教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模

杨启帆 主编
康旭升 赵雅囡 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

在应用数学知识开展科学研究或解决实际问题时，首先遇到的问题就是要建立相应的数学模型。本书以生动有趣的实例来阐明建立数学模型的基本技能和技巧，全书共分十章，包括微积分、微分方程、线性代数等各种数学知识在物理、医学、生态、经济、交通、军事等众多领域的广泛应用。在编写时，我们力求做到举例典型、内容通俗易懂，并尽量将建模方法与技巧寓于各种例题之中，以便读者能从各种实例中去体验这些方法和技巧。

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果，是为培养应用型人才而编著的教材，可用作普通高等院校，尤其是以培养创新性应用型人才为主要目的的独立二级学院等高等学校开设数学建模课程的教材，同时也可用作各类工程技术人员和实际工作者学习数学建模方法的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/杨启帆主编. —北京：高等教育出版社，2005.5

ISBN 7-04-014421-2

Ⅰ.数... Ⅱ.杨... Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 021415 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 姚　晖　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 吴文信
版式设计 张　岚　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京原创阳光印业有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 5 月第 1 版
印　　张	18.5	**印　　次**	2005 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	19.60 元

物料号　14421-00

前　言

为了解决各种实际问题、解释各种自然现象，人们首先必须去建立能较好描述实际问题的数学模型。建立数学模型并研究数学模型是人们探索奥秘、追求真理的过程中不可缺少的重要一环。建立数学模型是研究实际问题的起步，数学模型是对实际问题用数学工具所作出的近似描述，其后的研究都建立在对该数学模型研究的基础之上。就像盖房子必须先打好地基一样，要得出符合客观实际的研究结果，首先必须建立起符合客观实际的数学模型。从这一意义上讲，数学建模是一切创新工作的基础，科学研究离不开数学建模，开展实际课题研究也同样离不开数学建模。在建立数学模型的过程中有可能用到各种各样的数学知识，也可能用到各种各样的方法和技巧。同一个实际问题可以用不同的数学工具来加以研究，同一模型有时也可以用来描述不同的实际问题。实际问题是错综复杂的，没有一个模型可以做到与实际问题完全一致，我们所能做的只能是用数学模型来近似地反映实际问题。为了更好地描述实际问题，人们常常需要不断地修改模型，使两者尽可能地接近。

建立一个好的数学模型使之能真实地反映实际问题的本质属性并不是一件容易的事情，也没有一个统一的模式可以使用，但这并不等于说建模过程可以随心所欲，毫无规律可循。要建立起能反映实际问题本质属性的较好模型既需要建模者对实际问题有较深入的了解，又需要建模者具备多方面的能力。在多年的教学实践中我们发现，有相当数量的学生较习惯于老师讲、学生记，书上讲多少，我就学多少的学习方式，一旦遇到和书上讲的稍有不同的问题，就显得茫然不知所措，不知该如何办才好。一些学习成绩较好的同学则把“要像海绵吸水一样地吸取知识”定为自己的座右铭，很少有人去考虑在大学学习阶段，除了学习书本知识以外，是否还应当去学习一些其他的东西。其实，学生的任务不应当只是学习书本知识，学习的目的应当是掌握知识、增长才干。像海绵吸水一样地吸取知识固然重要，但增强竞争意识、提高自己各方面的能力也同样重要。我们所说的各方面的能力所指十分广泛，包括想像力、逻辑推理能力、灵活应用书本知识（例如数学知识）的能力、通过自学吸取新知识的能力、计算机使用能力、文字和口头表达能力、合作工作的组织协调能力甚至社交攻关能力等等。这些能力

