

内附光盘



# 有限元分析及应用

Finite Element Analysis and Applications

曾 驰



清华大学出版社



Springer

# 有限元分析及应用

## Finite Element Analysis and Applications

曾 攀



清华大学出版社  
北京



Springer

## 内 容 简 介

本书强调有限元分析的工程概念、数学力学基础、建模方法以及实际应用,全书包括3篇,共分12章;第1篇为有限元分析的基本原理,包括第1章至第5章,内容有:有限元分析的力学基础、有限元分析的数学求解原理、杆梁结构的有限元分析原理、连续体弹性问题的有限元分析原理;第2篇为有限元分析的扩展内容,包括第6章至第8章,内容有:有限元分析中的单元性质特征与误差处理、有限元分析中的复杂单元及实现、有限元分析的应用领域(结构振动问题、弹塑性问题、传热与热应力问题);第3篇为有限元分析的建模、软件平台及实例分析,包括第9章至第12章,内容有:有限元分析的实现与建模、有限元分析的自主程序开发以及与ANSYS平台的衔接、基于ANSYS平台的有限元建模与分析、基于MARC平台的有限元建模与分析。本书还给出中、英文关键词索引,并附有配书光盘(CD-ROM)。本书的理论阐述简明扼要,实例丰富,书中的3篇内容相互衔接,也可独立使用,分别适合于初级、中级和较高水平的学生作为课程教材,也适合于不同程度的读者进行自学;对于希望在ANSYS和MARC平台进行建模分析的读者,本书更值得参考。

本书的读者对象为机械、力学、土木、水利、航空航天等专业的高年级本科生、研究生、工程技术人员、科研工作者。

**版权所有,翻印必究。**

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

### 图书在版编目(CIP)数据

有限元分析及应用/曾攀编著. —北京: 清华大学出版社, 2004  
ISBN 7-302-07475-5

I . 有… II . 曾… III . 有限元分析 IV . Q241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 096097 号

**出 版 者:** 清华大学出版社      **地 址:** 北京清华大学学研大厦  
<http://www.tup.com.cn>      邮 编: 100084  
**社 总 机:** 010-62770175      **客户服 务:** 010-62776969

**责任编辑:** 杨 倩

**印 刷 者:** 北京市昌平环球印刷厂

**装 订 者:** 三河市新茂装订有限公司

**发 行 者:** 新华书店总店北京发行所

**开 本:** 175×245    **印 张:** 31.75    **字 数:** 630 千字

**版 次:** 2004 年 6 月第 1 版    2004 年 6 月第 1 次印刷

**书 号:** ISBN 7-302-07475-5/0 · 325

**印 数:** 1 ~ 4000

**定 价:** 49.50 元(含光盘)

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770175-3103 或 (010)62795704。



# 前言

据有关统计,在我国机械制造业中,采用有限元方法开发和设计的新产品已达到70%以上;在机械工程、车辆工程、土木工程、航空航天、材料加工工程等领域中从事工程设计与优化、材料宏微观模拟与分析的各类工作和学位论文中,约有90%以上的论文采用有限元方法作为分析工具,并且有限元方法在其中80%以上的论文中起到决定性的作用;可以看出,有限元分析已经成为教学、科研、产品设计中广泛使用的重要工具。近年来,有限元分析已从过去的只有较少专业人员掌握的理论和方法,变为大学生、研究生、科技工作者、工程技术设计人员广泛使用的通用分析工具,一个重要的原因就是有限元分析商品化软件的普及。拥有了先进的和完全自动化的有限元分析软硬件平台,并不意味着就掌握了有限元分析方法和能够得到正确的分析结果,本书针对这一发展现状,力求提供反映时代特色的实用教程,强调有限元方法的工程理解和融会贯通,既给出有限元分析基本原理的清晰推导,又提供较多扩展内容,同时也让读者在目前国际上最先进的有限元软件平台上进行实际的建模和应用,在实践的基础上深刻理解和掌握有限元分析方法。

全书分为3篇,第1篇包括第1章至第5章,相关内容如下。

第1章为绪论,简要介绍有限元方法的发展过程及历史。

第2章为有限元分析的力学基础,介绍变形体的三大类变量描述、三大类基本方程、两类边界条件、能量表达等,讨论了平面应力、平面应变,以及变形体的构形、刚体位移及体积应变等基本问题;在参考内容中,给出了平面极坐标、空间柱坐标、球坐标下的变量和方程描述,可作为手册以备查用。

