高等教育自学考试
党政干部基础科辅导材料 15

# 高等数学自学辅导

(49)

四川省社会科学院出版社

高等教育自学考试
党政干部基础科辅导材料（十五）

# 高等数学自学辅导

四川大学数学系高等数学课程小组编写
四川学习杂志社编辑

封面设计：张复祥


**高 等 数 学 自 学 辅 导**

《高等教育自学考试党政干部基础科辅导材料》（15）

四川大学数学系高等数学课程小组编写　　四川学习杂志社编辑

四川省社会科学院出版社出版

四川省新华书店发行　　新都县印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.625　字数：150千

1985年2月第1版　1985年3月第1次印刷　印数：1—42,000册

书号：13316·2　　定价：0.75元

# 出版说明

为了帮助参加党政干部基础科考试的广大干部进行自学和复习，根据四川省高等教育自学考试指导委员会的安排，我们将出版一套"高等教育自学考试党政干部基础科辅导材料"。这套辅导材料，包括辩证唯物主义历史唯物主义、政治经济学、中共党史、逻辑学、科学社会主义、中国近代史、国民经济管理概论、写作、文学概论、法学概论、国际政治、世界近代史、高等数学、自然科学基础知识等所有开考课程。每科各出一辑，全套材料将根据开考时间的先后在1984年或多一点时间内陆续出齐。

本套材料各辑的内容包括如何自学，自学考试大纲，复习思考题以及部分复习思考题参考答案要点等。辅导材料力求从帮助广大干部自学出发，提纲挈领，对难点、重点作些必要的阐释讲解，文字通俗简练，可供参加党政干部基础科考试的同志参考。

这套材料由主考单位四川大学根据省高等教育自学指导委员会指定的教材和教育部推荐的教学大纲编写的。

编　者

# 目　录

## 第三章　一元函数的微分学



## 第四章　中值定理　导数的应用



## 第五章　不定积分

# 第六章　定积分

# 高等数学自学考试大纲

四川大学高等数学课程小组

数学是现代科学中的基础科学，它不仅在各门自然科学和各种技术领域中有重要的应用，而且在研究国民经济以及实现管理现代化等社会科学方面，也愈来愈显示其重要作用。为实现四个现代化，把我国建设成为社会主义强国，数学势必成为各门科学中不可缺少的工具。马克思曾说，一门科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

学习数学，首先要掌握基本概念、基本理论和基本运算方法。通过学习，培养抽象思维能力，逻辑推理能力和运算能力。学习高等数学是为进一步学习现代数学及其它专业课程打下必要的基础。不仅如此，学习高等数学对于建立辩证唯物主义的世界观也是有裨益的。“初等数学，即常数的数学是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的来说是这样；而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的应用。”“辩证思维对形而上学思维的关系，和变数数学对常数数学的关系是一样的。”（恩格斯《反杜林论》）所以“要确立辩证的同时又是唯物主义的自然观，需要具备数学和自然科学的知识”。（同上书）

本课程主要内容为一元函数的微积分。

在自学本课程时，应该准确地理解和掌握微积分中的一些基本概念和性质，熟练地运用各种定理和运算公式；对计算结果能作出正确的解释和结论；解题方法力求简洁，并注意步骤的完整性；应能结合所学理论去分析和解决一些简单的实际问题。对于定理和法则不要求加以严格的证明。

考虑到读者自学的特点，故于本大纲后增添一个“附注”，对各部分内容加以简要的补充说明，以期对自学者有所帮助。

## 一　函　数

### 1．集　合

集合的概念及表示法。子集合。交集。并集。集合的运算律。

实数与数轴。

### 2．函　数

常量与变量。绝对值。区间。邻域。函数的定义及其表示法。函数的定义域、值域。分段函数。建立函数关系举例。函数的简单性态——有界性，奇偶性，单调性与周限性。复合函数的概念。反函数的概念。

基本初等函数及其图形。

## 二　极限与连续

### 1．极限概念

数列极限的定义。函数极限的定义。函数的左、右极限及其与函数极限的关系。

### 2．无穷小量与无穷大量

无穷小量及其性质。无穷小量与极限的关系。无穷小量的阶。无穷大量及其与无穷小量的关系。

3．极限的运算

极限的四则运算。极限存在的准则。两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

4．函数的连续性

自变量的改变量与函数的改变量。连续函数的定义。间断点。连续函数的和、差、积、商的连续性。复合函数的连续性。初等函数的连续性。闭区间上连续函数的性质——有界性、介值性及其取得最大值、最小值。