并非生来就有的，需要学生平时有意识地去培养提高，这也是学生在校学习期间的学习任务之一。高等院校的主要任务之一是培养出尽可能多的综合素质高、实际能力强的创新型科研人才和创新性应用型人才，这就是为什么我们要花大力气进行教改，力图转变应试教育、灌输式教育，改变高分低能现象的原因。数学建模课就是在这一教改过程中产生的一门力图提高学生实际能力的课程，教学实践证明，数学建模课的开设的确可以起到激发学生学习兴趣、激发学生创新能力与竞争意识的作用，发挥了其他课程所无法取代的作用。

为加强对学生的素质教育，加强对学生创新能力的培养，浙江大学自 1983 年开始为学生开设了数学建模课。20 多年来，我们紧紧围绕着学校办学方向，持之以恒地坚持教学改革。我们在学校各级领导的关心、支持下，建立了国内高校中最早的专供学生课外实践用的“浙江大学数学建模基地”，我们的教改项目于 2001 年获得国家级教学成果二等奖，我们开设的数学建模课也于 2004 年被教育部授予首批国家级精品课程称号。目前，数学建模已成为浙江大学最受学生欢迎的品牌课程之一，数学建模实践已成为在校学生的一大爱好，学生综合素质有了极大提高，取得了可喜的人才培养效果。

近年来，我国的教育事业迅速发展，招生人数逐年递增。仅以浙江省为例，除原有高校招生人数均有较大幅度的增加以外，近五年中我省又新办了多所独立二级学院和民办高校，一批原先以专科教学为主的院校也先后转变为本科院校，担当起为我省经济建设战线培养高素质应用型人才的重任，其他省市的情况大体也是如此。为适应国家和本省经济建设的需要，为适应教育事业大发展的新形势，我们又开始关注起应用型人才培养的教学改革。我们认识到，国家建设不仅需要大批科学家、学科带头人，国家建设也同样需要为数更多的具有高素质的创新能力的应用型人才。从 2001 年起，我们先后在浙江大学城市学院、浙江大学宁波理工学院等独立二级学院开设出面向培养应用型人才的数学建模课程，到一些普通院校和民办高校举办讲座，初步摸索到了一些培养应用型人才的教学经验，也积累了一批较为实用的教案，本书就是在此基础上编著而成的。

全书共分十章，第一章介绍了数学建模的一些基本概念，强调了想像力的发挥和逻辑推理方法的应用在建模过程中的重要性。第二章介绍了一些仅用到初等方法和微积分知识的初等模型。第三章介绍了一些利用建立微分方程来研究问题的实例，并以举例说明的方法讲解了房室系统、集中参数法、工程师原则、统计筹算律等建模技巧和来自微分方程稳定性理论的某些较为深入的实例。第四章列举了线性代数中向量运算、矩阵运算、线性空间及基底、特征值与特征向量、矩阵的正交分解等初学者较难理解的概念在实际生活中的应用。第五章介绍了一些优化模型，除了介绍线性规划等数学规划中的若干典型模型以外，也介绍了一些基于进化原理的非典型模型。在第六章中，我们介绍了近几十年来出现的

计算复杂性理论，为了尽可能通俗易懂，我们放弃了某些严格的定义，代之以较容易被接受的叙述方式，希望能引起学生的学习兴趣，并逐渐接受离散优化领域的一些较新、较高深的观念。第七章介绍了来自对策与决策问题的一些实例，在对策问题中，我们只引入了不存在合作基础的零和对策，而没有去讨论其他类型的对策；在决策问题中，我们介绍了一些常用的决策方法，包括处理多阶段决策的决策树方法和处理较模糊问题决策的层次分析法。第八章介绍了几个应用逻辑推理方法研究问题的数学模型，以说明逻辑推理在建模中的作用。第九章介绍了概率统计方法的应用，以较易被接受的方式介绍了计算机模拟和具有广泛应用前景的正交拉丁方的使用方法。为了便于学生学习和掌握软件包，在最后的第十章中，我们对功能强大的Matlab软件作了一个较为简要的介绍，并配入了一些帮助理解的实例。