第3章为有限元分析的数学求解原理,基于实例,系统推导和讨论了弹性力学问题近似求解的加权残值法(Galerkin法、残值最小二乘法)、虚功原理、最小势能原理及其变分基础,并给出各种求解方法的特点及比较;在参考内容中,介绍了虚余功原理、最小余能原理、一般变分方法、广义变分原理等内容。

## II 有限元分析及应用

第 4 章为杆梁结构的有限元分析原理,首先基于一个实例介绍了有限元分析求解的完整过程,然后讨论了杆单元及坐标变换、梁单元及坐标变换,对拉杆结构、匀速旋转杆件、悬臂梁受压的间隙接触问题给出完整的应用实例;在参考内容中,介绍了考虑剪切应变的一般梁单元和 Timoshenko 梁单元。

第 5 章为连续体弹性问题的有限元分析原理,首先讨论了连续体的离散过程及特征,然后讨论了平面问题的单元构造、轴对称问题的单元构造、空间问题的单元构造、参数单元的一般原理和数值积分;在典型例题中,详细讨论了平面 4 节点矩形单元位移模式、平面矩形结构的应变能和应变余能计算等实际问题;在参考内容中,介绍了面积坐标、体积坐标、等参元变换的条件及收敛性、平面三角形单元与矩形单元求解精度的比较等问题。

第 2 篇包括第 6 章至第 8 章,相关内容如下。

第 6 章为有限元分析中的单元性质特征与误差处理,讨论了单元节点编号与存储带宽、形状函数矩阵与刚度矩阵的性质、边界条件的处理与支反力的计算、单元刚度阵的缩聚、位移函数构造与收敛性要求、 $C_0$  型单元与  $C_1$  型单元、单元的拼片试验、有限元分析数值解的精度与性质、单元应力计算结果的误差与平均处理、误差控制和提高精度的  $h$  方法和  $p$  方法等重要内容;在参考内容中,介绍了应力(应变)计算结果的磨平改善、 $C_0$  型问题 Wilson 非协调单元及拼片试验。

第 7 章为有限元分析中的复杂单元及实现,讨论了 1D 高阶单元、2D 高阶单元、3D 高阶单元、基于薄板理论的弯曲板单元、子结构与超级单元、特殊高精度单元;在参考内容中,介绍了基于薄板理论的协调板单元、考虑剪切的 Mindlin 板单元,还给出了常用  $C_0$  型高阶单元一览表以备查用。

第 8 章为有限元分析的应用领域,系统并深入讨论了结构振动问题、弹塑性问题、传热与热应力问题的有限元分析原理,并给出一系列的实例;在参考内容中,介绍了大变形动态非线性力学问题的构形描述及求解方法,清晰阐述 Lagrange 网格(描述)和 Euler 网格(描述)、静力隐式算法与动力显式算法等基本概念。

第 3 篇包括第 9 章至第 12 章,相关内容如下。

第 9 章为有限元分析的实现与建模,介绍有限元分析平台的一般组成、有限元分析过程中的离散方式与单元选择、特征建模与等效建模、逐级精细分析、单元的“激活”技术、多场耦合分析等重要内容,对于希望进行复杂问题分析和建模的读者具有重要的指导作用。

第 10 章为有限元分析的自主程序开发以及与 ANSYS 平台的衔接,介绍基于 Fortran 和 C 语言的有限元分析源程序,并给出详细的注释和应用实例;基于现有的有限元分析商品化软件进行自主程序开发和高水平的研究是一个新的发展趋势,本章还介绍自主程序开发与 ANSYS 前后处理器的衔接技术,并提供相应的接口程序。

第 11 章为基于 ANSYS 平台的有限元建模与分析,ANSYS 是目前最为普及的著名有限元分析软件,本章以典型实例介绍基于图形界面(GUI)的交互式操作(step by step)、log 命令流文件的调入操作、完全的直接命令输入方式操作、APDL 参数化编程等几种操作方式,所涉及的问题为平面问题、空间问题、振动分析、材料非线性分析。

