科学版

研究生教学丛书

应用泛函分析

门少平　封建湖　编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

应用泛函分析

门少平 封建湖 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了泛函分析的基础理论知识及其在许多不同领域中的应用.全书共分9章,包括基础知识,度量空间理论,赋范线性空间与有界线性算子理论,Banach空间的基本理论与主要定理,内积空间与Hilbert空间的理论等.本书基本概念清晰准确,理论分析科学严谨,语言叙述通俗易懂,结构编排由浅入深,注重启发性.书中编写了大量的例题以帮助读者理解、掌握泛函分析的基本思想和基本方法;各章节都配有一定数量的习题供读者练习之用;最后,本书还给出大部分习题的解答以供读者检查自己的学习和知识掌握情况.

本书适用于高等院校工科专业的硕士、博士研究生,数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生,从事科学研究的广大科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/门少平,封建湖编著.—北京:科学出版社,2005
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 7-03-014977-7

Ⅰ.应… Ⅱ.①门… ②封… Ⅲ.泛函分析-研究生-教学参考资料
Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第014163号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:陈丽珠
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年7月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—3 000 字数:247 000

定价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　　言

泛函分析是一门研究探讨不同领域问题本质和共性的学科. 它起源于经典分析,是数学的一个抽象分支.

20世纪初期,随着线性常微分方程和偏微分方程、变分学、逼近论,特别是线性积分方程等学科理论的发展及大量研究结果的涌现,数学家们逐渐意识到:在各种看似毫不相干的领域中,许多结果往往具有类似的特征和性质. 通过去伪存真、仔细研究与提炼,人们获得了处理这些问题的一些有效且统一的途径.

抽象地处理问题,虽然有不直观的一面,但优越性也是易见的:它把握住了事物最本质的内容,使研究者的观察免受非本质细节的干扰,从而对问题看得更深入、更清晰. 同时,由于所得的结果反映了这些事物的本质和共性,所以它又可以应用到大量不同的领域中去. 正是由于这些优点,才使得泛函分析成为许多应用学科进行科学研究的必备知识和有力助手.

虽然泛函分析是一种抽象课程,但它的理论仍来自于各种具体模型. 本教材通过大量例题说明,用泛函分析的观点思考问题,就会发现许多毫不相干的领域其实有着许多本质的联系. 这启发人们在研究某些陌生问题时,应设法把它与熟悉的领域联系起来,并从后者的研究方法和结果中得到启迪和线索.

泛函分析课程的内容是相当丰富的. 在假定读者已具备高等数学、线性代数以及集合论等方面的数学基础知识的前提下,本书力争在有限的课时内给读者树立起泛函分析的基本概念,并掌握泛函分析理论的核心内容,如三大空间(度量空间、赋范空间、内积空间)和算子概念,以及线性泛函分析的"四大定理"(延拓定理、逆算子定理、闭图像定理、共鸣定理)等. 为方便读者自学,书中大部分习题都给出了解答;同时,为了重点突出,有一些地方被处理成选读内容而打了"*"号,请读者课外选择阅读.

最后,我们还要指出:将抽象方法应用于具体情况,并体会出抽象方法的功效,这并不比当初提炼这些抽象方法容易,因为随情况不同,方法是十分多变的. 特别是读者要将泛函分析的抽象理论应用于自己所面对的问题,更不是一件简单直观的事情,它不仅要求研究者具有灵活的思维和丰富扎实的专业知识,而且还需要付出艰苦不懈的科研毅力.

本书是在为工科研究生和高年级本科生讲授的"泛函分析"课程讲义的基础上整理形成的. 在出版之前,作者曾经在西北工业大学工科研究生"泛函分析"课程中多次试用,得到了1999级～2003级学生们的许多帮助,作者在此表示衷心感谢.

本书第1、2章由封建湖编写,第3～9章由门少平编写,西北工业大学数学与信息科学系刘哲、崔学伟、张慧清等三位教师参加了部分习题的编写工作,最后由

门少平统一定稿.

