中国教坛名师力作

龙门题典

丛书主编 希扬

主编 王建民

高中数学

书山捷径 贵在选题

学海轻舟 重在解析

龍門書局

龙门题典

多种解法　立足于巧
指点辨误　思路新颖

高中作文　主编　孙济占
高中阅读　主编　何宝民
高中英语　主编　王树凯
高中数学　主编　王建民
高中物理　主编　吴万用
高中化学　主编　陆　禾

初中阅读　主编　曹增渝
初中英语　主编　王树凯
初中数学　主编　王建民
初中物理　主编　吴万用
初中化学　主编　陆　禾

小学数学　主编　顾　荣

(G-0312.0101)

责任编辑：陆珊年
封面设计：李绍刚　王　浩

ISBN 7-80111-390-X

9 787801 113900 >

ISBN 7-80111-390-X/G・312
定　价：35.20 元

龙门题典

高中数学

王建民　主编

王爱慈　刘继凤　关淑珍
吴晓林　汪惟葆　李公丹
赵维民　徐　延　阎达伟　编著
裘小强　潘凤易

龍門書局

1998

龙门题典

高中数学

王建民　主编

责任编辑　陆珊年

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地新华书店经销

*

1998年9月第一版　　开本：850×1168　1/32

1998年9月第一次印刷　　印张：33

印数：1—40 000　　字数：941 000

ISBN 7-80111-390-X/G・312

定价：35.20元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

跳出浩瀚题海　把握正确航向

——《龙门题典》丛书序

涉浅水者得鱼虾，潜深水者获蛟龙。

“鲤鱼跳龙门”，是吉祥的象征，是金榜题名的借代语。摆在读者面前的《龙门题典》，是一百多位特、高级教师和具有六十八年历史且享有盛誉的龙门书局共同奉献给广大读者的典中之宝。

辛勤耕耘在教学第一线的老师们，最理解临窗苦读的莘莘学子的追求，最懂得他们的需要，最熟悉他们缺什么。《龙门题典》就是为满足学生的需要，把老师们几十个春秋洒向三尺讲台的心血化成文字付梓出版。

1996年，我们曾隆重推出《三点一测丛书》。她一投放市场，便引起广大中学师生争相购阅，好评如潮；一版再版，印刷达十六次之多。何故？皆因读者爱慕她的实用价值；爱慕她翔实、准确，贴近学生实际，又能指点迷津的特色。

这套新推出的《龙门题典》是《三点一测丛书》的姊妹篇。两套丛书珠联璧合，更着意凸现了实用价值和常效性能。她体现出编者创意上的独出心裁，著述上的独树一

帜，风格上的别致新颖。她为璀璨的“龙门品牌”增添了瑰丽的玑珠，想必会受到读者朋友的青睐和厚爱，成为案头必备的权威性、资料性的工具书。

我们的《三点一测丛书》和《龙门题典》虽不是圣贤之作，但她的作者们博览并吸纳了图书市场涌现的题海、题库、题萃、题王、题霸、千题解、万题选以及名目繁多的习题集的诸多优点，熔百家于一炉，集大成于一身。铸成了代表集体智慧的“典”中精品。

《龙门题典》的编写宗旨是：“以教师为主导，以学生为主体，以教材为主源，以训练为主线”。她强调思维的多元化与多层化，她对于知识点的梳理十分精湛。就题型看，她强调了基础性、综合性、创新性。她选题信息量大，覆盖面广，能力测试度高，对未来的学习与考试预测性强。一书在手，可以激发学生由“知识型”向“能力型”转变，由“苦学型”向“乐学型”转变，有助于他们跳出浩瀚题海，举一反三，触类旁通，把握书海扬帆的正确航向。

“世上本没有路，走的人多了便成了路”。《龙门题典》希图探索一条新路。我们深信：“书山”一定有捷径——捷在选题；“题海”一定有轻舟——轻在解法。

我由衷地希望每日遨游于题海中、跋涉在书山上的同行们，对本丛书提出宝贵的意见和建议，以使她不断臻于完善。

希　扬

1998年8月8日

前　言

本书是根据数学大纲中教学目标的要求，按照现行教材的章节顺序依次编写的.

书中所编选的题目力争尽量包容当前教学中读者常见的各类题型，所选题目的难度基本能适合不同水平的学生.其中，A类题属于基础知识的题型，B类题较为灵活与综合，读者可以根据自己的具体情况选择其中的一部分或全部参考使用.

书中所选的题目，每个题都给出了“解题思路”及“常规解法”.有一些题还给出了“其他解法”.读者阅读时可先分析解题思路，体味其中的内涵，进而演练它的解法，我们的目的是通过题型的分析培养读者的解题能力，进而提高读者的数学素养.