第 12 章为基于 MARC 平台的有限元建模与分析,MARC 是另一个著名的有限元分析软件,本章同样基于四类典型的实例来介绍相应的有限元建模和分析过程。

本书的第 1 篇为有限元分析基本原理,可作为高年级本科生或初学者的入门教材,约需 32~40 学时;第 2 篇为有限元分析的扩展内容,可作为研究生或中级水平读者的教材,约需 32 学时;第 3 篇为有限元分析的建模、软件平台及实例分析,是专门为已具有较高水平且希望采用有限元方法解决复杂实际问题的读者编写的,其中的部分内容也可作为本科生或研究生课程上机练习的配套内容(基于 ANSYS 或 MARC)。书中各章中的参考内容可作为课堂教学的补充,不是必学内容,但对于希望进一步研究有限元方法及理论的读者,这些内容具有非常重要的参考价值。本书在每一章中重点突出有限元方法的思想、数理逻辑及建模过程,强调相应的工程概念,提供典型例题及详解,许多例题可作为读者进行编程校验的标准考题(Benchmark),每一章都对主要内容给出相应的要点,还提供更多参考内容,以介绍一些较新的研究进展,使读者能够触及该领域的一些前沿和深层次成果,书中的许多实例取自于作者的科研工作积累,具有较好的实际背景,其中的部分研究工作还得到了国家自然科学基金项目(59825117, 50175060)的资助。本书还给出中文关键词索引、英文关键词索引,以方便读者学习有限元分析中的专业词汇;在配书光盘(CD-ROM)中,提供了基于 Fortran 和 C 语言的有限元分析源程序、与 ANSYS 前后处理器衔接的接口程序、四类典型问题的 ANSYS 操作指南和 MARC 操作指南等。

本书的内容曾在清华大学研究生学位课“有限元分析及应用”中讲授多年,并借鉴国内外的一些研究成果,经过不断充实更新而完成;该课程于 2002 年被清华大学研究生院列为首批精品课建设课程。

清华大学机械工程系的方刚副教授、雷丽萍博士,以及博士研究生娄路亮、孔劲、杨学贵,硕士生孙德林、李莹、杨濯在本书的编写过程中付出了许多辛勤的劳动,并仔细校审了本书的初稿和例题。博士生孔劲、硕士生赵瑞海还分别调试了书中第 10 章有限元分析 Fortran 程序和 C 程序,石刚博士和娄路亮参加编写了第 11 章的内容,雷丽萍博士、蒋昱硕士参加编写了第 12 章的内容。作者还特别感谢张惠玲女士、清华大学出版社的杨倩编辑对本书的重要贡献。

作 者  
2003 年 7 月于清华园

# 目 录

## 第 1 篇 有限元分析的基本原理

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| <b>第 1 章 绪论</b> .....                | 3  |
| 1.1 概况 .....                         | 3  |
| 1.2 有限元方法的历史 .....                   | 3  |
| 1.3 有限元分析的内容和作用 .....                | 5  |
| <b>第 2 章 有限元分析的力学基础</b> .....        | 7  |
| 2.1 变形体的描述、变量定义、分量表达与指标法 .....       | 7  |
| 2.2 弹性体的基本假设 .....                   | 11 |
| 2.3 平面问题的基本力学方程(分量形式, 指标形式) .....    | 12 |
| 2.4 空间问题的基本力学方程(分量形式, 指标形式) .....    | 20 |
| 2.5 弹性问题中的能量表示 .....                 | 26 |
| 2.6 特殊问题的讨论 .....                    | 28 |
| 2.7 典型例题及详解 .....                    | 33 |
| 2.8 本章要点及参考内容 .....                  | 37 |
| 2.9 习题 .....                         | 46 |
| <b>第 3 章 有限元分析的数学求解原理</b> .....      | 50 |
| 3.1 简单问题的解析求解 .....                  | 50 |
| 3.2 弹性力学问题近似求解的加权残值法 .....           | 56 |
| 3.3 弹性问题近似求解的虚功原理、最小势能原理及其变分基础 ..... | 61 |
| 3.4 各种求解方法的特点及比较 .....               | 69 |
| 3.5 典型例题及详解 .....                    | 71 |
| 3.6 本章要点及参考内容 .....                  | 75 |
| 3.7 习题 .....                         | 87 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第 4 章 杆梁结构的有限元分析原理 ..... | 90  |
| 4.1 有限元分析求解的完整过程 .....   | 90  |
| 4.2 有限元分析的基本步骤及表达式 ..... | 96  |
| 4.3 杆单元及其坐标变换 .....      | 99  |
| 4.4 梁单元及其坐标变换 .....      | 110 |
| 4.5 典型例题及详解 .....        | 124 |
| 4.6 本章要点及参考内容 .....      | 135 |
| 4.7 习题 .....             | 142 |
| 第 5 章 连续体的有限元分析原理 .....  | 144 |
| 5.1 连续体的离散过程及特征 .....    | 144 |
| 5.2 平面问题的单元构造 .....      | 144 |
| 5.3 轴对称问题及其单元构造 .....    | 159 |
| 5.4 空间问题的单元构造 .....      | 166 |
| 5.5 参数单元的一般原理和数值积分 ..... | 170 |
| 5.6 典型例题及详解 .....        | 178 |
| 5.7 本章要点及参考内容 .....      | 189 |
| 5.8 习题 .....             | 202 |