西北大学理学院王成堂教授、西安交通大学理学院马逸尘教授、西北工业大学理学院钮鹏程教授仔细审阅了书稿，提出了许多宝贵的意见.西北工业大学数学与信息科学系、西北工业大学教务处和科学出版社的有关同志对本书的出版给予了极大的支持，我们深表感谢.正是由于有了各方面的共同努力，才使本书得以完成.

尽管对书中进行了多次修改，难免还有疏漏和错误之处，敬请有关专家和读者不吝赐教.

编 者

目　录

第 1 章　基础知识

1.1 集　合

1.1.1 集合的几个概念

1. 集合及其运算

首先列出本书中常用的记号及集合运算的有关结论.

$\varnothing$:空集.

"$\in$"和"$\notin$":"属于"和"不属于".表元素与集合的关系.例如:$a\in A$(读作"a 属于A")表示 a 是集合A 的元素,$a\notin A$(读作"a 不属于A")表示 a 不是集合A 的元素.

"$\subset$"和"$\not\subset$":"包含于"和"不包含于".表集合与集合的关系.例如:$A\subset B$(读作"A 包含于B")表示 A 是B 的**子集**,即 A 的每个元素也是B 的元素,也记作 $B\supset A$(读作"B 包含A").$A\not\subset B$(读作"A 不包含于B")表示 A 不是B 的**子集**,即 A 至少有一个不属于B 的元素.

"$\exists$"、"$\exists!$"和"$\nexists$":"存在"、"存在惟一"和"不存在".

结论:$\varnothing$是任何集合的子集.

$A=B$:集 A 与B **相等**(二集由完全相同元素组成.或者说:二集互相包含).

$A\neq B$:集合 A 与集合B **不等**(有元素,它只属于两集之中的某一个集).

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$:A 与B 的**并集**(由 A,B 的全体元素所组成的集).

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$:A 与B 的**交集**(由 A,B 的共同元素所组成的集).

$A\cap B=\varnothing$:A 与B 不相交(二集无公共元素).

$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$:A 与B 的**差集**(由 A 中不属于B 的元素所成的集).

$A^c=X-A$:A 在X 中的**余集**.

集合运算有以下结论(证明略).

(1) $A\cup A=A,A\cap A=A$.

(2) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=$

$A\cap B\cap C$.

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$.

(6) $A\cup B\supset A$, $A\cup B\supset B$.

(7) $(A^c)^c=A$, $X^c=\varnothing$, $\varnothing^c=X$.

(8) (De Morgan 法则) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$, $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$.

Cartesian 乘积(或笛卡儿乘积)概念: 设 X 与 Y 是两个非空集合,由所有序对 (x,y)(其中: $x\in X$, $y\in Y$)所成的集,称为 X 与 Y 的 **Cartesian 乘积**,记为 $X\times Y$.

2. 集合的势,可数集与不可数集

设 A 是一个集合, A 中元素的个数,称为 A 的**势**. 如果 A 的势是有限数,则称 A 为**有限集**;如果 A 的势不是有限数,则称 A 为**无限集**.

由于$\varnothing$的势为 0,所以$\varnothing$是有限集.

若两个集合的元能建立一一对应的关系,则认为这两个集合的元是一样多的,或者说,它们的势相等. 特别,若 A 能与**正整数集**(也称"**自然数集**")一一对应,或者说,**A 的元**(按对应的自然数的顺序)**可用一个排列形式全部列出**,则称 A 为**可列集**或**可数集**;非可数的无限集,称为**不可列集**或**不可数集**.

若 A 的势不超过可数集的势,就称 A 为**至多可数集**. 显然,**可数集的子集是至多可数集**.

任意两个可数集,因它们各自都能与自然数集建立一一对应关系,故它们之间也能建立起元素的一一对应关系. 所以说,可数集所含的元素是一样多的.