本书可用作以培养应用型人才为主要目的的普通高校、独立二级学院、民办高校中非数学类专业学生学习数学建模课程的教材，也可作为各类科技人员和工程技术人员在学习数学建模技巧时的参考读物。数学建模是一门实践性要求较强的课程，为了掌握建模技巧，学习者应当边学习边实践。我们的教学实践表明，学生只有积极参与建模实践才能真正掌握建模技巧，并迅速提高自己的综合素质和实际能力。老师只能引导学生入门，而掌握和熟练则只能靠学生自己去磨炼。为了有助于加强学生的实践环节，我们还将编著一些辅助教材，如《建模案例选》、《学生优秀建模论文》等，供有兴趣的读者参考。

数学建模作为一门课程还没有像微积分、线性代数等经典的数学课程那样成熟，加之我们的水平有限，视野不广，书中的缺陷与错误在所难免，恳请见谅，并欢迎广大读者批评指正。

作　者
2004年12月
于浙江大学城市学院

目　录

第一章　数学建模概论

随着电子计算机的出现和科学技术的迅猛发展，数学的应用已不再局限于传统的物理领域，而正以空前的广度和深度逐步渗透到人类活动的各个领域。生物、医学、军事、社会、经济、管理……各学科、各行业都涌现出大量的实际课题，亟待人们去研究、去解决。

利用数学知识研究和解决实际问题，遇到的第一项工作就是要建立恰当的数学模型（简称数学建模），数学建模正在越来越广泛地受到人们的重视。从这一意义上讲，数学建模被看成是科学研究和技术开发的基础。没有一个较好的数学模型就不可能得到较好的研究结果，所以，从这一意义上讲，建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键步骤之一。

§1.1　数学模型与数学建模

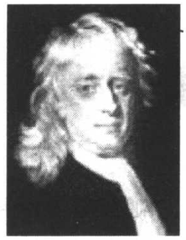
模型是客观实体有关属性的模拟。陈列在橱窗中展览的飞机模型是参照飞机实体的形状，严格按照一定的比例简缩而制成的，它的外形一定要像真正的飞机，至于它是否真的能飞则是无关紧要的；然而参加航模比赛的飞机模型则全然不同了，如果飞行性能不佳或飞不起来，外形再像飞机，也不能算是一个好的模型。

模型并非一定要是实体的一种仿照，也可以是对实体的某些基本属性的抽象。例如，一张电路图并不需要用实物来模拟，它可以用抽象的符号、文字和数字来反映出该电路的结构特征。

数学模型（Mathematical Model）作为模型的一类，也是一种模拟，是以数学符号、数学表达式、程序、图形等为工具对现实问题或实际课题的本质属性的抽象而又简洁的刻画，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略等。

数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它们的建立常常既需要人们对现实问题有比较深入细微的观察和分析，又需要人们能灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用各种知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程被称为数学建模（Mathematical Modeling）。为了更清楚地说明什么是数学建模，让我们来看一个具体实例。

例 1.1　万有引力定律的发现。



牛顿(1642—1727)是英国著名的物理学家、数学家和天文学家,是17世纪最伟大的科学巨匠。然而,对于一些在自然科学上一知半解的人来说,牛顿的赫赫声名与其说来自于他的科学发现,毋宁说是来自于那个妇孺皆知的苹果落地的传说。那是1666年夏末的一个傍晚,在英格兰林肯郡乌尔斯索普,一个腋下夹着一本书的年轻人走进了他母亲家的花园里,坐在一棵树下,开始埋头读他的书。正在他翻动书页时,他头顶上的树枝被风吹得晃动了起来。突然,“啪”的一声,一只历史上最著名的苹果落了下来,恰好打在了这位青年的头上。这位青年不是别人,正是时年23岁的牛顿。据说,牛顿当时正在苦苦思索着一个问题:是什么力量使月球保持在环绕地球运行的轨道上,又是什么力量使行星保持在其环绕太阳运行的轨道上?掉下的苹果打断了他的思索,“为什么这只苹果会坠落到地上呢?”牛顿转而考虑起这个使他感到困惑不解的问题。有人说正是从这一问题的思考中,他找到了答案,并提出了万有引力定律。

