高等学校教材

大学物理教学指导与精选题解

▶ 倪德渊　刘映栋　陆正兴　编著

化学工业出版社
教材出版中心

高等学校教材

大学物理教学指导与精选题解

倪德渊　刘映栋　陆正兴　编著

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

大学物理教学指导与精选题解/倪德渊，刘映栋，陆正兴编著．—北京：化学工业出版社，2005.3
高等学校教材
ISBN 7-5025-6447-0

Ⅰ．大…　Ⅱ．①倪…②刘…③陆…　Ⅲ．物理学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．04

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 014631 号

高等学校教材
大学物理教学指导与精选题解
倪德渊　刘映栋　陆正兴　编著
责任编辑：杨　菁　陈　丽
文字编辑：彭喜英
责任校对：陈　静　战河红
封面设计：潘　峰
*
化学工业出版社
教材出版中心　出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：（010）64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京永鑫印刷有限责任公司印刷
三河市延风装订厂装订
开本 787mm×1092mm　1/16　印张 22½　字数 554 千字
2005 年 5 月第 1 版　2005 年 5 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-6447-0/G・1655
定　价：32.00 元

前　言

大学物理是高等学校非物理类专业的一门重要基础理论课程，由于诸多物理问题的概念性强，又需要以高等数学为工具，多年来很多学生颇感物理难学。为适应“高等教育大众化、核心课程精品化”的改革要求，本书作为立体化教材建设项目之一奉献给读者，试图为解决学习大学物理的困难提供一些启发和帮助。

本书编写的特点是每一章都由五部分组成：教学要求介绍本章的知识点，为读者提供判断该章内容的主与次、重点与一般的依据；内容提要列出本章基本内容的概要及必要的分析、归纳，加深读者对主要物理概念和基本物理定律的理解和记忆；典型例题选择反映教学内容的、有代表性的典型习题，引导读者运用基本概念和基本规律正确地分析问题，规范化地解答问题；精选题解贯彻解题“不在多而在精”的初衷，对精选出的、有特色的习题给出了简明的解答，其目的一是告知读者某些知识要点和解题方法，二是开阔视野，提高读者的自学能力；综合练习作为课后作业，帮助读者复习、掌握本章的主要内容。书后附有6份模拟试卷，在复习的基础上，可自行检查学习效果。

本书共有18章，其中1～5章和16～18章由倪德渊编写，6～10章由刘映栋编写，11～15章由陆正兴编写，各章节中的综合练习、书后的模拟试卷及解答由刘映栋、陆正兴、王纪俊、葛一兵、吴大建、牛险峰、崔青艺、阮小霞、季颖、卜敏、姜迎新等收集和编写。本书的编著工作由倪德渊统筹组织并总撰。全书由刘映栋教授负责统稿，陆正兴副教授负责绘图和稿件合成。

