21世纪高职高专规划教材

高等数学

2 8 7 6 0
1 6 4 8 3

李毅夫 主 编
于 萍 副主编

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21 世纪高职高专规划教材

高 等 数 学

李毅夫　主　编
于　萍　副主编

北京信息工程学院图书馆

北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书精选了高职高专工科各专业必要的高等数学基本知识。全书共分为8章，内容包括函数与极限，导数与微分，不定积分，定积分，定积分在几何上的应用，多元函数微分学，无穷级数和微分方程。

从高职高专教学突出实践、突出应用的主导思想出发，本书对高等数学的传统教学内容进行了较大的精简，并使用了浅显易懂的语言和生动趣味的引例，以求使读者用较少的学时，学到符合高职高专培养目标和满足后续课程及以后实践、应用所需要的高等数学知识。为此，本书适当地降低了理论性内容的深度，突出了应用性内容的论述与练习。

本书特别适合作为高职高专高等数学教材，也可作为工科专科、函授或电大有关专业的高等数学教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李毅夫主编. —北京：北京交通大学出版社，2004.2
(21世纪高职高专规划教材)
ISBN 7-81082-230-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第122455号

责任编辑：韩 乐　　特邀编辑：高振宇
出 版 者：北京交通大学出版社　　电话：010-51686045，62237564
北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开 本：787×1092 1/16　印张：10.75　字数：268千字
版 次：2004年2月第1版　2004年2月第1次印刷
印 数：1~5000册　定价：17.00元

21世纪高职高专规划教材
编审委员会成员名单

主任委员　李兰友　边奠英

副主任委员　周学毛　崔世钢　王学彬　丁桂芝　赵　伟　韩瑞功　汪志达

委　　员　（按姓名笔画排序）

马　辉	万志平	万振凯	王永平	王建明
尤晓玮	丰继林	左文忠	叶　华	叶　伟
付晓光	付慧生	冯平安	江　中	佟立本
刘　炜	刘建民	刘　晶	曲建民	孙培民
邢素萍	华铨平	吕新平	陈小东	陈月波
李长明	李　可	李志奎	李　琳	李源生
李群明	李静东	邱希春	沈才梁	宋维堂
汪　繁	张文明	张权范	张宝忠	张家超
张　琦	金忠伟	林长春	林文信	罗春红
苗长云	竺士蒙	周智仁	孟德欣	柏万里
宫国顺	柳　炜	钮　静	胡敬佩	姚　策
赵英杰	高福成	贾建军	徐建俊	殷兆麟
唐　健	黄　斌	章春军	曹豫莪	程　琪
韩广峰	韩其睿	韩　劼	裘旭光	童爱红
谢　婷	曾瑶辉	管致锦	熊锡义	潘玫玫
薛永三	操静涛	鞠洪尧		

前　　言

本书是全国21世纪高职高专规划教材之一，是编者依据高职高专培养实践型、应用型人才的培养目标，在多年的高等数学教学中，经过反复实践，认真总结经验，针对高职高专高等数学教材进行教学改革的一种探讨和尝试。

本教材的主要特点表现在以下两个方面。

1. 重视应用和实践。本书在编写过程中，努力贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的高职高专教学理念，在保证科学性的前提下，注意做到：教材的编写要着眼于提高学生在后续课程和生产科研中运用高等数学解决实际问题的能力。为此，对于在后续课程和生产科研中得到广泛应用的内容，在书中进行反复讲解，大量练习；而对于理论性强但应用性较弱的内容，则努力降低理论上的论证与要求。如教材第1章中的函数与极限部分，本书打破理论性较强的传统讲法，不用所谓 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 语言，仍可在确保科学性的情况下，成功地完成了所有教学任务。

2. 由浅入深，循序渐进，激发兴趣，便于自学。本书对于高等数学中许多不好理解、不好掌握的内容，注意做到：在这部分内容前，安排浅显易懂或引人入胜的引例。这有利于读者循序渐进地学习和培养学习高等数学的兴趣。例如，幂级数是比较难学的，但通过引例 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ 的幂级数简洁解法，使读者切实感到这部分知识十分有用，进而激发他们学习的兴趣和积极性。

本书第1章、第6章、第7章由李毅夫编写，第2章由于萍编写，第3章由龚晓岚编写，第4章由胡柏新编写，第5章由陈影编写，第8章由何金敏编写。全书由李毅夫任主编，于萍任副主编，参编人员还有张煜、陈培。徐贵生对本书初稿进行了校阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