这一故事讲得有声有色,我们暂且不去管这一故事的真伪。树上掉下的苹果也许的确给过牛顿某种启示,但万有引力定律的诞生却绝非如此简单,事实上,它是几代人努力的结果。

15世纪中叶,哥白尼(1473—1543)冲破宗教势力的束缚,向长期统治人们头脑的地心说发起挑战,提出了震惊世界的日心说。按照哥白尼的理论,地球在一个以太阳为圆心的圆形轨道上作匀速圆周运动,绕太阳一周的时间叫一年。哥白尼的理论是科学史上的一次重大革命,不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识,而且根本动摇了欧洲中世纪宗教神学的理论基础。恩格斯称“从此自然科学便开始从神学中解放出来”,“科学的发展从此便大踏步前进”。

由于受到历史和科学水平的限制,哥白尼的学说也免不了包含着一些不尽如人意的缺陷。此后,丹麦著名的实验天文学家第谷(1546—1601)花了二十多年的时间观察当时已被发现的五大行星的运动情况,获得了十分丰富而又精确的第一手资料,他一生的奋斗目标就是提高观测的精确性,终身坚持准确细致的实地观测,并在去世前,把这些毕生精心观测的资料(包括700多颗恒星运行资料)都赠给了他晚年最大的发现——他的学生和助手开普勒(1571—1630),并且告诫开普勒:一定要尊重事实、尊重观察数据。

第谷遗留下来的资料浩如烟海,需要长期、耐心、细致地去研究。开普勒在对这些资料经过了长达九年的分析计算

后发现,第谷的观察结果与哥白尼的理论并不完全一致。例如,他在分析火星的公转时发现,火星的运行周期与运用哥白尼理论计算出来的结果大约要相差 1/8 度(一个周期为 360 度),开普勒十分了解第谷的习性,深信第谷的观察结果是精确无误的,不可能有这样大的误差,于是他认为产生这一误差的唯一原因就是火星有可能不是作当时人们普遍认为的匀速圆周运动。他以观察数据为依据,改用各种不同的几何曲线来表示火星的运动轨迹,发现火星应当是沿椭圆轨道绕太阳运行的,太阳在此椭圆的一个焦点上,而且其他行星的运行也是如此。接着他又发现,虽然行星运行的速度是不均匀的,在近日点时较快,在远日点时较慢,但是,从任何一点开始,在单位时间内,向径扫过的面积却是不变的。开普勒在计算出当时已知的五大行星的运行周期 T 和轨道长半轴 a 后,又发现了行星运行的某些规律(见表 1-1)。

表 1-1 五大行星运行周期及轨道长半轴(注:以地球为参照单位)

行　星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水　星	0.241	0.387	0.058 1	0.058 0
金　星	0.615	0.723	0.378	0.378
火　星	1.881	1.524	3.54	3.54
木　星	11.86	5.203	140.7	140.9
土　星	29.46	9.539	867.9	868.0

当时,对数表已经出现了,开普勒在把上述数据的对数查出来以后,又得一新表,如表 1-2。

表 1-2

	水　星	金　星	火　星	木　星	土　星
$\lg a$	−0.41	−0.14	0.18	0.72	0.98
$\lg T$	−0.62	−0.21	0.27	1.07	1.47

由表 1-2 可以看出,$\lg a : \lg T = 2 : 3$,故 $a^3 = T^2$。据此,开普勒提出了至今仍十分著名的三大假设(即开普勒三定律),这就是:

(1) 行星轨道是一个椭圆,太阳位于此椭圆的一个焦点上。

(2) 行星与太阳的连线(矢径)在相同时间内扫过的面积相等。

(3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长半轴的三次方,比例系数不随行星而改变(即为绝对常数)。

