周期的函数，且可以看出 1 是 $R(x)$ 的最小正周期. $D(x)$ 与 $R(x)$ 虽定义于 $(-\infty, +\infty)$，但由其定义(对应规则)可见，二者的图像均不能画出. 这是因为有理点的稠密性所导致的，以后会经常用到这两个函数；

3. 在(3)中所给函数的讨论中，关键是由取整函数的定义，推出 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有 $x+1$ 介于两相邻整数$[x]+1$与$[x]+2$之间，从而知道$[x+1]=[x]+1$(不超过 $x+1$ 的最大整数). 由此可推得，$\forall k \in \mathbf{Z}^+$，$[x+k]=[x]+k$. 同理，可有 $\forall k \in \mathbf{Z}-$，$[x+k]=[x]+k$. 即 $\forall$ 整数 k，$[x+k]=[x]+k$，此结果在取整时常用到，但此性质对非整数 α 不成立. 即一般地，$[x+\alpha] \neq [x]+[\alpha]$. 例

$$[1.8+0.2]=2 \neq [1.8]+[0.2]=1.$$

例 1-3 下列函数能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，如果能，指出其定义域与值域.

(1) $f(x)=2^x, \varphi(x)=x^2$

(2) $f(x)=\ln x, \varphi(x)=1-x^2$

(3) $f(x)=x^2+x^3, \varphi(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$

(4) $f(x)=x^2\ln(1+x), \varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$

解 设 $f(x)$ 的定义域为 X，$\varphi(x)$ 的值域为 X_1，则仅当 $X_1 \cap X \neq \varnothing$ 时，$f[\varphi(x)]$ 有意义.

(1) 因为 $f(x)=2^x$ 的定义域为 $X=(-\infty, +\infty)$，

$\varphi(x)$ 的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)\subset(-\infty,+\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)]=2^{\varphi(x)}=2^{x^2}$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$，其值域为 $[1,+\infty)$；

(2) 因为 $f(x)=\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$\varphi(x)=1-x^2$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,1]$，且仅当 $x\in(-1,1)$ 时，$\varphi(x)\in(0,1]\subset(0,+\infty)$，即当 $x\in(-1,1)$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]=\ln(1-x^2)$ 有意义，其定义域为 $(-1,1)$，值域为 $(-\infty,0]$；

(3) 因为 $f(x)=x^2+x^3$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ -1 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,1\}\subset(-\infty,+\infty)$. 故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有意义，且

$$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)+\varphi^3(x)=\begin{cases}2 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{0,2\}$.

(4) 因为 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$. $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)\subset(-1,+\infty)$，故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且

$$\begin{aligned}f[\varphi(x)]&=\varphi^2(x)\ln(1+\varphi(x))=\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\\&=\mathrm{e}^{-2x}[\ln(1+\mathrm{e}^{x})-x]\end{aligned}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$（只要注意在 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ 中，$\mathrm{e}^{-2x}>0,\mathrm{e}^{-x}>0$）.

注 1. 本题用到函数的有关概念（对应规则，定义域，值域）、复合函数的有关概念等知识点；

2. 由本题可见，若 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，$\varphi(x)$ 的定义域为 X'，值域为 X_1，则仅当 $X_1\cap X\neq\varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，且当 $X_1\subseteq X$ 时，$f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $\varphi(x)$ 的定义域 X'，其值域 $\subseteq Y$；当 $X_1\nsubseteq X$，但 $X_1\cap X\neq\varnothing$ 时，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是被 $X_1\cap X$ 所对应的，本例中的(2)即为此种情形；

3. 对任给的两个函数 $f(x)$、$\varphi(x)$，复合函数 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是否有意义，应首先注意二者的定义域、值域间的关系. 依本题所给思路进行考查. 即不是任何两个函数都可以构成复合函数的. 例：

$$f(x)=\frac{1}{x(1-x)}\text{，其定义域为 } x\neq 0,1.$$

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}\text{，其值域为 } \{0,1\}.$$

所以复合函数 $f[D(x)]$ 是没有意义的.

但是，当 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 时，无论 $\varphi(x)$ 的值域如何，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 总是有意义的. 特别地，$\varphi(x)=f(x)$ 时，任意次复合 $f\underbrace{[f\cdots f(f(x))\cdots]}_{n\text{ 重}}\triangleq f^n(x)$ 均有意义. 若 $f(x)$ 的值域也为 $(-\infty,+\infty)$，函数 f 则常被称为 $R=(-\infty,+\infty)$ 上的自映射. 在 R 上的自映射中，研究方程 $f^n(x)=x$ 的解是有意义的，此方程的解即是经过 f 的连续 n 次映射后成为自身的那种点 x. 常称这种点 x_0 为映射 f 的 n-周期点.