在题目结构和题型设计上，我们基本做到向近年的高考试题、中考试题的题型结构靠近，从而便于读者查找、参考.

为了满足部分读者课外阅读的需求，对教材中的一些选学内容我们作了适当的补充，这些题目前都加有“*”号.

愿本书能对广大学生、老师、家长提供切实的帮助.

由于时间仓促，加之，我们的水平所限，书中的缺憾在所难免。恳请广大读者提出宝贵意见.

编著者

1998年8月

目　　录

代数篇

立体几何篇

平面解析几何篇

代数篇

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

本章主要内容包括：

1．集合，集合的表示法，子集，真子集，两个集合相等，空集，全集．

2．交集，并集，补集：

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；$\bar{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$．

3．映射．函数，函数的表示法．

4．函数的三要素：定义域，值域，对应法则．

5．奇偶性：

$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数；$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数．

6．单调性，单调区间：

① 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增，(a,b) 为增区间；

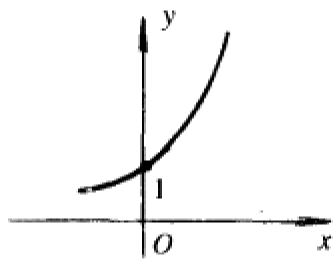
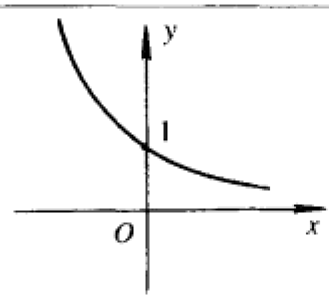
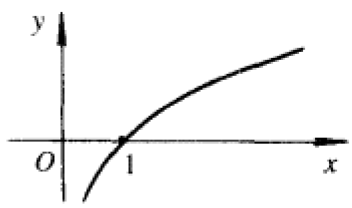
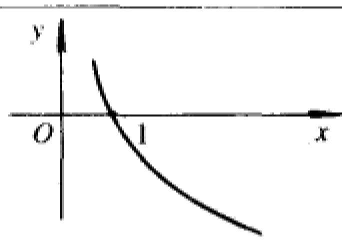
② 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减，(a,b) 为减区间．

7．指数，指数运算法则；对数，对数运算法则．

8．幂函数的概念及性质；$y=x^{\alpha}$（其中 α 等于 1，2，3，

1/2,1/3,－1,－2)的图象；

9. 指数函数和对数函数的图象及性质.

函数	图象	性质
$y=a^x$ $(a>1)$		$x\in(-\infty,\infty)$ $y\in(0,+\infty)$ 过$(0,1)$点，增函数.
$y=a^x$ $(0<a<1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$ 过$(0,1)$点，减函数.
$y=\log_a x$ $(a>1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$ 过$(1,0)$点，增函数.
$y=\log_a x$ $(0<a<1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$ 过$(1,0)$点，减函数.

10. 指数方程、对数方程及其解法.

11. 反函数的概念；反函数的图象与原函数的图象的对称关系；求反函数.

12. 图象的平移，伸缩，对称变换.

一、选择题

A 类

1. 已知：$P=\{0,1\}$，$M=\{x\mid x\subseteq P\}$，则 P 与 M 的关系为(　　)

A. $P\in M$　　B. $P\notin M$　　C. $P\subset M$　　D. $P\supset M$

分析●由 $M=\{x\mid x\subseteq P\}$ 可知：M 中的元素是集合 P 中的子集，所以 $M=\{\phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

答案●A

指点辨误●包含于"$\subseteq$"，真包含于"$\subset$"，等于"="，是适用于两个集合之间关系的符号，属于"$\in$"，不属于"$\notin$"，是适用于元素与集合之间联系的符号. P 相对于 M 而言是元素，所以，P 与 M 之间只能使用"$\in$"或"$\notin$".

2. 数集 $X=\{(2n+1)\pi, n$ 是整数$\}$与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi, k$ 是整数$\}$之间的关系是(　　)

A. $X\subset Y$　　B. $X\supset Y$　　C. $X=Y$　　D. $X\neq Y$

分析●$Y=\{(4k\pm1)\pi, k$ 是整数$\}$

$=\{(4k+1)\pi, k$ 是整数$\}U\{(4k-1)\pi, k$ 是整数$\}$.

显然：$Y\subseteq X$　①

任取 $x\in X$，存在一个整数 n，有 $x=(2n+1)\pi$.

若 $n=2k+1$，则 $x=[2(2k+1)+1]\pi=[4(k+1)-1]\pi\in\{(4k-1)\pi, k\in Z\}$；$\therefore x\in Y$.

若 $n=2k$，则 $x=[2(2k)+1]\pi=(4k+1)\pi\in\{(4k+1)\pi, k\in Z\}$，$\therefore x\in Y$.