牛顿认为,行星运动之所以会具有上述特征,必定是某一力学规律的反映,

他决心找出这一规律。根据开普勒提出的(1)和(2)，行星运行的速度显然是不断变化的，这种变化的速度在当时还无法计算，所需要的数学工具远远超越了当时传统数学的范围。为了研究这种变化的速度，牛顿不得不自己创造一套崭新的数学方法，并最终建立了微积分，这一过程也花费了他整整九年的时间。下面我们来看看，如何根据开普勒三定律和牛顿第二定律，利用微积分方法推导出牛顿第三定律即万有引力定律。

如图 1-1 所示，以太阳(设椭圆的左焦点)为极点，椭圆的长轴方向为极轴建立极坐标系，则椭圆方程可表示为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

其中 $p=a(1-e^2)$，$b^2=a^2(1-e^2)$，a，b 分别为椭圆的长半轴和短半轴的长度，e 为椭圆的离心率。

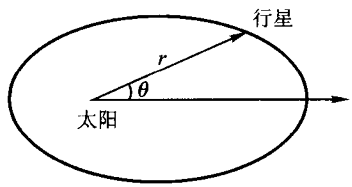


图 1-1

应用微积分知识，不难求得，在极坐标下，矢径在 dt 时间内扫过的面积的微元为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

由开普勒的假设(2)，矢径在相同时间内扫过的面积相等，故面积的变化率为常数，因此在任意时刻 t，$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\equiv$某常数。所以

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})=0$$

即

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0 \tag{1.1}$$

假设行星的运行周期为 T，则椭圆的面积恰为矢径在一个周期内扫过的面积，即

$$\pi ab=\int_0^T\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}T\text{，故 }r^2\dot{\theta}=\frac{2\pi ab}{T}=\text{常数} \tag{1.2}$$

我们用 $\boldsymbol{r}$ 来表示太阳指向行星的矢径，记其长度为 r，与 x 轴的夹角为 θ，在 (r,θ) 点处建立移动的直角坐标系，如图 1-2 所示，其中 $\boldsymbol{u}_r$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，$\boldsymbol{u}_\theta$ 垂直于 $\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 均为单位矢量。

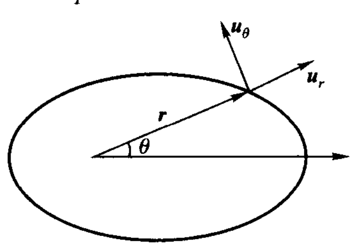


图 1-2

显然移动坐标系与固定坐标系之间有如下的坐标变换公式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta = (-\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 分别为长轴方向和短轴方向上的单位向量。此外有

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r \tag{1.4}$$

对(1.3)式中的 $\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 求导并和(1.3)式比较得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}}_r = (-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = (-\cos\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i} + (-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j} = -\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_r \end{cases} \tag{1.5}$$

对(1.4)式求导并结合(1.5)式得

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\cdot\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta$$

继续求导得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\cdot\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + r\cdot\dot{\theta}\cdot(-\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_r)$$

结合(1.5)式和(1.1)式我们可得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{1.6}$$

以下,我们设法来求 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$,为了计算方便,我们采用椭圆的参数方程。

对椭圆方程 $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 求导并注意到 $r^2\dot{\theta} = 2A$ 可得

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta} = \left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right)^2\dot{\theta}\,\frac{e}{p}\sin\theta = \frac{2Ae}{p}\sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{2Ae}{p}\dot{\theta}\cos\theta = 2A\dot{\theta}\,\frac{1+e\cos\theta}{p} - \frac{2A\dot{\theta}}{p} = \frac{2A\dot{\theta}}{pr}(p-r)$$