自然数集本身是一个可数集. 此外,我们再给出一个重要的命题.

定理 1.1.1 有理数集 Q 是一个可数集.

证 为证 Q 是可数集,只需举出一个能将有理数全部列出的数列即可. 下面,我们给出全体非负有理数的一种排列方法,然后通过正负相间,便可得到一个由全体有理数组成的数列.

任何一个非负有理数 r,都可惟一表为一个既约分数$\dfrac{p}{q}$的形式,称 $p+q$ 为 r 的权. 比如,权为 1 的有理数只有 $0=\dfrac{0}{1}$,权为 2 的有理数只有 $1=\dfrac{1}{1}$,但权为 3 的有理数有 $0.5=\dfrac{1}{2}$和 $2=\dfrac{2}{1}$,$\cdots$. 显然,权相等的有理数是有限多的.

对任何两个非负的有理数 r,s,将其中权小的数排在权大的数前面;如果有理数 r,s 的权相等,将其中分子小的数排在分子大的数前面. 按照这种方法,就可将

非负有理数全体用数列的形式表出.□

我们给出可数集的下述性质.

定理 1.1.2 若 A,B 是两个可数集,则 $A\cup B$ 和 $A\times B$ 都是可数集.

证 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,考虑排列:$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots$,去掉其中重复的元素,就得到了 $A\cup B$ 的一个排列,所以 $A\cup B$是可数集.

设 $r=(a_m,b_n)$是 $A\times B$ 元,称 $m+n$ 为r 的权.显然,权相等的元在 $A\times B$ 中是有限多的.对 $A\times B$ 中任两个元r,s,将其中权小的元排在权大的前面;如果 r 与s 的权相等,就按 A 的排法,将 r 与s 中第一分量靠前的元排在另一元的前面.由此就可将 $A\times B$ 中元用排列的形式表出,所以 $A\times B$ 是可数集.□

设 A 是任一集合.由 A 的所有子集所组成的集,称为是 A 的**幂集**,记为 2^A.例如,若 $A=\{1,2\}$,则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.**$A$ 的势小于 2^A 的势(即 A 只能与 2^A 的一个真子集建立一一对应关系,但不能与 2^A 建立一一对应关系)**,此结论对 A 为无限集时也成立(其证明可在集合论方面的专著中查找).进而对无限集,虽然它们的势都不是有限正整数,但不能因此认为它们的势都相等.

特别,我们证明以下定理.

定理 1.1.3 开区间$(0,1)$是不可数集.

证 首先,对$\forall x\in(0,1)$,则 x 可能是有限纯小数、也可能是无限循环或不循环的纯小数.对有限纯小数,将它改写为以 9 为循环节的无限循环小数形式.例如,将 0.5 表成 $0.499\cdots$.这样,对任何 $x\in(0,1)$,x 都可惟一地表成无限循环或不循环纯小数“$0.r_1r_2\cdots r_n\cdots$”的形式,其中整数 r_n 不全为 9(否则 $x=1\notin(0,1)$),并且有无限多个 r_n 不为 0.

若$(0,1)$中的数可用某个数列形式全部排出,设为数列 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,其中,

$$x_1=0.r_1^1r_2^1\cdots r_n^1\cdots,\quad x_2=0.r_1^2r_2^2\cdots r_n^2\cdots,\quad \cdots,\quad x_n=0.r_1^nr_2^n\cdots r_n^n\cdots,\quad \cdots.$$

然而我们下面可证明有 $x\in(0,1)$,但 x 不在数列A 中,从而与 A 是$(0,1)$中全部数的排列的假设矛盾,这便证明了$(0,1)$中的数是无法用数列形式全部排出的.