范建中教授审阅了本书的全部内容。本书编著过程中得到江苏大学物理系老师们的大力支持，江苏大学有关职能部门和京江学院给予了热情帮助，在此一并表示衷心的感谢。

热诚欢迎读者对本书的不足提出批评和建议。

编　者

2004年11月

目　录

1　质点运动学 ………………………………………………………… 1
1.1　质点和参照系 ………………………………………………………… 1
1.2　描述质点运动的基本物理量 ………………………………………… 1
1.3　圆周运动的角量描述 ………………………………………………… 3
1.4　相对运动 ……………………………………………………………… 4
1.5　典型例题 ……………………………………………………………… 4
1.6　精选题解 ……………………………………………………………… 8
1.7　综合练习 ……………………………………………………………… 13
2　牛顿运动定律 ………………………………………………………… 16
2.1　牛顿第一定律 ………………………………………………………… 16
2.2　牛顿第二定律 ………………………………………………………… 16
2.3　牛顿第三定律 ………………………………………………………… 17
2.4　惯性参照系和非惯性参照系 ………………………………………… 17
2.5　应用牛顿运动定律解题的基本思路和具体步骤 …………………… 17
2.6　力学中几种常见的力 ………………………………………………… 17
2.7　质点的动量定理 ……………………………………………………… 18
2.8　力的功与功率 ………………………………………………………… 18
2.9　质点的动能定理 ……………………………………………………… 19
2.10　质点系的质心和质心运动定理 …………………………………… 19
2.11　典型例题 …………………………………………………………… 20
2.12　精选题解 …………………………………………………………… 24
2.13　综合练习 …………………………………………………………… 30
3　力学中的守恒定律 …………………………………………………… 33
3.1　保守力和势能 ………………………………………………………… 33
3.2　质点系的动能定理和机械能守恒定律 ……………………………… 34
3.3　质点系的动量定理和动量守恒定律 ………………………………… 34
3.4　对定点的力矩和角动量（也叫动量矩） …………………………… 35
3.5　质点（或质点系）的角动量定理和角动量守恒定律 ……………… 35
3.6　碰撞 …………………………………………………………………… 35
3.7　典型例题 ……………………………………………………………… 36
3.8　精选题解 ……………………………………………………………… 40
3.9　综合练习 ……………………………………………………………… 46
4　刚体定轴转动 ………………………………………………………… 49
4.1　描述刚体定轴转动的物理量 ………………………………………… 49
4.2　刚体定轴转动的运动公式 …………………………………………… 50

4.3　转动定律 …… 50
4.4　定轴转动刚体的动能定理 …… 50
4.5　含有转动刚体的机械能守恒定律 …… 51
4.6　定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律 …… 51
4.7　典型例题 …… 51
4.8　精选题解 …… 55
4.9　综合练习 …… 60
5　狭义相对论基础 …… 64
5.1　爱因斯坦关于狭义相对论的两条基本原理 …… 64
5.2　洛仑兹变换 …… 64
5.3　"同时"的相对性 …… 65
5.4　"长度收缩"效应 …… 65
5.5　"时间延缓"效应 …… 65
5.6　相对论动力学方程 …… 66
5.7　质量-能量关系 …… 66
5.8　相对论动能和动量-能量关系 …… 66
5.9　典型例题 …… 66
5.10　精选题解 …… 70
5.11　综合练习 …… 74
6　真空中的静电场 …… 76
6.1　库仑定律 …… 76
6.2　电场强度和场强叠加原理 …… 76
6.3　静电场的高斯定理 …… 78
6.4　静电场的环路定理、电势差和电势 …… 78
6.5　电场强度与电势的关系 …… 80
6.6　典型例题 …… 80
6.7　精选题解 …… 86
6.8　综合练习 …… 94
7　导体和电介质中的静电场 …… 97
7.1　电场中的导体 …… 97
7.2　电介质中的静电场 …… 98
7.3　电位移矢量和有电介质时的高斯定理 …… 99
7.4　电容和电容器 …… 99
7.5　静电场的能量 …… 100
7.6　典型例题 …… 101
7.7　精选题解 …… 107
7.8　综合练习 …… 113
8　真空中的稳恒磁场 …… 116
8.1　磁感应强度的定义 …… 116
8.2　毕奥-萨伐尔定律 …… 117

8.3 稳恒磁场的安培环路定理 …… 117
8.4 磁场的高斯定理 …… 118
8.5 安培定律 …… 118
8.6 载流线圈在匀强磁场中受到的磁力矩 …… 118
8.7 安培力的功 …… 118
8.8 洛仑兹力 …… 119
8.9 带电粒子在均匀磁场中的运动 …… 119
8.10 霍耳效应 …… 119
8.11 几种典型电流的磁场分布 …… 120
8.12 典型例题 …… 120
8.13 精选题解 …… 126
8.14 综合练习 …… 134
9 磁介质 …… 140
9.1 顺磁质、抗磁质的磁化机制 …… 140
9.2 描述磁介质磁化程度的物理量 …… 140
9.3 有磁介质存在时的安培环路定理 …… 141
9.4 铁磁质 …… 141
9.5 典型例题 …… 142
9.6 精选题解 …… 144
9.7 综合练习 …… 147
10 电磁感应　电磁场 …… 149
10.1 电动势 …… 149
10.2 电磁感应的基本定律 …… 150
10.3 动生电动势 …… 150
10.4 感生电动势和涡旋电场 …… 151
10.5 自感现象和互感现象 …… 151
10.6 磁场能量 …… 152
10.7 位移电流 …… 152
10.8 麦克斯韦方程组 …… 153
10.9 电磁波 …… 153
10.10 典型例题 …… 154
10.11 精选题解 …… 161
10.12 综合练习 …… 168
11 机械振动 …… 174
11.1 简谐振动的概念及其特征 …… 174
11.2 描述简谐振动的物理量 …… 175
11.3 简谐振动的旋转矢量（相量）表示法 …… 176
11.4 简谐振动的图线 …… 177
11.5 简谐振动的能量（以弹簧振子为例） …… 178
11.6 简谐振动的合成 …… 178