将 $\dot{\theta} = \dfrac{2A}{r^2}$ 代入上式可得

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2(p-r)}{pr^3}$$

由于 $A = \dfrac{\pi ab}{T}$,故

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{4(\pi ab)^2(p-r)}{pT^2r^3} - r\,\frac{4(\pi ab)^2}{r^4T^2} = -\frac{4\pi^2a^2b^2}{pT^2r^2}$$

由开普勒假设(3),$T^2 = Ka^3$,此外,由椭圆方程可知 $pa = b^2$,故

$$\frac{a^2b^2}{pT^2} = \frac{1}{K} \quad (K\text{ 为绝对常数})$$

再由牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{4\pi^2}{K}m\,\frac{1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

记 $G=\frac{4\pi^2}{KM}$，G 为绝对常数（其中 M 为太阳质量），于是

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

此即我们要推导的万有引力定律：万有引力的方向指向太阳（即作用力为吸引力），大小与距离的平方成反比，与太阳、行星质量的乘积成正比，而且比例系数为绝对常数。

§1.2　数学建模的一般步骤

从上节的例子中可以看出，万有引力的导出并不像有些人想像的那么简单。即使不把哥白尼的工作计算在内，也包含了几代人的辛勤努力。没有第谷的观察数据就不会有开普勒的三大定律，而没有开普勒的三大定律，牛顿也无从着手，不可能得出万有引力定律。分析万有引力定律的导出过程，可以看出建立数学模型的过程大致可以分为以下几个步骤：

(1) 了解问题的实际背景，明确建模目的，收集掌握必要的数据资料。这一步骤可以看成是为建立数学模型而做的前期准备工作。如果对实际问题没有较为深入的了解，就无从下手建模。而对实际问题的了解，有时还需要建模者对实际问题作一番深入细致的调查研究，就像第谷观察行星的运动那样，去搜集掌握第一手资料。

(2) 在明确建模目的、掌握必要资料的基础上，通过对资料的分析计算，找出起主要作用的因素，经必要的精炼、简化，提出若干符合客观实际的假设。开普勒通过长达九年的分析计算，才将第谷的观测数据浓缩总结为三大假设（即开普勒三大定律），这三大假设是牛顿发现万有引力定律的重要基础。本步骤实为建模的关键所在，因为其后的所有工作和结果都是建立在这些假设的基础之上的，也就是说，科学研究揭示的并非绝对真理，它揭示的只是：假如这些提出的假设是正确的，那么，我们可以推导出一些什么样的结果。

(3) 在所作假设的基础上，利用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构，即建立数学模型。采用什么数学结构、数学工具要看实际问题的特征，并无固定的模式。可以这样讲，几乎数学的所有分支在建模中都有可能被用到，而对同一个实际问题也可用不同的数学方法建立起不同的数学模型。一般地讲，在能够达到预期目的的前提下，所用的数学工具越简单越好。

(4) 模型求解。为了得到结果，不言而喻，建模者还应当对模型进行求解，根据模型类型的不同特点，求解可能包括解方程、图解、逻辑推理、定理证明等不同的方面，在难以得出解析解时，还应当借助计算机来求出数值解。

（5）模型的分析与检验。正如前面所讲，用建立数学模型的方法来研究实际课题，得到的只是假如给出的假设正确，就会有什么样的结果。那么，假设正确与否或者是否基本可靠呢，建模者还应当反过来用求解得到的结果来检验它。建立数学模型的目的是为了认识世界、改造世界，建模的结果应当能解释已知现象，预测未来的结果，提供处理研究对象的最优决策或控制方案。实践是检验真理的唯一标准，只有经得起实践检验的结果才能被人们广泛地接受。牛顿的万有引力定律不仅成功地解释了大量自然现象，精确地预报了哈雷彗星的回归，并预言了海王星、冥王星等当时尚未被发现的其他行星的存在，才奠定了其作为经典力学基本定理之一的稳固地位。由此可见，模型求解并非建模的终结，模型的检验也应当是建模的重要步骤之一。只有在证明了建模结果是经得起实践检验的以后，建模者才能认为大功基本告成，完成了自己预定的研究任务。