例 1-4 设$f(x)=\begin{cases}1+x & 当 x\leqslant 0\\ x & 当 x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x & 当 x\leqslant 0\\ -x^2 & 当 x>0\end{cases}$，求$f(g(x))$，$g(f(x))$.

解 为求$f(g(x))$，首先注意$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且$g(x)$的值域为$(-\infty,0]\subset(-\infty,+\infty)$，于是有

$$f(g(x))=\begin{cases}1+g(x) & 当 g(x)\leqslant 0\\ g(x) & 当 g(x)>0\end{cases}$$

而$g(x)\ngtr 0$. 所以

$$f(g(x))=1+g(x)=\begin{cases}1+x & 当 x\leqslant 0\\ 1-x^2 & 当 x>0\end{cases}$$

为求$g(f(x))$，注意$g(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$，且因为

$$f(x)=\begin{cases}1+x\leqslant 0 & 当 x\leqslant -1\\ 1+x>0 & 当 -1<x\leqslant 0\\ x>0 & 当 x>0\end{cases}$$

由$g(x)$的定义得

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x) & 当 f(x)\leqslant 0\\ -(f(x))^2 & 当 f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1+x & 当 x\leqslant -1\\ -(1+x)^2 & 当 -1<x\leqslant 0\\ -x^2 & 当 x>0\end{cases}$$

注 1. 本题用到分段函数概念及复合函数概念；

2. 由本题可见，两个分段函数进行复合时，特别应注意前一个分段函数的分段定义域与另一个的分段值域之间的关系. 例为求$f(g(x))$，注意到$x\in(-\infty,+\infty)$，$g(x)\ngtr 0$，而在$f(x)$定义中，当$x\leqslant 0$时，$f(x)=1+x$，故得到$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(g(x))=1+g(x)$；

而为求$g(f(x))$，由于在$g(x)$定义中，$x>0$与$x\leqslant 0$分别具有不同表达式，故对$f(x)$的值域应以0为界进行划分. 即分$f(x)>0$与$f(x)\leqslant 0$. 对应地，将$f(x)$的表达式写为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & 当 x\leqslant -1\\ 1+x & 当 -1<x\leqslant 0\\ x & 当 x>0\end{cases}$$

这是分段函数进行复合时的一般思路.

例 1-5 在所给条件下，求$f(x)$：

(1) 如果$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}\quad(x\neq 0)$

(2) 如果$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$

(3) $f(\frac{1-x}{x+1})=x\quad(x\neq -1)$

解 由复合函数的概念，所给条件均可视为函数f与某已知函数g的复合结果.

(1) 令$x+\frac{1}{x}=g(x)=t$，$x\neq 0$.

因为

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以 $f(t)=t^2-2, t\in(-\infty,+\infty)$ 为所求.

(2) 令 $\frac{1}{x}=g(x)=t, x>0$.

因为
$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t>0$$

所以，$f(t)=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t>0$ 即为所求.

(3) 令 $\frac{1-x}{x+1}=g(x)=t\ (x\neq -1)$

则

$$xt+t+x-1=0\Rightarrow x(t+1)+(t-1)=0,\ x=\frac{1-t}{t+1}$$

所以 $f(t)=\frac{1-t}{t+1}\ (t\neq -1)$ 即为所求.

注 1. 本题用到复合函数、函数概念；

2. 本题所用方法是此类问题的一般方法，题中条件均为 $f(g(x))$、$g(x)$ 已知的条件下，要求 $f(x)$. 作法为用 $t=g(x)$ 表出 $f(g(x))$，其实即是由 $t=g(x)$ 求出其反函数 $x=g^{-1}(t)$，然后代入 $f(g(x))$ 即可. 不过在(1)中，并不需求出 $x=g^{-1}(t)$，而用初等关系得到 $t^2=f(g(x))+2$，进而得到结果；在(2)中易于见得 $x=g^{-1}(t)=\frac{1}{t}\ (x>0\Leftrightarrow t>0)$，代入 $f(g(x))$ 即得结果；在(3)中，也是通过求得 $x=g^{-1}(t)$ 解决问题的；

3. 在(3)中，由条件 $f(g(x))=x$ 求得的 f 正好是 g 本身. 即顺便看到 $y=\frac{1-x}{x+1}(x\neq -1)$ 的反函数即为其本身. 对此，我们可指出，更一般的结果是：在 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (x\neq -\frac{d}{c}; ad-bc\neq 0)$ 中，当 $a=-d$ 时，其反函数即为该函数本身.