## 第 2 篇 有限元分析的误差、复杂单元及应用领域

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 第 6 章 有限元分析中的单元性质特征与误差处理 .....       | 209 |
| 6.1 单元节点编号与存储带宽 .....                | 209 |
| 6.2 形状函数矩阵与刚度矩阵的性质 .....             | 210 |
| 6.3 边界条件的处理与支反力的计算 .....             | 214 |
| 6.4 单元刚度阵的缩聚 .....                   | 218 |
| 6.5 位移函数构造与收敛性要求 .....               | 219 |
| 6.6 $C_0$ 型单元与 $C_1$ 型单元 .....       | 223 |
| 6.7 单元的拼片试验 .....                    | 224 |
| 6.8 有限元分析数值解的精度与性质 .....             | 225 |
| 6.9 单元应力计算结果的误差与平均处理 .....           | 228 |
| 6.10 控制误差和提高精度的 $h$ 方法和 $p$ 方法 ..... | 231 |
| 6.11 典型例题及详解 .....                   | 233 |
| 6.12 本章要点及参考内容 .....                 | 239 |
| 6.13 习题 .....                        | 246 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>第 7 章 有限元分析中的复杂单元及实现</b>               | 249 |
| 7.1 1D 高阶单元                               | 249 |
| 7.2 2D 高阶单元                               | 253 |
| 7.3 3D 高阶单元                               | 259 |
| 7.4 基于薄板理论的弯曲板单元                          | 263 |
| 7.5 子结构与超级单元                              | 270 |
| 7.6 特殊高精度单元                               | 272 |
| 7.7 典型例题及详解                               | 281 |
| 7.8 本章要点及参考内容                             | 285 |
| 7.9 习题                                    | 296 |
| <b>第 8 章 有限元分析的应用领域</b>                   | 298 |
| 8.1 结构振动的有限元分析                            | 298 |
| 8.2 弹塑性问题的有限元分析                           | 318 |
| 8.3 传热与热应力问题的有限元分析                        | 342 |
| 8.4 本章要点                                  | 355 |
| 8.5 习题                                    | 355 |
| <b>第 3 篇 有限元分析的建模、软件平台及实例</b>             |     |
| <b>第 9 章 有限元分析的实现与建模</b>                  | 361 |
| 9.1 有限元分析平台及分析过程                          | 362 |
| 9.2 有限元分析的离散方式与单元选择                       | 370 |
| 9.3 特征建模与等效建模                             | 376 |
| 9.4 逐级精细分析                                | 386 |
| 9.5 单元的“激活”技术                             | 387 |
| 9.6 多场耦合分析                                | 391 |
| 9.7 本章要点                                  | 392 |
| 9.8 习题                                    | 392 |
| <b>第 10 章 有限元分析的自主程序开发以及与 ANSYS 平台的衔接</b> | 394 |
| 10.1 连续体平面问题的有限元分析程序(Fortran)             | 394 |
| 10.2 连续体平面问题的有限元分析程序(C)                   | 411 |
| 10.3 自主程序开发与 ANSYS 前后处理器的衔接               | 429 |
| 10.4 习题                                   | 435 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| <b>第 11 章 基于 ANSYS 平台的有限元建模与分析</b> | 436 |
| 11.1 带孔平板的有限元分析                    | 436 |
| 11.2 带法兰油缸的有限元分析                   | 443 |
| 11.3 斜拉桥的有限元建模与振动模态分析              | 447 |
| 11.4 高压容器封头等温塑性成形过程的有限元分析          | 452 |
| <b>第 12 章 基于 MARC 平台的有限元建模与分析</b>  | 459 |
| 12.1 带孔平板的有限元分析                    | 461 |
| 12.2 带法兰油缸的有限元分析                   | 463 |
| 12.3 斜拉桥的有限元建模与振动模态分析              | 465 |
| 12.4 高压容器封头等温塑性成形过程的有限元分析          | 467 |
| <b>参考文献</b>                        | 471 |
| <b>中文索引</b>                        | 473 |
| <b>英文索引</b>                        | 483 |