编者深知，本教材的编写实属在教改大潮中的一种探索，意在抛砖引玉。由于能力、水平所限，加之时间仓促，本教材的编写必有不足之处，欢迎提出宝贵意见。

编　者

2004年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　函数与极限

高等数学的基础是极限。许多高等数学的内容，例如导数、定积分、广义积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数等，都是特定意义下的极限。但是，极限的基础又是什么呢？极限的基础是无穷小。那么，无穷小的基础是什么？无穷小的基础是形形色色的变量，它包括自变量与因变量(即自变量的函数)。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。极限方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数、极限、函数的连续性等高等数学的一些最基本的内容。

1.1　函数

1.1.1　区间

区间是在高等数学中经常用到的一类数集。由于本书内容只涉及一元函数，故本书中的区间，都是 x 轴上某类点的集合。

以下设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$。

数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为**开区间**，记作$(a,\ b)$，在数轴上表示如图 1－1 所示。

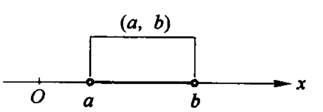

图 1－1

数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作$[a,\ b]$，在数轴上表示如图 1－2 所示。

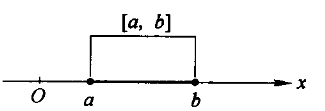

图 1－2

数集

$$\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

称为**半开区间**，记作$[a,\ b)$，在数轴上表示如图 1－3 所示。

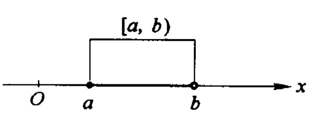

图 1－3

数集

$$\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

称为**半开区间**，记作$(a,\ b]$，在数轴上表示如图 1－4 所示。

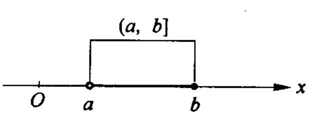

图 1－4

以上 4 种区间称为**有限区间**。

此外，还有所谓**无限区间**。首先认识一下表示无限的几个符号：$+\infty$读做“正无穷大”；$-\infty$读做“负无穷大”；∞读做“无穷大”。

数集

$$\{x \mid a<x\}$$

称为**无限开区间**，记作$(a,\ +\infty)$，在数轴上表示如图 1－5 所示。

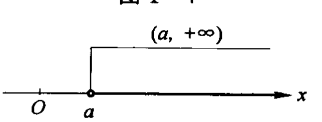

图 1－5

数集

$$\{x \mid x \leqslant b\}$$

称为**无限半开区间**，记作$(-\infty, b]$，在数轴上表示如图 1－6 所示。

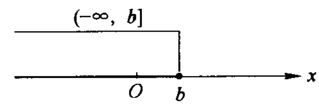

图 1－6

类似地，还有无限区间$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, +\infty)$。它们所对应的点集和图形，请读者自行画出。

注意　∞不是数，而是一种处于无限运动过程的点。$+\infty$表示处于沿 x 轴正向无限运动过程的点，$-\infty$表示处于沿 x 轴反向无限运动过程的点，而∞表示$\pm\infty$。特殊情况下，即仅在表示自然数 n 趋于正无穷时，符号 $n\to\infty$中的∞表示$+\infty$。

1.1.2　邻域

高等数学中，经常要用到邻域的概念。所谓**邻域**，就是某一点邻近的点集。具体有以下两种。

点 a 的δ 邻域为：开区间$(a-\delta, a+\delta)$，其中 $\delta>0$。

点 a 的去心的δ 邻域为：$(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$，其中 $\delta>0$。

对于以上两种邻域的区间表示式，读者可自行画出它们的图形。

1.1.3　函数的概念

1. 常量与变量

在研究过程中保持一定数值的量称为**常量**，而在研究过程中可以取不同的数值的量称为**变量**。常量与变量是相对的，在这个过程中的常量可能就是另一过程中的变量，常量也可以理解成不变的变量。

2. 函数的定义

定义 1－1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与变量 x 对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)。\tag{1-1}$$