例 1-6 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$ (2) $y=\sin x,\ x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$

(3) $y=x^2, x\in(-\infty,0]$ (4) $y=\begin{cases}x & \text{当 } x\in(-\infty,1)\\ x^2 & \text{当 } x\in[1,4]\\ 2^x & \text{当 } x\in(4,+\infty)\end{cases}$

解 设 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，如果 $f:X\to Y$ 是一一对应，则 $f(x)$ 的反函数在 Y 上存在：$f^{-1}:Y\to X$. 同时注意，若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 $f:X\to Y$ 必为一一对应.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$，其值域为 $[0,1]$，注意曲线 $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$ 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 上当 $x\in[-1,0]$ 时的一段弧，故易知其在该区间上单调增，所以其在该区间上的反函数存在，又由该区间可得：$x=-\sqrt{1-y^2}, y\in[0,1]$，即以 x 表自变量，y 表因变量，所求反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1]$$

(2) 首先注意在 $[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$ 上，$y=\sin x$ 严格单调减，且值域为 $[-1,1]$，故反函数于

$[-1,1]$ 上存在. 又当 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时,$\pi-x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$,且函数 $y=\sin x$ 的反函数为

$$x=\arcsin y, y\in[-1,1]$$

$$\therefore\quad \pi-x=\pi-\arcsin y,\quad y\in[-1,1]$$

令 $\pi-x=t$,则 $t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$,且 $t=\pi-\arcsin y, y\in[-1,1]$,故以 x 表自变量,y 表因变量,所求反函数为

$$y=\pi-\arcsin x, x\in[-1,1]$$

(3) 因为函数 $y=x^2$ 于 $(-\infty,0]$ 上严格单调减,值域为 $[0,+\infty)$,故反函数于 $[0,+\infty)$ 上存在,且由 $x\in(-\infty,0]$ 得

$$x=-\sqrt{y},\qquad y\in[0,+\infty)$$

用 x 表自变量,y 表因变量,得所求反函数为

$$y=-\sqrt{x},\qquad x\in[0,+\infty)$$

(4) 因为所给函数为分段函数,且在每段上严格单调增,值域为 $(-\infty,+\infty)$,故于 $(-\infty,+\infty)$ 上存在反函数,由各段反函数的存在性可得

$$x=\begin{cases} y & \text{当 } y\in(-\infty,1) \\ \sqrt{y} & \text{当 } y\in[1,16] \\ \log_2 y & \text{当 } y\in(16,+\infty) \end{cases}$$

以 x 表自变量,y 表因变量,所求反函数为

$$y=\begin{cases} x & \text{当 } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x} & \text{当 } x\in[1,16] \\ \log_2 x & \text{当 } x\in(16,+\infty) \end{cases}$$

注 1. 本题用到反函数存在定理、基本初等函数反函数等知识点;

2. 求反函数时应注意,在确定反函数存在的前提下,即先从方程 $y=f(x)$ 中解得 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$,再将此式中的自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,并注意 $y=f(x)$ 的值域即为所求反函数的定义域,即可得所求结果.

例 1-7 设 $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1)$

(1) 求一个偶函数 $F(x), x\in(-1,1)$,使得当 $x\in[0,1)$ 时,$F(x)=f(x)$;

(2) 求一个以 1 为周期的函数 $F(x), x\in(-\infty,+\infty)$,使得当 $x\in[0,1)$ 时,$F(x)=f(x)$.

解 (1) 按要求,$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x\in[0,1) \\ f_1(x) & \text{当 } x\in(-1,0) \end{cases}$,且 $F(x)=F(-x)$.

即 $\forall\, x\in(-1,0)$,应有

$$f_1(x)=f(-x)=\sqrt{-x}=\sqrt{|x|}$$

故可得 $F(x)=\sqrt{|x|}, x\in(-1,1)$. 此即所求的偶函数.