## 三　一元函数的微分学

1．导　数

引出导数概念的实例。导数的定义。导数的几何意义。可导与连续的关系。

函数的和、差、积、商的求导法则。复合函数与隐函数的导数。基本初等函数的导数公式。

2．高阶导数

二阶导数。高阶导数的定义。

3．微　分

微分的定义及其几何意义。微分运算法则。微分形式不变性。

微分在近似计算及其在误差估计中的应用。

4．导数在函数研究中的应用

罗尔(Rolle)定理。拉格朗日(Lagrange)中值定理及其推论。这两个定理的几何说明。柯西(Cauchy)定理。

泰勒(Taylor)公式及其拉格朗日型余项。

罗彼塔(L'Hospital)法则。

函数的单调性及其判别法。函数的极值及其求法。最大值与最小值及其应用问题。曲线的凸凹性及其判别法。拐点。渐近线。函数的作图。

## 四　一元函数的积分学

1．不定积分概念及其计算

原函数。不定积分的定义。不定积分的几何意义。不定积分的基本性质。基本积分公式。换元积分法。分部积分法。积分表的使用。

2．定积分概念及其计算

引出定积分概念的实例。定积分的定义。定积分的几何意义。定积分的基本性质。定积分的中值定理。定积分与不定积分之间的关系。定积分的换元法与分部积分法。两个广义积分的定义及计算方法。

3．定积分的应用

定积分在几何上的应用——平面图形的面积，已知平行截面面积的立体体积，旋转体的体积。

定积分在经济方面的应用。

# 关于《高等数学自学考试大纲》的说明

四川大学高等数学课程小组

## 一　函　数

1．重　点

函数的概念。定义域、函数关系、值域。基本初等函数及其定义域，图象和性质。反函数、复合函数的概念。

2．难　点

反函数，复合函数的概念。

3．要　求

1)掌握集合，区间与邻域的概念，并能把区间与邻域在数轴上表示出来。

2)准确掌握函数概念，分段函数的意义。能把具体问题建立成函数关系。

3)熟悉基本初等函数的解析表达式、定义域、值域，图形及其性质。

4)熟练地运用函数复合的方法，将较复杂的函数分解成由几个简单函数复合而成的形式。

5)会求函数的定义域。掌握函数的简单性态。

## 二　极限与连续

1．重　点

极限的概念。无穷小概念。极限的四则运算法则。函数的连续性。

2. 难 点

极限定义。函数在一点处连续的定义。

3. 要 求

1）通过几何图形或数字表，清楚理解数列极限、函数极限的概念，掌握极限的思想方法。并能用“$\varepsilon$——N”，“$\varepsilon$——$\delta$”语言叙述极限定义，以便在后面章节中遇到时不致陌生。不要求用极限的定义来求函数的极限，或证明有关极限的题目。

2）正确理解极限,无穷小，函数的连续性等基本概念以及它们之间的内在联系。

3）掌握有关无穷小量的几个性质。

4）能熟练运用极限的运算法则,并能应用两个重要极限来求极限。

5）准确理解函数连续性的概念，并能判断函数的间断点。

6）记住初等函数在其定义域内都是连续的函数。记住在闭区间上连续函数的三个基本性质。

## 三 一元函数的微分学

1. 重点

导数和微分的概念，它们的几何意义。

复合函数与隐函数的导数，初等函数的求导方法。

用罗彼塔法则求未定式的极限。

利用导数判定函数的增减性。函数的极值及求法。极值的应用题。

利用函数的增减性，凸凹性，拐点来作函数的图形。

2．难 点

复合函数与隐函数的导数。拉格朗日中值定理及其证明。利用极值解应用题。函数图形的作法。

3．要求

1）通过引入导数概念的四个实例，了解导数概念具有广泛的实际意义，并能应用该概念解决某些实际问题。

2）了解用定义求导数的"四个步骤"包含了两次否定的过程(注①)。是唯物辩证法中"否定之否定规律"在数学上一个很好的应用例子，但是不要求用导数定义求导数。

3）理解导数概念以及导数的几何意义。了解高阶导数的概念。掌握高阶导数的求法（求导数的导数）。

4）牢固记住并熟练运用导数的四则运算法则求导数；并与极限的四则运算法则加以区别，不要混淆。

5）对于复合函数的求导，初学者很不习惯，容易出错。解决的办法是在掌握复合函数概念的基础上多做练习。求导数时最好每一步都把中间变量写出来，多做几次。待到熟练之后，则可一气呵成。