其中，给定的数集 D 叫做函数$y=f(x)$的**定义域**，x 叫**自变量**，y 叫**因变量**。因变量 y 取值的范围

$$W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}\tag{1-2}$$

叫做函数的**值域**。

由于定义 1－1 只要求“有确定的数值与变量 x 对应”，并没有要求“有惟一的值与 x 对应”，因此对于自变量 x 取定的一个值，y 可以有一个，也可以有多个值与之对应；在前一种情况下称 y 为**单值函数**，在后一种情况下称 y 为**多值函数**。本书只考虑 y 是单值函数的情况。

例 1－1　函数

$$y=x^2$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，图形如图 1-7 所示。

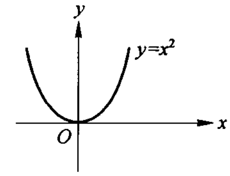

图 1-7

例 1-2 函数

$$y=x^3$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=(-\infty, +\infty)$，图形如图 1-8 所示。

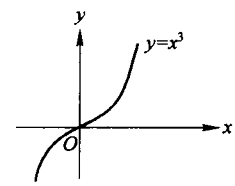

图 1-8

例 1-3 函数

$$y=\frac{1}{x}$$

的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，值域 $W=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，图形如图 1-9 所示。

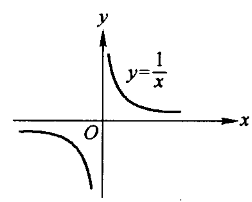

图 1-9

例 1-4 函数

$$y=6$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=6$，图形如图 1-10 所示。

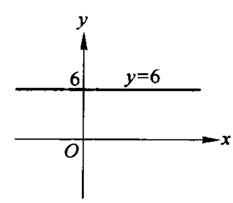

图 1-10

虽然例 1-4 是一类极为简单的函数；但是，许多初学者在实际计算中，却会感到十分困难。为此，请读者做如下练习。

设 $f(x)=6$，求下列函数值：

$f(1)$，$f(5)$，$f(100)$，$f(-800)$，$f(0.1)$，$f(-1000)$，$f(x-5)$，$f(x^2)$

分别等于多少？又若 $f(x)=600$，求下列函数值：

$f(1)$，$f(5)$，$f(100)$，$f(-800)$，$f(0.1)$，$f(-1000)$，$f(x-7)$，$f(x^2+x+1)$

各等于多少？

例 1-5 函数

$$y=|x|$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，该种函数称为**绝对值函数**，图形如图 1-11 所示。

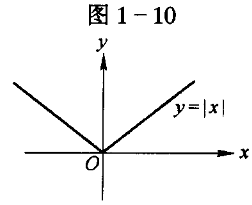

图 1-11

研究表明，函数研究必须考虑函数的 3 个要素：

(1) 定义域；

(2) 值域；

(3) 对应关系。

例 1-6 设 $f(x)=\lg x^4$，$g(x)=4\lg x$。它们是否为同一函数？为什么？

答 它们不是同一函数，因为它们的定义域不同：$f(x)$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；而 $g(x)$的定义域为$(0, +\infty)$。

例 1-7 函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，函数的图形如

图 1－12所示。

例 1－8 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases},$$

求 $f(-2)$，$f(3)$，$f(0)$。

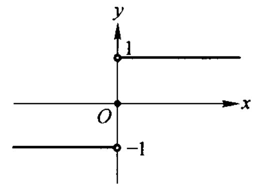

图 1－12

解 $f(-2)=-2-1=-3$，$f(3)=3+1=4$，$f(0)=0+1=1$。

例 1－7 和例 1－8 所给的函数在不同的区间具有不同的表达式，这类函数叫做**分段函数**。

1.1.4 函数的几种特性

1．函数的有界性

定义 1－2 设 D 为某点集，对于 $x\in D$，函数 $f(x)$有定义。如果存在某一正数 M，使得对 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1－3}$$

则称函数 $f(x)$在 D 内**有界**。如果找不到这样的正数 M，则称 $f(x)$在 D 内**无界**。

例如，$f(x)=\sin x$，由于对 $x\in(-\infty,+\infty)$都有 $|f(x)|=|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界。而对于函数 $g(x)=x+1$，且 $x\in(-\infty,+\infty)$，却找不到这样一个正数 M，使得 $|g(x)|=|x+1|\leqslant M$，所以 $g(x)=x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界。

在求极限等后续课程中经常要用到函数的有界性，因此，必须记住两个常用的在$(-\infty,+\infty)$内有界的函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$。

2．函数的奇偶性

定义 1－3 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，如果对任一$(-x)\in D$，恒有：