11.7 典型例题…… 179
11.8 精选题解…… 182
11.9 综合练习…… 187
12 机械波…… 190
12.1 波动的概念…… 190
12.2 平面简谐波…… 191
12.3 波的能量（以平面简谐波为例）…… 192
12.4 惠更斯原理和波的衍射…… 193
12.5 波的干涉…… 193
12.6 驻波…… 194
12.7 多普勒效应…… 195
12.8 典型例题…… 196
12.9 精选题解…… 200
12.10 综合练习…… 205
13 光的干涉…… 211
13.1 单色光、相干光…… 211
13.2 光程与光程差…… 212
13.3 杨氏双缝实验…… 213
13.4 薄膜干涉…… 214
13.5 迈克耳孙干涉仪…… 216
13.6 典型例题…… 217
13.7 精选题解…… 219
13.8 综合练习…… 224
14 光的衍射…… 227
14.1 衍射的分类…… 227
14.2 惠更斯-菲涅耳原理…… 227
14.3 单缝的夫琅禾费衍射…… 228
14.4 夫琅禾费圆孔衍射…… 229
14.5 光学仪器的分辨本领…… 229
14.6 光栅衍射…… 230
14.7 X射线的衍射…… 231
14.8 典型例题…… 232
14.9 精选题解…… 235
14.10 综合练习…… 238
15 光的偏振…… 241
15.1 自然光和偏振光…… 241
15.2 起偏、检偏和马吕斯定律…… 242
15.3 反射和折射时光的偏振…… 242
15.4 光的双折射…… 243
15.5 偏振光的干涉…… 244

15.6 典型例题 …… 244
15.7 精选题解 …… 246
15.8 综合练习 …… 251
16 气体动理论 …… 254
16.1 理想气体状态方程 …… 254
16.2 理想气体的压强公式 …… 255
16.3 理想气体的温度公式 …… 255
16.4 能量按自由度均分定理和理想气体的内能 …… 255
16.5 麦克斯韦速率分布规律 …… 256
16.6 玻耳兹曼分布律 …… 257
16.7 理想气体分子碰撞的统计规律 …… 257
16.8 典型例题 …… 257
16.9 精选题解 …… 260
16.10 综合练习 …… 265
17 热力学基础 …… 269
17.1 准静态过程、功、热量与内能 …… 269
17.2 热力学第一定律 …… 270
17.3 循环过程 …… 270
17.4 热力学第二定律 …… 271
17.5 熵和熵增加原理 …… 271
17.6 典型例题 …… 272
17.7 精选题解 …… 277
17.8 综合练习 …… 283
18 量子理论基础 …… 288
18.1 黑体辐射基本规律和普朗克能量子假设 …… 288
18.2 光电效应和爱因斯坦光子学说 …… 289
18.3 康普顿效应 …… 290
18.4 玻尔氢原子理论 …… 290
18.5 微观实物粒子的波粒二象性 …… 291
18.6 波函数与薛定谔方程 …… 292
18.7 氢原子的量子力学理论 …… 293
18.8 原子的壳层结构及有关规律 …… 294
18.9 典型例题 …… 294
18.10 精选题解 …… 298
18.11 综合练习 …… 302
模拟试卷 …… 306
综合练习答案 …… 324
模拟试卷答案 …… 338
主要参考文献 …… 349