# 简例及典型例题目录

|   |     |
|---|-----|
| 典型例题 2.7(1) 证明弹性力学解的惟一性问题 .....                 | 33  |
| 典型例题 2.7(2) 证明弹性力学中的叠加原理 .....                  | 34  |
| 典型例题 2.7(3) 证明各向同性的均匀弹性体的独立弹性常数<br>只有 2 个 ..... | 35  |
| 典型例题 2.7(4) 等倾面组成的八面体上的正应力和剪应力 .....            | 36  |
| 简例 2.8(1) 分析圆孔的应力集中问题 .....                     | 40  |
| 简例 2.8(2) 分析回转体在匀速转动时的弹性应力 .....                | 42  |
| 简例 2.8(3) 分析空心圆球受均布压力的弹性应力 .....                | 44  |
| <br>  |     |
| 简例 3.2(1) 受均布外载简支梁的 Galerkin 加权残值法求解 .....      | 57  |
| 简例 3.2(2) 受均布外载简支梁的残值最小二乘法求解 .....              | 59  |
| 典型例题 3.5(1) 受集中载荷简支梁的虚功原理求解 .....               | 71  |
| 典型例题 3.5(2) 平面悬臂梁的最小势能原理和加权残值法<br>求解 .....      | 72  |
| 典型例题 3.5(3) 用最小势能原理导出基于位移的平衡方程和力<br>边界条件 .....  | 74  |
| 简例 3.6(1) 用变分方法推导弹性地基梁的微分方程 .....               | 79  |
| 简例 3.6(2) 构造求解二维稳态热传导方程的积分泛函 .....              | 80  |
| <br>  |     |
| 简例 4.1(1) 1D 阶梯杆结构的有限元分析 .....                  | 90  |
| 简例 4.3(1) 梯形结构受重力作用下的有限元分析 .....                | 99  |
| 简例 4.3(2) 具有间隙的拉杆结构的有限元分析 .....                 | 101 |
| 简例 4.3(3) 四杆桁架结构的有限元分析 .....                    | 105 |
| 简例 4.4(1) 简支悬臂梁的有限元分析 .....                     | 113 |
| 简例 4.4(2) 平面框架结构的有限元分析 .....                    | 116 |
| 典型例题 4.5(1) 刚性梁连接的拉杆结构分析 .....                  | 124 |
| 典型例题 4.5(2) 匀速旋转杆件的有限元分析 .....                  | 127 |
| 典型例题 4.5(3) 悬臂梁受压的间隙接触问题 .....                  | 131 |