若 $r_i^i\neq5$,取 $r_i=5$;若 $r_i^i=5$,取 $r_i=6(i=1,2,\cdots)$,再令 $x=0.r_1r_2\cdots r_n\cdots$.显然 $x\in(0,1)$,但不与$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$中任何数相等,故 x 不在A 中.□

任何无限集都含有可数子集,从这个意义上说,可数集是势最小的无限集.特别,若把可数集的势记为$\aleph_0$、开区间$(0,1)$的势记为$\aleph$,则由定理 1.1.3,知有$\aleph_0<\aleph$.

由定理 1.1.1~定理 1.1.3,便可知在开区间$(0,1)$中,无理数点不但存在,而且比有理数点要多得多.这是一个不能靠直观想像、而只能用严格论证才能得到的

结论.

1.1.2　实数集

1. 实数集上的距离、实数集的完备性以及实数集的其它重要性质

记 $\mathbf{R}^1$ 为实数集.对 $\mathbf{R}^1$ 中的任意两个数 x,y,称 $d(x,y)=|x-y|$ 为 x 与 y 之间的距离.显然 $\mathbf{R}^1$ 上的距离 d 满足以下性质:

① $\forall x,y\in\mathbf{R}^1$,都有 $d(x,y)\geqslant 0$,且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$(称为"**非负性**");

② $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}^1$(称为"**三角不等式**").

设$\{x_n\}$是一数列,若有 $x\in\mathbf{R}^1$,使得当 $n\to\infty$ 时,有 $|x_n-x|\to 0$,则称$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中一个**收敛列**,并称 x 为$\{x_n\}$的**极限**,记为 $x_n\to x$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

设$\{x_n\}$是一数列,若它具有如下性质:

"对任意 $\varepsilon>0$,都存在 $N=N(\varepsilon)$,当 $m,n>N$ 时,恒有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$ 成立."则称$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的**基本列**或**柯西**(Cauchy)列.

定义 1.1.1　设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 的子集,若 A 中任意的基本列都在 A 中有极限,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 的一个**完备子集**.□

例如,闭区间$[0,1]$是 $\mathbf{R}^1$ 中一完备子集,而开区间$(0,1)$不是 $\mathbf{R}^1$ 中的完备子集,因为$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$是$(0,1)$中的基本列,但它的极限 0 不在$(0,1)$中.

特别,实数集本身是 $\mathbf{R}^1$ 中的完备子集,这就是下面的定理.

定理 1.1.4(柯西收敛准则)　若$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中基本列,则$\{x_n\}$在 $\mathbf{R}^1$ 中收敛.□

定理 1.1.4 指出了实数集的一个重要性质,这个性质称为**实数集的完备性**.

定义 1.1.2　设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 的子集.若有常数 $M>0$,使得 A 中的任意数 x 到 0 的距离 $|x-0|=|x|$ 都不大于 M,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 的**有界子集**;若存在 $x\in\mathbf{R}^1$,且存在 A 中数列$\{x_n\}$($x_n\neq x$),使得 $x_n\to x$,则称 x 为 A 的**聚点**;若 A 包含它的所有聚点,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 中一个**闭集**;若 A 的任意数列中都含有基本子列,则称 A 为**致密集**;若 A 是一个完备的致密集,则称 A 为**紧集**.**规定任意有限集都是紧集**.□

显然,若 A 是紧集,则 A 中任意序列都存在在 A 中收敛的子列.

我们已经熟知一些常见的致密集和紧集的例子.比如,闭区间$[0,1]$和开区间$(0,1)$都是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界集,并都是致密集;因$[0,1]$是完备集,故它也是紧集.

定理 1.1.5　$\mathbf{R}^1$ 中任意有界集都是致密集,而有界闭集都是紧集.