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**。

注意 函数的奇偶性，容易使人产生误解，认为函数只有奇函数和偶函数两类。其实，还有很多函数，它们既不是奇函数，也不是偶函数，这类函数我们称之为**非奇非偶函数**。

例 1－9 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；(2) $f(x)=x+\sin x$；(3) $f(x)=x+1$。

解 (1) $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，故 $f(x)$为偶函数；

(2) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，故 $f(x)$为奇函数；

(3) $f(-x)=-x+1$，$f(-x)$既不等于 $-f(x)$，又不等于 $f(x)$；所以该函数为非奇非偶函数。

函数的奇偶性在图形上体现为：奇函数的图形是关于原点对称的，偶函数的图形是关于 y 轴对称的。偶函数图形的例子参见图 1－7、图 1－10 和图 1－11，奇函数图形的例子参见图 1－8、图 1－9 和图 1－12。

函数的特性一般还有单调性、周期性等，这些内容在中学教材中已作了较详细的介绍，故在此从略。

习题 1.1

1. 将下列 x 的范围表示为区间：

(1) $-1\leqslant x\leqslant 2$； (2) $0\leqslant x<6$； (3) $x<-5$； (4) $x>10$；
(5) $3<x<7$； (6) $|x|<1$； (7) $|x|>2$； (8) $|x|\leqslant 3$；
(9) $|x|\geqslant 6$； (10) $|x|<\delta$，$\delta>0$。

2. 下列函数是否为同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin(x^2)$；
(2) $f(x)=\lg x^3$，$g(x)=3\lg x$；
(3) $f(x)=\lg x^{30}$，$g(x)=30\lg x$；
(4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+1}$，$g(x)=1$。

3. 画出下列函数的图形，并求下列函数在给定点处的函数值：

(1) $f(x)=x^2+1$，$x=0$，$x=a$，$x=a+b$，$x=x_0+\Delta x$；
(2) $f(x)=9$，$x=0$，$x=a$，$x=a+b$，$x=x_0+\Delta x$；
(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，$x=-1$，$x=0$，$x=10$；
(4) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ 2x, & x<1\end{cases}$，$x=-1$，$x=0$，$x=1$，$x=2$，$x=10$。

4. 下列函数是否为有界函数，为什么？

(1) $f(x)=\sin x+1$；
(2) $f(x)=x^2+1$；
(3) $f(x)=\cos(x^2+1)$；
(4) $f(x)=|x|$。

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；
(2) $f(x)=|x|$；
(3) $f(x)=\cos(x^2+1)$；
(4) $f(x)=\sin x+1$；
(5) $f(x)=x^3-x^2+5$；
(6) $f(x)=x\cos x$。

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

1. 幂函数 $y=x^\mu(\mu\in\mathbb{R})$

幂函数的一个特点是：随着常数 μ 取值的不同，函数的定义域、值域有所不同。可参考

例 1－1、例 1－2、例 1－3 和例 1－4。幂函数的另一个特点是：函数曲线都经过(1，1)这一点。

2．指数函数　$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$

指数函数 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，值域是$(0,\ +\infty)$。

指数函数的一个特点是：函数的单调性随 a 取值不同而不同。当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加。详见图 1－13 和图 1－14。

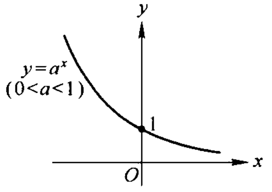

图 1－13

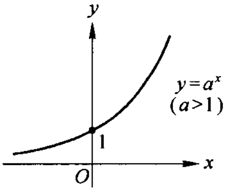

图 1－14

指数函数的特殊情况是：$y=\mathrm{e}^x$。其中，底数 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$是无理数。高等数学中提到的指数函数一般就指 $y=\mathrm{e}^x$，它是科技中常用的函数。$\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$的来源将会在后面几节介绍。

3．对数函数　$y=\log_a x\quad (a>0,\ a\neq 1)$

对数函数的定义域、值域与指数函数的定义域、值域正好相反，它的定义域是$(0,\ +\infty)$，值域是$(-\infty,\ +\infty)$。详见图 1－15 和图 1－16。