|   |     |
|---|-----|
| 简例 5.2(1) 高深悬臂梁平面问题的有限元分析                       | 151 |
| 简例 5.3(1) 受内压空心圆筒的轴对称有限元分析                      | 164 |
| 典型例题 5.6(1) 平面 4 节点矩形单元位移模式的讨论                  | 178 |
| 典型例题 5.6(2) 平面矩形结构的应变能和应变余能计算                   | 181 |
| 典型例题 6.11(1) 框架结构的节点编号与刚度矩阵的带宽                  | 233 |
| 典型例题 6.11(2) 耦合边界条件的 Lagrange 乘子法处理             | 234 |
| 典型例题 6.11(3) 平面梁形状函数矩阵和刚度矩阵的性质                  | 236 |
| 典型例题 7.7(1) 比较梁单元与板单元的特性                        | 281 |
| 典型例题 7.7(2) 比较高阶单元的求解精度                         | 283 |
| 简例 8.1(1) 无约束阶梯杆结构的轴向自由振动分析                     | 310 |
| 简例 8.1(2) 左端约束下阶梯结构的轴向自由振动分析                    | 311 |
| 简例 8.1(3) 左端约束下阶梯结构动态响应的有限元分析                   | 313 |
| 简例 8.2(1) 厚壁圆筒受内压的弹塑性分析                         | 327 |
| 简例 8.2(2) 考察一维问题的 Lagrange 网格(描述)和 Euler 网格(描述) | 331 |
| 简例 8.2(3) 二维纯剪问题的 Lagrange 网格(描述)和 Euler 网格(描述) | 333 |
| 简例 8.2(4) 基于 T. L. 格式的 2 节点杆单元                  | 337 |
| 简例 8.2(5) 基于 U. L. 格式的 2 节点杆单元                  | 340 |
| 简例 8.2(6) 非线性问题中静力隐式算法和动力显式算法的比较                | 341 |
| 简例 8.3(1) 构造平面 3 节点三角形传热单元                      | 347 |
| 简例 8.3(2) 四杆结构的温度应力分析                           | 349 |
| 简例 8.3(3) 无限长平板稳定温度场的有限元分析                      | 351 |
| 简例 9.3(1) 旋转周期结构的子结构处理                          | 384 |
| 简例 9.4(1) 悬臂薄板结构的逐级分析                           | 387 |
| 简例 9.5(1) 应用单元“激活”技术分析预紧结构的张拉工艺                 | 387 |
| 简例 10.1(1) 基于自主程序 FEM2D.FOR 的平面问题有限元分析          | 408 |
| 简例 10.2(1) 基于自主程序 JIEKOU.CPP 的平面问题有限元分析         | 427 |
| 简例 10.3(1) ANSYS 前后处理器与自主程序的衔接                  | 429 |

# 各章参考内容及重要列表目录

## 第 2 章

|  |    |
|--|----|
| 参考内容 1: 空间任意一点的应变状态及其主应变(第 2.8.2 节) …  | 37 |
| 参考内容 2: 平面极坐标系下的弹性问题(第 2.8.3 节) ……………… | 40 |
| 参考内容 3: 空间柱坐标系下的轴对称弹性问题(第 2.8.4 节) ……  | 41 |
| 参考内容 4: 球坐标系下的球对称弹性问题(第 2.8.5 节) …………… | 43 |

## 第 3 章

|  |    |
|--|----|
| 表 3.1 求解弹性力学方程的主要方法及其特点比较(第 3.4 节) …                 | 69 |
| 参考内容 1: 虚余功原理与最小余能原理(第 3.6.2 节) ………………               | 76 |
| 参考内容 2: 一般变分方法(第 3.6.3 节) ………………                     | 77 |
| 参考内容 3: 弹性问题求解的广义变分原理(第 3.6.4 节) ………………              | 81 |
| 参考内容 4: 平面梁、平面板、弯曲板的常用许可位移函数一览<br>(第 3.6.5 节) ……………… | 85 |

## 第 4 章

|   |     |
|---|-----|
| 表 4.5 梁单元的常用节点等效载荷(第 4.4.4 节) ………………        | 123 |
| 参考内容 1: 考虑剪切应变的一般梁单元(第 4.6.2 节) ………………      | 136 |
| 参考内容 2: 考虑剪切变形的 Timoshenko 梁单元(第 4.6.3 节) … | 139 |

## 第 5 章

|  |     |
|--|-----|
| 表 5.1 常用的节点等效外载列阵(平面 3 节点三角形单元)<br>(第 5.2.1 节) ………………    | 150 |
| 参考内容 1: 面积坐标及三角形单元的推导(第 5.7.2 节) ………………                  | 189 |
| 参考内容 2: 体积坐标及四面体单元的推导(第 5.7.3 节) ………………                  | 193 |
| 参考内容 3: 等参元变换的条件及收敛性(第 5.7.4 节) ………………                   | 195 |
| 参考内容 4: 3 节点三角形单元与 4 节点矩形单元求解精度<br>的比较(第 5.7.5 节) ……………… | 199 |