证　只考虑无限集情况,且只证前半命题.设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 中一有界无限集,$\{x_n\}$是 A 中任取的数列,则由 A 的有界性,有有界区间$[-M,M]$,使$\{x_n\}\subset[-M,M]$.将$[-M,M]$平分为两个小区间$[-M,0]$和$[0,M]$,因$\{x_n\}$是无限

集,必有其中一个小区间(记为$[a_1,b_1]$)含有$\{x_n\}$中无限多个数,在$[a_1,b_1]\cap\{x_n\}$中取定一个数,记为x_{11};再将$[a_1,b_1]$平分为两个小区间,仍由于$\{x_n\}$是无限集,必有一个小区间(记为$[a_2,b_2]$)含有$\{x_n\}$中无限多个数,在$[a_2,b_2]\cap\{x_n\}$中取定一个排在x_{11}后面的数,记为x_{12};…. 以这种方法,我们得到$\{x_n\}$中一个子列$\{x_{1n}\}$及一组区间$[a_n,b_n]$,满足:

(1) 区间长度 $b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}M\to 0$;

(2) 当 $m>n$ 时,有 $x_{1m}\in[a_n,b_n]$.

由(1),可知对任意 $\varepsilon>0$,都存在 N,使得 $b_N-a_N<\varepsilon$;由(2),便知当 $m,n>N$时,有$|x_{1n}-x_{1m}|\leqslant b_N-a_N<\varepsilon$. 这说明$\{x_{1n}\}$是$\{x_n\}$中一个基本列,故由定义,得知 A 是致密集.□

用上面定理证明中使用的方法以及实数集的完备性,能证得在 $\mathbf{R}^1$ 中成立着下面的闭区间套定理.

定理 1.1.6(闭区间套定理) 设$[a_n,b_n]$是 $\mathbf{R}^1$ 中一列闭区间,满足下列条件:

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n-a_n|=0$.

则存在惟一的 $x\in\mathbf{R}^1$,使得$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{x\}$.□

2. 实数集的稠密子集

定义 1.1.3 设M,A是 $\mathbf{R}^1$ 中任意两个子集. 如果对任意 $x\in M$,及任意 $\delta>0$,都存在 $y\in A$,使得不等式$|y-x|<\delta$ 成立,则称 A 在M 中**稠密**. 特别,如果 A 在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 的一个**稠密子集**.□

定义 1.1.3 的一个等价说法是:若 A 在M 中稠密,则对 M 中任一取定的实数x,及 $\delta>0$,在该 x 的**δ-邻域**$O(x,\delta)=\{y\in\mathbf{R}^1:|y-x|<\delta\}$中,都含有 A 中的数.

定理 1.1.7 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}^1$ 中的一个稠密子集(由此也可知 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 的任一集合 M 中都稠密).

证 对 $\mathbf{R}^1$ 中任取定的 x,有整数 n,使 $x\in[n,n+1]$. 考虑 x 的任一δ-邻域$O(x,\delta)$,它是一个 x 为中心、长 2δ 的开区间. 显然有整数 m,使$\frac{1}{m}<\delta$. 将闭区间$[n,n+1]$作 m 等分,则分点 $n+\frac{i}{m}(i=0,1,\cdots,m)$ 都是有理数. 由于相邻分点的距离为$\frac{1}{m}<\delta$,故必有分点含于 $O(x,\delta)$中,从而在 x 的任意邻域中,都含有有理数.□

3. 实数子集的上确界和下确界

设 M 是 $\mathbf{R}^1$ 中的子集,若有 $b\in\mathbf{R}^1$,使对一切 $x\in M$,都有 $x\leqslant b$,则称 b 为实数集 M 的一个**上界**;M 的最小上界称为 M 的**上确界**,记为 $\sup M$. 类似地,若有 $a\in\mathbf{R}^1$,使对一切 $x\in M$,都有 $x\geqslant a$,则称 a 为实数集 M 的一个**下界**;M 的最大下界称为 M 的下确界,记为 $\inf M$.

例 1.1.1 设 $M_1=\left\{3-\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\right\}$,$M_2=(-1,4)$,$M_3=[-1,+\infty]$,即 M_1 是数列,M_2,M_3 分别是有界和无界区间. 则 $\inf M_1=2$,$\sup M_1=3$;$\inf M_2=-1$,$\sup M_2=4$;$\inf M_3=-1$,$\sup M_3=+\infty$.