如果检验结果与事实不符，只要不是在求解中存在推导或计算上的错误，那就应当检查、分析在假设中是否有不合理或不够精确之处，发现后应修改假设，重新进行建模，直到结果满意为止。综合起来讲，数学建模的过程大致可以概括为图 1 - 3 所示的流程。

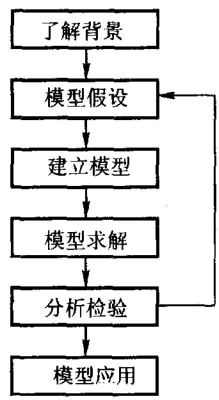


图 1 - 3

§ 1.3 数学模型的分类

应当首先指出的是，模型的分类在建模中并不存在什么实质性的意义，只是出于教学上的方便，我们才单独列出了这一节。

基于不同角度或不同目的，数学模型可以有多种不同的分类法。

根据人们对实际问题了解的深入程度不同，其数学模型可以归结为白箱模型、灰箱模型或黑箱模型。我们把建立数学模型研究实际问题比喻成一只箱子，通过输入数据（信息），建立数学模型来获取我们原先并不清楚的结果（见图 1 - 4 所示）。如果问题的机理比较清楚，内在的关系较为简单，这样的模型就被称为白箱模型。如果问题的机理极为繁杂，人们对它的了解极其肤浅，几乎无法加以精确的定量分析，这样的模型就被称为黑箱模型。而介于两者之间的模型，则被称为灰箱模型。当然，这种分类方法是较为模糊的，是相对而言的，况且，随着科学技术的不断进步，今天的黑箱模型明天也许会成为灰箱模型，而今天的灰箱模型不久也可能成为白箱模型，因

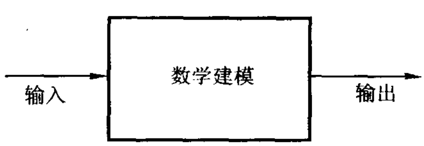


图 1 - 4

此，对这样的分类我们不必过于认真。

根据模型中变量的特征分类，模型又可分为连续型模型、离散型模型或确定性模型、随机型模型等。

根据建模中所用到的数学方法分类，又可分为初等模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型等。本书希望通过实例剖析来反映各种数学方法在建模中的应用，故本书各章主要采用的是这种分类法，以便较好地体现出各类数学方法的应用技巧。

此外，对一些人们较为重视或对人类活动影响较大的实际问题的数学模型，常常也可以按研究课题的实际范畴来分类，例如人口模型、生态模型、交通流模型、经济模型、社会模型、军事模型等。

§1.4 数学建模与能力的培养

在高等院校开设数学建模课的主要目的并非简单地传授数学知识，而是为了提高学生的综合素质，增强他们应用数学知识解决实际问题的本领。因此，在学习数学建模时，学生应当特别注意自身能力的培养与锻炼。要想知道梨子的滋味是酸的还是甜的，你必须亲口去尝一下；要想知道如何建模，除了学习基本技能与基本技巧之外，更重要的是应当参与进来，在建模实践中获得真知。

数学建模实践的每一步中都蕴含着对能力的锻炼。在调查研究阶段，需要用到观察能力、分析能力和数据处理能力等。在提出假设时，又需要用到想像力和归纳简化能力。实际问题是十分复杂的，既存在着必然的因果关系也存在着某些偶然的因果关系，这就需要我们能从错综复杂的现象中找出主要因素，略去次要因素，确定变量的取舍并找出变量间的内在联系。

假设条件通常是围绕着两个目的提出的，一类假设的提出是为了简化问题、突出主要因素，而另一类则是为了应用某些数学知识或其他学科的知识。但不管哪一类假设，都必须尽可能符合实际，即既要求做到不失真或少失真又要能便于使用数学方法处理，两者还应尽可能兼顾。