$\therefore X\subseteq Y$.　②

由①，②，成立，$X=Y$.

答案●C

指点辨误●任取 $x\in X$，论证 $x\in Y$，从而依据子集概念，得到 $X\subseteq Y$，这是证明 X 是 Y 的子集的常规方法，利用 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$ 得 $X=Y$.

3. 已知六个集合，其中 $f(x)=x^2-2x-1$，$M=\{y\mid y=f(x)\}$，$N=\{x\mid y=f(x)\}$，$P=\{x\mid f(x)=x\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$，E

$=\{x\mid f[f(x)]=x\}$, $S=\{(x,y)\mid f(x)=x, y\in R\}$，那么下面各论断中正确的是(　　)

A. $N\supset M\supset P=E$　　　　B. $S=Q$

C. $N\supset M\supset P\supset E$　　　　D. $N\supset M\supset E\supset P$

分析●M 表示函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的值域，$M=[-2,+\infty)$；N 表示函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 的定义域，$N=R$；P 表示方程 $f(x)=x$，即 $x^2-2x-1=x$ 的解集；E 表示为方程 $f[f(x)]=x$ 的解集；易知：$P\subseteq E$，又 $f[f(x)]=x$ 可化简为 $(x^2-3x-1)(x^2-x-2)=0$ 即 $[f(x)-x](x-2)\cdot(x+1)=0$，$\therefore P\subset E$.

Q 表示抛物线 $f(x)=x^2-2x-1$ 上的点集；S 表示过 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，(其中 x_1，x_2 是方程 $f(x)=x$ 的两个根)且与 x 轴垂直的直线上的点集.

答案●D

指点辨误●根据描述法{元素|对元素共性的描述}，读懂各个集合中元素的特点是解决此题的关键.

4. 已知：$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$，如果 $B\subseteq A$，那么实数 a 的范围是(　　)

A. $(-1,2)$　　　　B. $[2,18/7]$

C. $(-1,18/7)$　　　　D. $(-1,18/7]$

分析●若 $B=\phi$，则 $B\subseteq A$，即 $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)<0\Leftrightarrow -1<a<2$ ①

若 $B\neq\phi$，$a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2$

由 $x^2-2ax+a+2\leqslant 0$

$\Leftrightarrow\quad a-\sqrt{a^2-a-2}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-a-2}$

$\because B\subseteq A$

$\therefore\begin{cases}a-\sqrt{a^2-a-2}\geqslant 1\\ a+\sqrt{a^2-a-2}\leqslant 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 3\\ a\leqslant 18/7\end{cases}$

与　$a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2$，求交

$\therefore\quad 2\leqslant a\leqslant 18/7$　②

①、②求并：$-1<a\leqslant 18/7$

答案●D

5. 设 $A\cap B=\phi$，$M=\{P\mid P\subseteq A\}$，$N=\{Q\mid Q\subseteq B\}$，ϕ 表示空集，则(　　)

A. $M\cap N=\phi$　　　　B. $M\cap N=\{\phi\}$

C. $M\cap N=A\cap B$　　　　D. $M\cap N\subset A\cap B$

分析●常见的错误：$\because A\cap B=\phi$，$\therefore M\cap N=\phi$. 错误原因：没有读懂 M,N 所表示的集合. M,N 是分别以 A,B 的子集为元素的集合. 因为 $A\cap B=\phi$，所以除空集 ϕ 以外，A,B 没有相同的子集.

$\therefore M\cap N=\{\phi\}$

答案●B

6. 设 I 为全集，集合 A,B,C 都是其子集，则图 1-1-1 中阴影部分表示的集合为(　　)

A. $A\cup(B\cap C)$

B. $(A\cup\bar{B})\cap(B\cap C)$

C. $(A\cap\bar{B})\cap(B\cap C)$

D. $(A\cap\bar{B})\cup(B\cap C)$

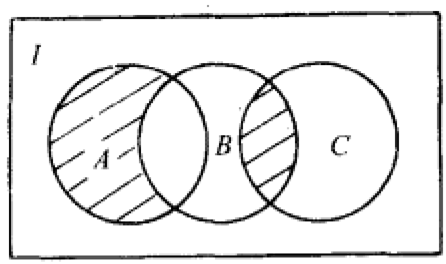


图 1-1-1

分析●本题考查使用韦恩图表示集合的能力，以及交、并、补的概念. 阴影部分中的元素 x，满足：$x\in A$ 且 $x\in\bar{B}$ 或 $x\in B$ 且 $x\in C$，即 $x\in(A\cap\bar{B})\cup(B\cap C)$

答案●D

7. 已知集合 P,Q 满足 $P\cap Q=\{1,2\}$，$P\cup Q=\{1,2,3,4,5\}$，则 $(P\cup Q)\cap(\bar{P}\cup\bar{Q})$ 为(　　)

A. $\{1,2,3\}$　　　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{3,4,5\}$　　　　D. $\{1,4,5\}$

分析●此题的关键是确定全集 I. 因为 $P,Q\subseteq P\cup Q$；所以可以令 $P\cup Q=I$.