1 质点运动学

教学要求

① 理解质点这一理想模型的涵义和参照系的概念。

② 掌握描述质点运动的位置矢量、位移、速度、加速度等概念，充分理解它们的矢量性、瞬时性、相对性等。

③ 理解运动方程和轨道方程及其相互关系，掌握用微积分的方法处理运动学的两类典型问题。

④ 掌握描述圆周运动的角坐标、角位移、角速度和角加速度等概念，掌握角量与线量之间的关系以及切向加速度和法向加速度的物理意义。

⑤ 确切理解相对运动概念，掌握在不同参照系中速度和加速度的变换公式。

内容提要

重点 描述质点运动的基本物理量、运动方程与轨道方程；圆周运动的角量描述，切向加速度和法向加速度。

难点 位置矢量、速度、加速度的矢量性、瞬时性、相对性；由已知速度（或加速度）和初始条件求解运动方程（即运动学第二类问题）。

质点运动学主要研究质点在位置变动时描述质点运动的物理量随时间变化的关系，不涉及引起变化的原因。

1.1 质点和参照系

1.1.1 质点

在研究对象可以忽略其形状、大小、内部结构等的情况下，该物体就可以被抽象成为一个有质量的几何点——质点。

一个物体能否被看成质点，主要决定于所研究问题的性质。

1.1.2 参照系

在自然界中，任何物体都处于运动与变化之中，这就是运动的绝对性。在研究物体的运动时，首先需要选择一个物体作为参考标准，这个被选作参考标准的物体称为参照系。

相对于不同的参照系，对同一物体的运动描述一般说来是不同的，这就是运动描述的相对性。

为了对质点运动进行定量的描述，需要在选定的参照系上建立适当的坐标系。

1.2 描述质点运动的基本物理量

1.2.1 位置矢量

从坐标原点向质点所在处作的有向线段就是位置矢量，以 $\boldsymbol{r}$ 表示。它具有矢量性、瞬时性和相对性。

在直角坐标系中，位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的解析表达式为：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 坐标轴正方向的单位矢量。

1.2.2 运动方程和轨道方程

运动方程是质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间变化的数学函数表达式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

运动方程可以写成分量形式。在直角坐标系中：

$$x=x(t);y=y(t);z=z(t)$$

质点的运动方程分量式也可看成为以 t 为参变量的轨道参数方程。消去参量 t，就得到只含空间坐标的曲线方程。

1.2.3 位移矢量和路程

（1）位移矢量　简称位移，是描述在某一段时间 Δt 内质点位置变化的物理量。

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

它是从质点的初始位置引向终末位置的有向线段。位移可用下列矢量合成公式表示：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\,\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

位移的大小用它的模 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 表示，不能用 Δr 表示。

（2）路程　在某一段时间 Δt 内质点运动所经过的路径总长度。路程是标量，一般情况下路程不等于位移的大小。

位移和路程的单位均为 m。

1.2.4 速度矢量和速率

（1）速度矢量　描述质点运动状态的基本物理量，表示位置随时间的变化率。

平均速度
$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度
$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

（2）速率　单位时间内运动质点所通过的路程。

平均速率
$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由于一般情况下 $\Delta s\neq|\Delta\boldsymbol{r}|$，所以一般说 $\bar{v}\neq|\bar{\boldsymbol{v}}|$。

瞬时速率
$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta s\to|\Delta\boldsymbol{r}|$，$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以瞬时速率等于瞬时速度的大小。

速度和速率的单位均为 m/s。

1.2.5 加速度（矢量）

加速度矢量是描述质点运动状态变化的物理量，表示速度随时间的变化率。

平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$

瞬时加速度 $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

切向加速度和法向加速度　质点作曲线运动时，可建立自然坐标系，加速度矢量可表示为：

$$\boldsymbol{a}=a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n}_0+a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau}_0$$

其中法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=v^2/\rho$ 只改变速度的方向；切向加速度 $a_{\mathrm{t}}=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 只改变速度的大小。$\boldsymbol{n}_0$ 和 $\boldsymbol{\tau}_0$ 分别为法线方向和切线方向的单位矢量。