(2) 由条件,$F(x)$ 以 1 为周期,则将以任意整数为周期,所以,$\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$,由 $x=x-[x]+[x]$,应有 $F(x)=F((x-[x])+[x])$,由 $[x]$ 的定义,$x-[x]\in[0,1)$,

所以 $F(x)=F((x-[x])+[x])=F(x-[x])=f(x-[x])=\sqrt{x-[x]}$

即 $F(x)=\sqrt{x-[x]}, x\in(-\infty,+\infty)$,即为所求.

注 1. 本题用到偶函数、周期函数、取整函数的定义及性质等知识点;

2. 本题所进行的过程常称为对已给函数 $f(x)$ 的延拓(开拓),即扩大原来函数的定义域,使之在新的定义域内具有某种性质,而在原来定义范围内是 $f(x)$ 本身. 函数延拓的概念及方法是十分重要的内容,在今后许多方面都有重要应用.

例 1-8 设 $f:X\to Y, g:Y\to X$. 证明:

(1) 若 $g(f(x))=x\ (\forall x\in X)$,则 $f:X\to Y$ 为单射,$g:Y\to X$ 为满射;

(2) 若 $\forall x\in X, g(f(x))=x$,且 $\forall y\in Y, f(g(y))=y$,则 f 与 g 互为反函数.

证 (1) 由单射定义,只要证明 $\forall x_1,x_2\in X$,若 $x_1\neq x_2$,必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

现假定不然,即 $\exists x_1,x_2\in X$,虽有 $x_1\neq x_2$,但 $f(x_1)=f(x_2)$. 注意 $g:Y\to X$ 的定义域为 Y,且 $\forall x\in X$,有 $g(f(x))=x$,故对 $x_1,x_2\in X$,存在 $y_1,y_2\in Y$,使得

$$f(x_1)=y_1,\quad f(x_2)=y_2$$

且

$$g(f(x_1))=g(y_1)=x_1,\quad g(f(x_2))=g(y_2)=x_2$$

由假定,$f(x_1)=f(x_2)$,应有

$$g(y_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=g(y_2)=x_2$$

即 $x_1=x_2$. 矛盾. 故 $f:x_1=X\to Y$ 为单射.

为证 $g:Y\to X$ 为满射,只要证明 $\{g(y)\mid y\in Y\}=X$(即 X 为 $g:Y\to X$ 的值域). 首先注意 $\{g(y)\mid y\in Y\}\subseteq X$. 且因为 $\forall x\in X, g(f(x))=x$. 即 $\forall x\in X, \exists y\in Y$,使得 $g(y)=x$,即 $X\subseteq\{g(y)\mid y\in Y\}$,所以 $\{g(y)\mid y\in Y\}=X$. 即 $g:Y\to X$ 为满射.

(2) 在所给条件下,由(1)的结论知,$f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$ 二者既是单射,又是满射,即均为一一对应,故二者均存在反函数. 为证明 g 为 f 的反函数,注意在所给条件下,f 的定义域、值域恰是 g 的值域及定义域,由反函数的定义,只要证明,$\forall y\in Y$,方程

$$f(x)=y \text{ 在 } X \text{ 上存在唯一解.}$$

由 $f:X\to Y$ 为单射,故方程 $f(x)=y$ 若有解,则必唯一. 同时因为 $\forall y\in Y$,有 $f(g(y))=y$. 即 $g(y)$ 是方程 $f(x)=y$ 的唯一解. 记之为 $x:x=g(y), y\in Y$. 即 $g:Y\to X$ 是 $f:X\to Y$ 的反函数,同理可证 $f:X\to Y$ 是 $g:Y\to X$ 的反函数. 证毕.

注 1. 本题用到单射、满射、双射(一一对应)及反函数有关概念等知识点;

2. 注意在本题(1)的条件下,只能推出 $f:X\to Y$ 为单射,$g:Y\to X$ 为满射的结论,而不能推出

$f:X\to Y$(或 $g:Y\to X$)是单且满的映射,即不能推出 $f(x)$ 与 $g(y)$ 任一个之反函数的存在性.

例 取 $X=[0,1], Y=[-1,1]$,

f 为对 $x\in X$ 取算术平方根:$f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1]$,

g 为对 $y\in Y$ 取其平方:$g(y)=y^2, y\in[-1,1]$.

则 $f:[0,1]\to[-1,1]$,定义域为 X,值域 $\{f(x)\mid x\in[0,1]\}=[0,1]\subset Y$. 即 f 为单射,但不是满射;