$(P\cup Q)\cap(\bar{P}\cup\bar{Q})=\bar{P}\cup\bar{Q}=\overline{P\cap Q}=\overline{\{1,2\}}=\{3,4,5\}$

答案●C

指点辨误●因为 $(P\cap Q)\subseteq\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\subseteq(P\cup Q)$，又依据全集的概念：在某些情

况下,集合都是一个给定的集合的子集,称这个给定的集合为全集.说明全集相对于所讨论的一些集合而言.所以,可选 $P\cup Q$ 为全集 I.

其他解法●选 $I\supset P\cup Q$

$(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup\overline{Q})=(P\cup Q)\cap(\overline{P\cap Q})$ ①

$\because (P\cup Q)\cup(\overline{P\cup Q})=I, P\cap Q\subset P\cup Q$

$\therefore \overline{P\cap Q}=\{3,4,5\}\cup\overline{P\cup Q}$

代入①式,得:$(P\cup Q)\cap[\{3,4,5\}\cup\overline{P\cup Q}]$

$=[(P\cup Q)\cap\{3,4,5\}]\cup[(P\cup Q)]\cap(\overline{P\cup Q})]=\{3,4,5\}$.

8. 设全集 $I=\{x|\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}<0, x\in Z\}$,集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\{x|\dfrac{x}{x-1}>0, x\in I\}$.那么集合 $\{-1,0,1\}$ 是(　　)

A. $M\cup N$　　B. $\overline{M}\cup\overline{N}$

C. $\overline{M}\cap\overline{N}$　　D. $M\cup\overline{N}$

分析●化简 I, $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}<0 \quad \Leftrightarrow (x-4)(x+2)^2(x+3)<0, \Leftrightarrow -3<x<-2$ 或 $-2<x<4$

又 $x\in Z$, $\therefore I=\{-1,0,1,2,3\}$

化简 N, $\dfrac{x}{x-1}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$ 或 $x<0$

又 $x\in I$, $\quad \therefore N=\{-1,2,3\}$

$\overline{M}=\{0,2,3\}$

$\overline{N}=\{0,1,\}$

$\therefore \{-1,0,1\}=M\cup\overline{N}$.

答案●D

指点辨误●注意全集 I 中“$x\in Z$”与 N 集中“$x\in I$”的条件,切勿忽略.

9. 已知 $f(x)$ 是一次函数,且 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$,那么 $f(x)$ 的表达式是(　　)

A. $f(x)=\dfrac{1}{5}x+1$　或　$f(x)=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{2}$

B. $f(x)=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{2}$　或　$f(x)=-\dfrac{1}{5}x+1$

C. $f(x)=\frac{1}{5}x-1$　或　$f(x)=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{2}$

D. $f(x)=\frac{1}{5}x-\frac{3}{2}$　或　$f(x)=-\frac{1}{5}x-1$

分析●设 $f(x)=kx+b$,则 $f^{-1}(x)=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$,由 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$

可得:$f^{-1}(x)=f(25x-30)$

即:$\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}=k(25x-30)+b$

$$\therefore\begin{cases}\frac{1}{k}=25k\\ -\frac{b}{k}=-30k+b\end{cases}$$

解之得　$k=\frac{1}{5},b=1$　或　$k=-\frac{1}{5},b=\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}x+1$　或　$f(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}$.

答案●A

指点辨误●先设出 $f(x)$的一般式,利用多项式相等$\Leftrightarrow$对应项系数相等,建立系数方程组,解出系数的值,确定 $f(x)$的表达式.

10. 已知:$f(x)=\frac{bx+1}{2x+a}$,且 $f(x)\cdot f(1/x)=k$,$f[f(1)]=\frac{k}{2}$,a,b,k 为常数,$a\cdot b\neq 2$,那么常数 a,b 的值等于(　　)

A. $\begin{cases}a=7\\ b=\frac{7}{2}\end{cases}$　　B. $\begin{cases}a=-7\\ b=-\frac{7}{2}\end{cases}$

C. $\begin{cases}a=\frac{7}{2}\\ b=7\end{cases}$　　D. $\begin{cases}a=-\frac{7}{2}\\ b=-7\end{cases}$

分析●构造关于 a,b 的方程组,解之,求出 a,b 的值.

依题意:$f(x)=k\frac{1}{f(1/x)}$

$\therefore\frac{bx+1}{2x+a}=k\frac{2+ax}{b+x}$