加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$。

1.2.6　质点的匀变速直线运动

若取运动轨道为 x 轴，质点的运动方程为：

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

如果 $t=0$ 时刻质点位于坐标原点处（$x_0=0$），则有：

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

速度公式

$$\begin{cases}v=v_0+at\\ v^2=v_0^2+2ax\end{cases}$$

1.3　圆周运动的角量描述

1.3.1　角坐标

某时刻质点的位置矢量（圆心为原点）与选定的参考方向之间的夹角，以 θ 表示，常用单位是 rad（弧度）。

以角坐标表示的运动方程　　$\theta=\theta(t)$

1.3.2　角位移

角位移是描述圆周运动质点在 Δt 时间内角坐标变化的物理量：

$$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$$

式中，$\Delta\theta$ 为角位移，其常用单位是 rad。

1.3.3　角速度

角速度是描述质点圆周运动状态的物理量，表示角坐标随时间的变化率。

平均角速度 $\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

瞬时角速度 $$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

式中，ω 为角速度，rad・s^{-1}。

1.3.4 角加速度

它是描述质点圆周运动状态变化的物理量，表示角速度随时间的变化率。

平均角加速度 $$\bar{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

瞬时角加速度 $$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

式中，β 为角加速度，rad・s^{-2}。

1.3.5 角量与线量之间的关系

$$v=R\omega;\quad a_t=R\beta;\quad a_n=v^2/R=R\omega^2$$

1.4 相对运动

1.4.1 速度变换定理

$$\boldsymbol{v}_{po}=\boldsymbol{v}_{po'}+\boldsymbol{v}_{o'o}$$

$\boldsymbol{v}_{po}$是质点 p 相对于 o 坐标系的速度；$\boldsymbol{v}_{po'}$是质点相对于 o'坐标系的速度；$\boldsymbol{v}_{o'o}$是 o'坐标系相对于 o 坐标系平动的速度。

1.4.2 加速度变换定理

$$\boldsymbol{a}_{po}=\boldsymbol{a}_{po'}+\boldsymbol{a}_{o'o}$$

$\boldsymbol{a}_{po}$是质点 p 相对 o 坐标系的加速度；$\boldsymbol{a}_{po'}$是质点 p 相对 o'坐标系的加速度；$\boldsymbol{a}_{o'o}$是 o'坐标系相对于 o 坐标系平动的加速度。

1.5 典型例题

1-1 一质点沿 x 轴做直线运动，其运动方程为：$x=3+5t+6t^2-t^3$。试求：(1) 最初 3s 内的位移和平均速度；(2) $t=0$、2s 和 3s 的瞬时速度；(3) 第 3s 内的平均加速度和 3s 末的瞬时加速度；(4) 当加速度为零的时刻质点的速度。

解：(1) $$\Delta x_{03}=x_3-x_0=45-3=42\ (\text{m})$$

$$\bar{v}_{03}=\frac{\Delta x_{03}}{\Delta t}=\frac{42}{3}=14\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

(2) 根据速度的定义 $v=\frac{dx}{dt}=5+12t-3t^2$，因此：

$$v_0=5\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$v_2=5+24-12=17\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$v_3=5+36-27=14\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

(3) $$\bar{a}_{23}=\frac{v_3-v_2}{\Delta t}=\frac{14-17}{3-2}=-3\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

根据加速度的定义 $a=\frac{dv}{dt}=12-6t$，故：

$$a_3=12-18=-6\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

（4）当 $a=12-6t=0$ 时，$t=2$（s），这时的速度为：

$$v_2=17\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

1-2 一质点在 x-y 平面上运动，其加速度为 $a_x=-A\omega^2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$，$a_y=-B\omega^2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$，其中 A、B、ω 均为正的非零常数，且 $A\neq B$。$t=0$ 时刻，$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，$v_{x_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega$；$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}B$，$v_{y_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}B\omega$。求质点运动的轨道方程。

解： 轨道方程可以由运动方程的分量式消去 t 求得。因此本题首先应求出运动方程。

根据加速度的定义，有：

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

分别进行积分并代入初始条件：

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t -A\omega^2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$$

$$v_x=\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega+\int_0^t -A\omega^2\cos(\omega t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t=-A\omega\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_{v_{y_0}}^{v_y}\mathrm{d}v_y=\int_0^t -B\omega^2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$$

$$v_y=-\frac{\sqrt{2}}{2}B\omega+\int_0^t -B\omega^2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=-B\omega\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$

根据速度的定义：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

分别对两式进行积分并代入初始条件：

$$x=x_0+\int_0^t v_x\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}A+\int_0^t -A\omega\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y=y_0+\int_0^t v_y\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}B+\int_0^t -B\omega\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=B\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$