**第 6 章**

|   |     |
|---|-----|
| 参考内容 1: 应力(应变)计算结果的重构与改善(第 6.12.2 节) .....                | 240 |
| 参考内容 2: $C_0$ 型问题 Wilson 非协调单元及拼片试验<br>(第 6.12.3 节) ..... | 243 |

**第 7 章**

|  |     |
|--|-----|
| 常用弯曲薄板单元一览(第 7.4.4 节).....                 | 269 |
| 参考内容 1: 基于薄板理论的协调板单元(第 7.8.2 节) .....      | 285 |
| 参考内容 2: 考虑剪切的 Mindlin 板单元(第 7.8.3 节) ..... | 290 |
| 参考内容 3: 常用 $C_0$ 型高阶单元一览(第 7.8.4 节) .....  | 292 |

**第 8 章**

|   |     |
|---|-----|
| 常用单元的质量矩阵(第 8.1.2 节).....                           | 302 |
| 参考内容 1: 振动模态分析的自由度缩减方法(第 8.1.5 节) .....             | 315 |
| 参考内容 2: 大变形动态非线性力学问题的构形描述及求解方法<br>(第 8.2.6 节) ..... | 330 |
| 表 8.1 Lagrange 网格和 Euler 网格的比较(第 8.2.6 节) .....     | 334 |
| 表 8.2 静力隐式算法和动力显式算法的比较(第 8.2.6 节) .....             | 342 |

**第 9 章**

|  |     |
|--|-----|
| 平面问题与无限大问题的特征建模(第 9.3.1 节).....            | 376 |
| 完全润滑接触问题的等效建模(第 9.3.2 节).....              | 377 |
| 螺栓连接中接触问题的等效建模(第 9.3.2 节).....             | 378 |
| 刚性连接中的等效建模(第 9.3.2 节).....                 | 379 |
| $C_0$ 型问题与 $C_1$ 型问题之间的连接(第 9.3.2 节) ..... | 380 |
| 约束不足情况的处理(第 9.3.2 节).....                  | 383 |
| 刚架问题(第 9.3.2 节).....                       | 384 |
| 旋转周期结构的处理(第 9.3.3 节).....                  | 384 |

第 1 篇

有限元分析的基本原理





# 第 1 章 絮 论

## 1.1 概况

人类认识客观世界的第一任务就是获取复杂对象的各类信息,这是人们从事科学研究、进行工程设计的基础。理论分析、科学实验、科学计算已被公认为并列的三大科学研究方法,甚至对于某些新型领域,由于科学理论和科学实验的局限,科学计算还不得不惟一的研究手段。就工程领域而言,有限元分析(finite element analysis)是进行科学计算的极为重要的方法之一,利用有限元分析可以获取几乎任意复杂工程结构的各种机械性能信息,还可以直接就工程设计进行各种评判,可以就各种工程事故进行技术分析。1990年10月美国波音公司开始在计算机上对新型客机B-777进行“无纸设计”,仅用了三年半的时间,于1994年4月第一架B-777便试飞成功,这是制造技术史上划时代的成就,其中在结构设计和评判中就大量采用有限元分析这一重要手段。据有关资料,一个新产品的问题有60%以上可以在设计阶段消除,如果人们有先进的精确分析手段,就可以在产品设计(包括结构和工艺设计)时进行参数分析和优化,在最短的时间里制定新工艺,以获得高品质的产品,而工程计算和评判将在这一过程中起关键作用。

有限元方法(finite element method)是求解各种复杂数学物理问题的重要方法,是处理各种复杂工程问题的重要分析手段,也是进行科学研究的重要工具。该方法的应用和实施包括三个方面:计算原理、计算机软件、计算机硬件。这三个方面是相互关联的,缺一不可。正是由于计算机技术的飞速发展,才使得有限元方法的应用如此广泛和普及,使之成为最常用的分析工具,目前,国际上有90%的机械产品和装备都要采用有限元方法进行分析,进而进行设计修改和优化。实际上有限元分析已成为替代大量实物试验的数值化“虚拟试验”(virtual test),基于该方法的大量计算分析与典型的验证性试验相结合可以做到高效率和低成本。

## 1.2 有限元方法的历史

20世纪40年代,由于航空事业的飞速发展,对飞机结构提出了愈来愈高的要求,即重量轻、强度高、刚度好,人们不得不进行精确的设计和计算,正是在这一背