6）理解微分概念。微分是函数增量的线性主部，它与导数概念之间的关系。知道微分在近似计算中的应用。

7）正确理解罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西定理，并弄清它们之间的联系。

8）能看懂拉格朗日中值定理的分析证明，弄清该定理的条件、结论以及几何意义。对该定理的推论也要熟悉，因在后两章的定理证明中要用到。

9）掌握应用罗彼塔法则的条件，会用罗彼塔法则求未定式的极限。

10）掌握判别函数的增减性、曲线的凹向、拐点的方法。

11）理解函数极值点、极值概念；掌握判别极值的方法；会利用极值解决有关最大值最小值的应用问题。

12）利用函数性态，会作函数的图形。

## 四　一元函数的积分学

1．重　点

原函数的概念。不定积分与定积分的概念以及它们之间的联系。基本积分公式。求不定积分的方法（即，换元积分法与分部积分法）。定积分的应用。

2．难　点

定积分的概念。不定积分与定积分之间的联系。换元积分法与分部积分法。

3．要　求

1）通过引入定积分概念的三个实例，了解定积分概念具有广泛的实际意义，并能运用这一概念去解决实际问题。

2）了解用定义求定积分的“四个步骤”所包含的两次否定过程(注②)。恩格斯曾指出：在“求无限小总和的运算中，否定的否定表现得更加明显。”

3）理解原函数、不定积分的概念以及几何意义。

4）掌握不定积分与定积分的各种性质，并能熟练地运用到求积分的运算中。

5）理解积分是微分的逆运算。掌握求不定积分的基本方法。主要是换元积分法与分部积分法。要达到较为熟练地进行积分运算，只有在掌握基本积分方法的基础上，熟练地运用基本积分表，多做练习，且从中积累经验，才能达到此目的，舍此别无它法。

6）能熟练地求各种初等函数的不定积分。

7）掌握定积分与不定积分之间的关系，并会用牛顿

(Newton)——莱布尼兹(Leibniz)公式计算定积分。

8）能运用定积分求解简单的应用题。重点是求一些常见平面曲线所围成图形的面积，及经济应用问题。

9）理解广义积分的意义以及计算方法。

注释：

①用定义求函数$y=f(x)$的导数的四个步骤如下：

第一步：变化。就是让自变量由$x$变到$x_1$(此变化是对$x$的否定)，从而函数由$y$变到$y_1$，则有$y_1=f(x_1)$。

第二步：求差。

$$\Delta x = x_1 - x$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_1 - y = f(x_1) - f(x) \\ &= f(x+\Delta x) - f(x)\end{aligned}$$

第三步：作比。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

第四步：扬弃差。即求极限。

让$\Delta x\to 0$，即$x_1\to x$(让$x_1$又变回到$x$，此变化是对$x_1$的否定。)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

②以定积分的几何意义——曲边梯形的面积为例。设函数$y=f(x)$是定义在区间〔a,b〕上的连续函数。

第一步：分　割。

将曲边梯形分成n个小块，相应地把区间〔a,b〕分成了长为$\Delta x_i$($i=1,2\cdots n$)的子区间。这一步通俗地说是“化整为零”，即是对整体的否定。

第二步：代　替。

在每个子区间$\Delta x_i$上分别任取一点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$。于是得到n个函数值$f(x_i)$。以n个乘积$f(x_i)\Delta x_i$代替分割出来的小曲边梯形的面积。

第三步：求　和。

把这n个乘积相加，设其和为$S_n$，即：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

第四步：取极限。

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

这一步通俗地说是“积零为整”，即是对第一次否定之否定。经过否定之否定这一过程的最终结果就得出了积分值$\int_a^b f(x)dx$。