所得两式为运动方程分量式，消去参量 ωt，可得质点运动的轨道方程：

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

显然，质点运动的轨道为椭圆。

小结 运动学第一类问题是从已知的运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$ 出发，然后根据速度、加速度的定义通过求导数运算解得速度和加速度；运动学第二类问题是从已知的加速度（或速度）出发，根据速度、加速度的定义式，进行积分运算并代入初始条件，解得运动方程。

1-3 一质点在 x-y 平面上运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(4-t^2)\boldsymbol{j}$。试求：在任意时刻质点的切向加速度和法向加速度。

解： 根据速度、加速度的定义，由运动方程对 t 求导可得 $\boldsymbol{v}$ 及 v，进而有 $a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，并

可由 $a^2=a_t^2+a_n^2$ 求得 a_n。

由题意可知，$x=2t$，$y=4-t^2$，根据速度的定义，有：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$$

根据加速度定义 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}$，$|\boldsymbol{a}|=a=2$

因为瞬时速度大小等于瞬时速率，所以：

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2\sqrt{1+t^2}$$

根据切向加速度与速率的关系，可得 a_t：

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}$$

由 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$ 可知 a_n 为：

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\frac{2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}$$

1-4 一条宽度为 h 的河流，水流速度与离岸距离成正比，岸边水流速度为零。河的中心线上水流速度最快，设为 v_0，有一人乘皮划艇沿河的中心线从上游漂下。到达某处时他要靠岸，于是他以恒定的速度 u 垂直于河岸划动皮艇。试求皮艇运动的轨道方程。

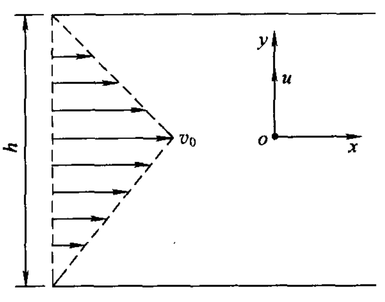

图 1-1

解：选取河岸为参照系，并建立如图 1-1 所示的直角坐标系。图中表示了水流速度 v_s 的变化状况，找出皮艇实际运动速度的表达式是关键。

在图示所建立的直角坐标系中，$t=0$ 时，$x_0=0$，$y_0=0$，$v_{x_0}=v_0$，$v_{y_0}=u$。水流的速度为 v_s，$y=0$ 时，$v_s=v_0$；$y=\dfrac{h}{2}$时，$v_s=0$，据此，找出 $v_s(y)$ 的函数表达式为：

$$v_s=v_0-\frac{2v_0}{h}y$$

皮艇的速度为：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_s=v_0-\frac{2v_0}{h}y \tag{1-1}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u \tag{1-2}$$

由式（1-2）积分，即得：

$$y=ut \tag{1-3}$$

由式（1-1）得：

$$\mathrm{d}x=\left(v_0-\frac{2v_0}{h}y\right)\mathrm{d}t$$

将式（1-3）代入上式并积分：

$$x = v_0 t - \frac{u v_0}{h} t^2 \tag{1-4}$$

由式（1-3）、式（1-4）消去 t：

$$x = \frac{v_0}{u} y - \frac{v_0}{uh} y^2$$

上式就是所求的皮艇运动的轨道方程。

1-5 如图 1-2 所示，一个小球沿着铅直平面内的圆环运动，圆环半径为 R，空气阻力和摩擦力均忽略不计。设在 $t=0$ 时刻，小球在环的底部以 v_0 运动，求小球的速率与位置的关系。

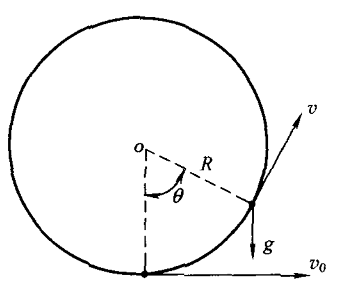

图 1-2

解：首先可以肯定小球是作变速圆周运动，所以切向加速度 $a_t \neq 0$，根据切向加速度的概念找出速率 v 的变化规律。显然有：

$$a_t = -g\sin\theta$$

根据切向加速度的概念，有：

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv ds}{dt ds} = v\frac{dv}{ds} = -g\sin\theta$$