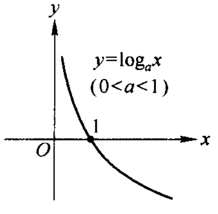

图 1－15

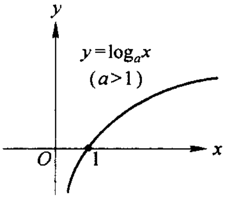

图 1－16

由图 1－15 和图 1－16 知道，对数函数 $y=\log_a x$ 随 a 取值不同而具有不同的单调性。

需要特别**注意**当对数函数的底数 $a=\mathrm{e}$ 时的特殊情况。这时，对数函数记为 $y=\ln x$。高等数学中提到的对数函数一般就指 $y=\ln x$。

4．三角函数

表 1－1　正弦、余弦、正切、余切三角函数

函　　数	定　义　域	值　　域
正弦函数　$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$[-1,\ 1]$
余弦函数　$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$[-1,\ 1]$
正切函数　$y=\tan x$	$x\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathrm{Z}$	$(-\infty,\ +\infty)$
余切函数　$y=\cot x$	$x\neq k\pi,\ k\in\mathrm{Z}$	$(-\infty,\ +\infty)$

表 1－1 中函数的图形见图 1－17、图 1－18、图 1－19 和图 1－20。图 1－17～图 1－20 中一些特殊的点请读者自行给出。

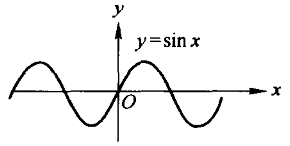

图 1－17

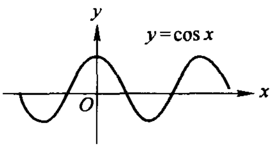

图 1－18

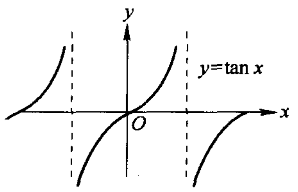

图 1－19

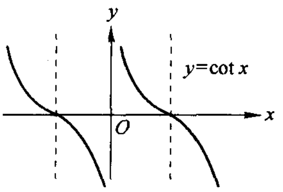

图 1－20

此外，还有正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$。这两个函数，在高等数学中也经常要用到。请注意有关的公式：

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x};$$

$$y=\csc x=\frac{1}{\sin x};$$

$$\sec^2 x=\tan^2 x+1;$$

$$\csc^2 x=\cot^2 x+1。$$

常用的三角公式还有：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;$$

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2};$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}。$$

5. *反三角函数*

表 1－2　常用反三角函数的主值

函　　数	定 义 域	值　　域
$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y=\text{arccot}\, x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

需指出，幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**。

1.2.2 复合函数

引例 1－1 设 $y=e^u$，而 $u=\sin x$，则将 $u=\sin x$ 代入 $y=e^u$，可得

$$y=e^{\sin x}。$$

于是，我们称 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的所谓复合函数，把 u 称为中间变量。

定义 1－4 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若 $y=f[\varphi(x)]$ 有意义，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，称 u 为**中间变量**。

例 1－10 $y=\sin u$，$u=5+x^2$，则 $y=\sin(5+x^2)$ 就是以 $u=5+x^2$ 为中间变量的复合函数。

注意 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，对于 $y=\arcsin u$ 和 $u=5+x^2$，则 $y=\arcsin(5+x^2)$ 就不是复合函数，因为 $y=\arcsin(5+x^2)$ 没有意义。

复合函数也可以由多个中间变量复合而成。例如，$y=\cos u$，$u=e^v$，$v=x^2$，就有 $y=\cos e^{x^2}$。

例 1－11 求由下列所给函数复合而成的复合函数，并求指定点处的函数值：

(1) $y=u^3$，$u=\cos x$，在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^3$，在 $x=1$ 处。

解 (1) 复合函数 $y=\cos^3 x$，$y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$。

(2) 复合函数 $y=\sqrt{1+x^3}$，$y\Big|_{x=1}=\sqrt{2}$。

例 1－12 写出中间变量并分解下列函数：

(1) $y=(2x+5)^8$；(2) $y=\dfrac{\sin(2x+1)}{2x+1}$；(3) $y=e^{\cos\frac{1}{x}}$。

解 (1) $y=u^8$，$u=2x+5$；

(2) $y=\dfrac{\sin u}{u}$，$u=2x+1$；

(3) $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{x}$。

1.2.3 初等函数

定义 1－5 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的并且可以用一个式子表示的函数，叫做**初等函数**。

例如，$y=(2x+5)^8$，$y=\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}$，$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是初等函数；而 $y=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots$ 就不是初等函数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com