可以看到,数集的上确界与数集中的最大数是不同的概念. 数集中若有最大数,则它一定是该集的上确界,但反之并不成立. 比如上例中,M_1 的上确界是 3,但最大数却不存在.

定理 1.1.8 $r=\inf M$ 的充分必要条件是它满足下面两个条件:

(1) r 是实数集 M 的下界;

(2) 存在 $\{m_n\}\subset M$,使得 $m_n\to r$.

证 ($\Rightarrow$)只证 $r\neq-\infty$情况. r 显然是实数集 M 的下界. 又对 $\forall\,\varepsilon>0$,在开区间 $(r,r+\varepsilon)$ 中必有 M 中的数(否则 $r+\varepsilon$ 是 M 的下界,与 r 是最大下界的假设矛盾),于是当 $\varepsilon\to0$ 时,容易找到 $\{m_n\}\subset M$,满足 $m_n\to r$.

($\Leftarrow$)设 r 是实数集 M 的下界,且存在 $\{m_n\}\subset M$,使得 $m_n\to r$. 则对任意 $s>r$,s 都不可能是 M 的下界(由于 $m_n\to r$,故必有其中的点 m_n,满足 $m_n<s$),所以 r 是 M 的最大下界,即 $r=\inf M$. □

特别,如果 r 是实数集 M 的下界,且 $r\in M$,则取 $m_n\equiv r$,由定理 1.1.8,便知 r 是 M 的下确界,并且 r 也是 M 中的最小元. 上面的 M_1 和 M_3 就都是这样的集合.

同样,有"$r=\sup M\Leftrightarrow r$ 是 M 的上界,且存在 $\{m_n\}\subset M$,使 $m_n\to r$"成立.

定理 1.1.9 若数集 M 有有限下(上)界,则必有有限下(上)确界.

证 只证明下界命题. 设 $a>-\infty$是 M 的一个下界,在 M 中任取定一数 x_1,则 $a\leqslant x_1$. 若 $a=x_1$,则 a 就是 M 的下确界;若 $a<x_1$,考虑闭区间 $[a,x_1]$ 的中点 p,若 p 是 M 的下界,则令区间 $[m_1,n_1]=[p,x_1]$;若 p 不是 M 的下界,则有 $x_2\in M$,使得 $x_2<p$,此时令区间 $[m_1,n_1]=[a,p]$. 总之我们得到一个闭区间 $[m_1,n_1]$,它的长度是闭区间 $[a,x_1]$ 的一半,且左端点 m_1 是 M 的下界,右端点 n_1 不是 M 的下界. 同样,我们又可以得到闭区间 $[m_2,n_2]$,它的长度是闭区间 $[m_1,n_1]$ 的一半,且左端点 m_2 是 M 的下界,右端点 n_2 不是 M 的下界. 依次类

推,可得到一组闭区间$[m_k,n_k]$,$k=1,2,\cdots$,其左端点 m_k 是M 的下界,右端点 n_k 不是 M 的下界,且满足

(1) $[m_{k+1},n_{k+1}]\subset[m_k,n_k]$,$k=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}|m_k-n_k|=0$.

由闭区间套定理,存在惟一 $r\in\mathbf{R}^1$,使得$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[m_k,n_k]=\{r\}$.显然有$\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\lim\limits_{k\to\infty}n_k=r$.

由于 m_k 是M 的下界,及 $m_k\to r$,用反证法可首先证得 r 是M 的下界(留作习题).其次,由于 n_k 不是M 的下界,有 $x_k\in M$,使 $r\leqslant x_k<n_k$ 成立.令 $k\to\infty$,便得到 $x_k\to r$.据定理 1.1.8,便证得 r 是M 的下确界.□

下面的结论是明显的.