因 $ds = Rd\theta$，代入后即得：

$$vdv = -Rg\sin\theta d\theta$$

当 $t=0$ 时，小球在环底部。$\theta=0$，$v=v_0$，上式积分并将初始条件代入得：

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -Rg\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$v^2 = v_0^2 - 2Rg(1-\cos\theta)$$

小结 本题在学过机械能守恒定律后解起来非常容易，但在这里做可以加强对自然坐标系的理解。本题解算过程中关键的步骤是变换$\frac{dv}{dt} = \frac{dsdv}{dtds} = v\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{Rd\theta}$，这样积分变量为 θ，很容易进行变量分离求出结果。

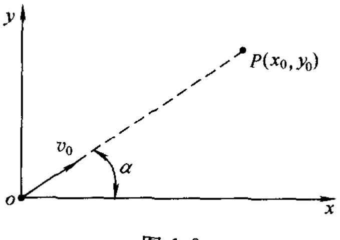

图 1-3

1-6 如图 1-3 所示，用枪瞄准位于 P 点的动靶。在子弹出射的同时，靶开始自由下落。设空气阻力不计。试证明：只要子弹的初速度足够大，就一定会击中靶。

证明：所谓瞄准，就是子弹出射时速度的方向沿着 oP 指向靶；所谓击中就是在靶落地之前的某一时刻子弹和靶到达空中的同一位置（坐标）。

建立图中所示的直角坐标系，靶的初始位置坐标为（x_0，y_0），子弹的初始位置坐标为（0，0）。子弹和靶的运动方程分别为：

子弹 $$x_1 = v_0 t\cos\alpha,\quad y_1 = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

靶 $$x_2 = x_0,\quad y_2 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

各式中 t 的计时起点相同，所以 t 取值相同。

当 $x_1=x_2$ 时，$t=\dfrac{x_0}{v_0\cos\alpha}$，这时：

$$\begin{aligned}y_1&=x_0\frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_0\cos\alpha}\right)^2\\&=x_0\tan\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_0\cos\alpha}\right)^2\\&=y_0-\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_0\cos\alpha}\right)^2=y_2\end{aligned}$$

这表明在 $t=\dfrac{x_0}{v_0\cos\alpha}$时刻，子弹与靶到达同一位置即相遇——击中。但是上式要有意义（$y_1>0$，$y_2>0$），v_0 必需足够大$\left(v_0>\sqrt{\dfrac{gx_0}{\sin2\alpha}}\right)$。当 v_0 足够大时，只要开始瞄准，就能击中下落的靶。否则，子弹到达 x_0 之前靶已落地。

1.6 精选题解

1-7 一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=(4+3t)\boldsymbol{i}+(2+5t+t^2)\boldsymbol{j}$。求：(1) $t=2$s 时的位置矢量及其方向；(2) $t=3$s 时的速度及其大小和方向；(3) $t=4$s 时的加速度及其大小和方向；(4) 质点运动的轨道方程。

解：(1)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2&=[(4+3t)\boldsymbol{i}+(2+5t+t^2)\boldsymbol{j}]|_{t=2}\\&=10\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{r}_2|=\sqrt{10^2+16^2}=18.87\ (\text{m})$$

与 x 轴正方向夹角 θ_1：

$$\theta_1=\arctan\frac{16}{10}=58°$$

(2) 根据速度的定义

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(5+2t)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_3=3\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$$

$$|\boldsymbol{v}_3|=\sqrt{3^2+11^2}=11.4\ (\text{m/s})$$

与 x 轴正方向夹角 θ_2：

$$\theta_2=\arctan\frac{11}{3}=74°45'$$

(3) 根据加速度的定义

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0+2\boldsymbol{j}$$

$$a=2\ (\text{m/s}^2)\qquad \text{(方向沿 } y \text{ 轴正方向)}$$

(4) 写出运动方程的分量式

$$x=4+3t \tag{1-5}$$

$$y=2+5t+t^2 \tag{1-6}$$

消去参量 t，由式 (1-5) 知 $t=(x-4)/3$，代入式 (1-6)，即得轨道方程：