此外，我们的研究应当是前人工作的继续，在真正开始自己的研究之前，还应当尽可能先了解一下前人或别人的工作，使自己的工作真正成为别人研究工作的继续而不是别人工作的重复，这就需要你具有很强的查阅文献资料的能力。你可以把某些已知的研究结果用作你的假设，即“站在前人的肩膀上”，去探索新的奥秘。牛顿导出万有引力定律所用的假设主要有四条，即开普勒三大定律和牛顿第二定律，他所做的工作表明，如果这些假设是对的，如果推导过程也是正确的，那么万有引力定律也是对的。事实上，我们也可以由万有引力定律反过来推导出开普勒的三大假设。因而，万有引力定律被验证是正确的，也同样引证了

开普勒三大定律和牛顿第二定律的正确性。总之，在提出假设时，你应当尽量引用已有的知识，以避免做重复性的工作。

建模求解阶段是考验你数学功底和应变能力的阶段，你的数学基础越好，应用就越自如。但学无止境，任何人都不是全才，想学好了再做，其结果必然是什么也不做。因此，我们还应当学会在尽可能短的时间内查到并学会我想要应用的知识的本领。在我们指导学生参加国内外数学建模竞赛时，常常遇到这样的情况，参赛的理工科学生感到模拟实际问题的特征似乎需要建立一个偏微分方程模型或控制论模型等，他们并没有学过这些课程，竞赛时间又仅有三四天（允许查资料和使用一切工具），为了获得较好的结果，他们只用了两三个小时就基本搞懂了他们所要使用的相关知识并用进了他们的研究工作中，最终夺得了优异的成绩。这些同学在建模实践中学会了快速汲取想用的数学知识的本领（即"现学现用"的本领），这种能力在实际工作中也是不可缺少的。应变能力包括灵活性和创造性。牛顿在推导万有引力定律时发现原有的数学工具根本无法用来研究变化的运动，为了研究工作的需要，他花了九年的时间创建了微积分。当然，人的能力各有大小，不可能每个人都成为牛顿，不可能要求人人都去做如此重大的创举。但既然你在从事研究工作，多多少少总会遇到一些别人没有做过的事，碰到别人没有碰到过的困难，因而，也需要你多多少少要有点创新的能力。这种能力不是生来就有的，建模实践就为你提供了一个培养创新能力的机会。俗话说得好：初生牛犊不怕虎。青年学生最敢于闯，只要他们善于学习、勇于实践，创新能力会得到很快的提高。如 1999 年和 2003 年，浙江大学学生在经过半年多的学习和培训后参加国际竞赛，即在国际竞赛中两次夺得了最高奖——美国运筹与管理学会（INFORMS）奖。2002 年，作为浙江大学独立二级学院的浙江大学城市学院首次组织学生参加全国大学生数学建模竞赛，参赛学生同样只参加了半年左右的数学建模学习和实践，就在竞赛中交出了出色的研究论文，获得了全国一等奖，并在 2004 年国际竞赛中获得 3 项国际竞赛二等奖，在 2005 年的国际竞赛中夺得了 3 项国际竞赛一等奖和 1 项国际竞赛二等奖。当然，要出色地完成建模任务还需要用到许多其他的能力，譬如设计算法、编写程序、熟练使用计算机等能力，撰写研究报告或研究论文的能力，熟练应用外语的能力等等，所以，学习数学建模和参加建模实践，实际上是一个综合能力、综合素质的培养和提高的过程。参赛获奖并不是我们的目的，提高自己的素质和能力才是我们的宗旨，从这一意义上讲，只要你真正努力了，你就必定是一个成功的参与者。"昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路"，"衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴"，"众里寻她千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处"，这也正是数学建模的真实写照。

下面，让我们举一些简单的实例来说明数学建模中涉及的某些能力的培养和提高。读者在看每一实例的解答以前，应当先自行给出解答，看看你的解答是