定理 1.1.10 若实数集 A,B 满足$A\subset B$,则

$$\inf B\leqslant\inf A\leqslant\sup A\leqslant\sup B.$$ □

习题 1.1

1. 证明集合运算的性质(1)~(8).
2. 证明开区间$(0,1)$与实数集 $\mathbf{R}^1$ 的势相等.
3. 设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上的单调函数,证明 f 的不连续点全体是至多可数集.
4. 设$\{A_n\}$中每个 A_n 都是可数集,证明 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 及$B=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 都是可数集.
5. 举例说明 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集不全是致密集.
6. 闭区间套定理中的闭区间序列能否换成一列开区间?
7. 证明$\sup\limits_{n\geqslant1}\left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}=1$.
8. 若 a_n 是实数集M 的下界,且 $a_n\to a$.证明 a 也是M 的下界.问:a 是否就是下确界?

9*. 若 $x\in A$ 满足条件:存在 x 的某个邻域$O(x,\delta)$,使得 $O(x,\delta)\subset A$,则称 x 为实数集 A 的一个内点.若实数集 A 的每个点都是A 的内点,则称 A 为一个开集.证明:开区间$(0,1)$是一个开集.

1.2 连续函数的性质及其黎曼积分

1.2.1 连续函数的性质

设 $f(t)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数,则 $f(t)$具有下述性质.

(1) **保号性**.若 $t_0\in\mathbf{R}^1$ 使得 $f(t_0)>0$,见图 1.1,则存在 $\delta>0$,使有 t_0 的邻域 $O(t_0,\delta)$,$\forall\, t\in O(t_0,\delta)$,都有

$$f(t)>0.$$

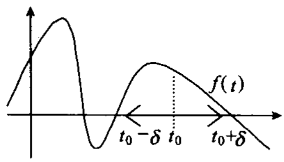

图 1.1

(2) **介值定理**. 设 M 是 $\mathbf{R}^1$ 中任一区间,若 c 满足 $\inf\limits_{t\in M} f(t)<c<\sup\limits_{t\in M} f(t)$,则存在 $t_0\in M$,使 $f(t_0)=c$.

(3) 对任意 $r\in\mathbf{R}^1$,记 $Er=\{t\in\mathbf{R}^1:f(t)>r\}$,则 Er 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开子集.

(4) 若 $f(t)$在闭区间$[a,b]$上连续,则存在 t_0, $\bar{t}_0\in[a,b]$,使得 $f(t_0)=\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$, $f(\bar{t}_0)=\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$成立.

我们只证明性质(3)和性质(4).

先证性质(3),根据习题 1.1 第 9 题,只需证 Er 中的点都是内点. $\forall\, t_0\in Er$,则有$f(t_0)>r$. 令 $h(t)=f(t)-r$,则 $h(t)$连续,且 $h(t_0)>0$. 由连续函数的保号性质,有 t_0 的邻域 $o(t_0,\delta)$,使得$\forall\, t\in o(t_0,\delta)$,都有 $h(t)>0$,进而可得 $O(t_0,\delta)\subset Er$,所以 t_0 是 Er 中的内点. 再由 $t_0\in Er$ 的任意性,便证得 Er 是开集.

再证性质(4). 设 $c=\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$,则存在$\{t_n\}\subset[a,b]$,使得

$$f(t_n)\to c, \tag{1.1}$$

由定理 1.1.5,$[a,b]$是紧集,故在$\{t_n\}$中有收敛子列(不妨设为它自己),且极限(设为 t_0) 属于$[a,b]$. 在(1.1)中令 $n\to\infty$,便得到 $f(t_0)=c$. 同理可证有 $\bar{t}_0\in[a,b]$,使 $f(\bar{t}_0)=\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$成立. □

性质(4)说明,有界闭区间上的连续函数能达到**最小值**和**最大值**,分别将它们记为 $\min\limits_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)$和 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)$.

1.2.2　连续函数序列的极限

设 $f(t)$和 $f_n(t)(n=1,2,\cdots)$都是$[a,b]$上的函数,若$\forall\, t\in[a,b]$及$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, N=N(\varepsilon,t)>0$,当 $n>N$ 时,有$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$,则称函数列 $f_n(t)$在$[a,b]$上**处处收敛**于 $f(t)$;若$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, N=N(\varepsilon)$(**$N$ 与 t 无关**)>0,当 $n>N$ 时,对$\forall\, t\in[a,b]$,有$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$,则称函数列 $f_n(t)$在$[a,b]$上**一致收敛**于函数 $f(t)$.

函数列的一致收敛在分析数学中是一个十分重要的概念,下面给出此方面的一些结论(有关证明可在"高等数学"或"数学分析"等书籍中查找),这些结论在本书后面的讨论中都有重要应用.

定理 1.2.1　若在$[a,b]$上函数列$\{f_n(t)\}$的每一项 $f_n(t)$都连续,且 $f_n(t)$一致收敛于 $f(t)$,则函数 $f(t)$也在$[a,b]$上连续. □

定理 1.2.2　若在$[a,b]$上函数列$\{f_n(t)\}$的各项 $f_n(t)$都连续可导,且$\{f_n(t)\}$收敛于 $f(t)$,$\{f'_n(t)\}$一致收敛于 $g(t)$,则 $f(t)$也在$[a,b]$上可导,且

$f'(t)=g(t)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_n(t)=g(t)=f'(t)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lim_{n\to\infty}f_n(t))\text{(即极限号与求导数号可以交换)}$$

又,此时$\{f_n(t)\}$在$[a,b]$上也是一致收敛于$f(t)$的. □

我们强调,定理1.2.1的条件不能减弱为处处收敛.

例1.2.1 令$f_n(t)=t^n$,则$f_n(t)$在$[0,1]$上处处收敛于函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{当}\ 0\leqslant t<1\ \text{时},\\ 1, & \text{当}\ t=1\ \text{时},\end{cases}$$

但$f(t)$在$[0,1]$上不连续.

1.2.3 黎曼积分

定义1.2.1 设$f(t)$是$[a,b]$上的函数.给$[a,b]$加入分点D:$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$,这些点将$[a,b]$分成了$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$);在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上取$\xi_i$和$\eta_i$,使$f(\xi_i)$和$f(\eta_i)$分别为$f(t)$在$[x_{i-1},x_i]$上的最大值和最小值,再令

$$\Lambda(D)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\qquad \lambda(D)=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)(x_i-x_{i-1}),$$

分别称$\Lambda(D)$和$\lambda(D)$为$f(t)$关于分法D的**达布大和**和**达布小和**;如果存在**有限实数**I,使得对任意分法D,只要分点越来越密、最长的小区间长度趋于0时,都有$\Lambda(D)\to I$及$\lambda(D)\to I$成立,则称$f(t)$在$[a,b]$上黎曼(Riemann)可积,并称I为$f(t)$在$[a,b]$上的黎曼积分,记为$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. □

上述积分过程可简单记忆为**分割、作和、求极限**.

$[a,b]$上的连续函数都是黎曼可积函数.非黎曼可积函数也是存在的.

例1.2.2 设

$$\pi(t)=\begin{cases}0,\text{当}\ t\ \text{是}[0,1]\ \text{中的无理数时},\\ 1,\text{当}\ t\ \text{是}[0,1]\ \text{中的有理数时},\end{cases}$$

则有$\Lambda(D)\equiv1$,$\lambda(D)\equiv0$,因此$\pi(t)$在$[0,1]$上不是黎曼可积函数.

定理1.2.3 若连续函数序列$\{f_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(t)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(t)\mathrm{d}t\text{(即积分号与极限号可以交换)},$$

且$\forall t\in[a,b]$,有