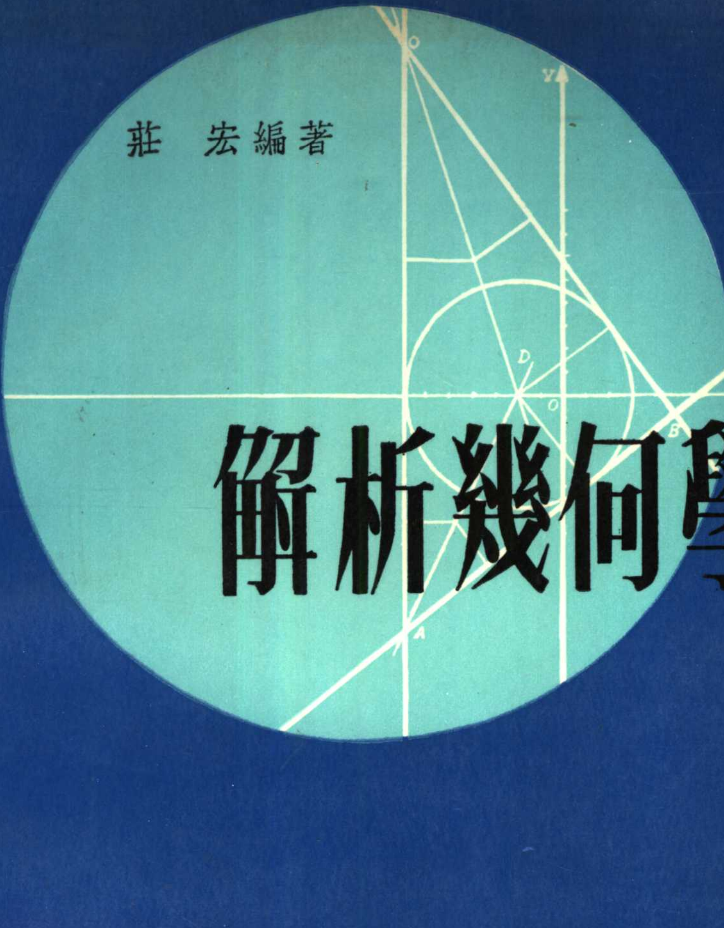
莊 宏編著



# 解析幾何學

香港宏業書局出版

# 解 析 幾 何 學

莊　宏編著



香港宏業書局出版

一九七九年六月版

# 解 析 幾 何 學

莊 宏編著

---

香 港 宏 業 書 局 出 版
香港干諾道西179-180號六樓A座
THE WON YIT BOOK CO.
Block 'A' 5th Fl. 179-180 Connaught Rd. W., Hong Kong

聯 興 印 刷 公 司 承 印
土瓜灣上鄉道39-41號七樓A1座

# 目　　錄

## 第十篇　參數方程式與軌跡



## 第十一篇　函數與脈及經驗方程式



## 第十二篇　空間笛卡兒坐標

**第十五篇　空間幾何學之補充教材**



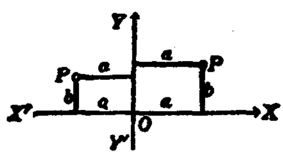
**第十六篇　坐標之變換　不同之坐標系**

**附錄　參考公式與表**

# 第一篇　笛卡兒坐標

§1. 在解析幾何學中所有問題均可應用坐標，方程式及代數學方法解之。

§2. **笛卡兒直角坐標**(註) (Rectangular Cartesian Coordinates)。設 $XX'$ 及 $YY'$ 爲平面內垂直相交於 $O$ 之二直線。自 $YY'$ 至一點之距離稱爲該點之橫標(abscissa)；自 $XX'$ 至此點之距離稱爲該點之縱標 (ordinate)。由此二距離並依照下列之符號規則可定平面內一點之位置。設 $P$ 點在 $YY'$ 之右則該點之橫標爲正，在左則爲負；若 $P$ 點在 $XX'$ 之上則該點之縱標爲正，在下則爲負。



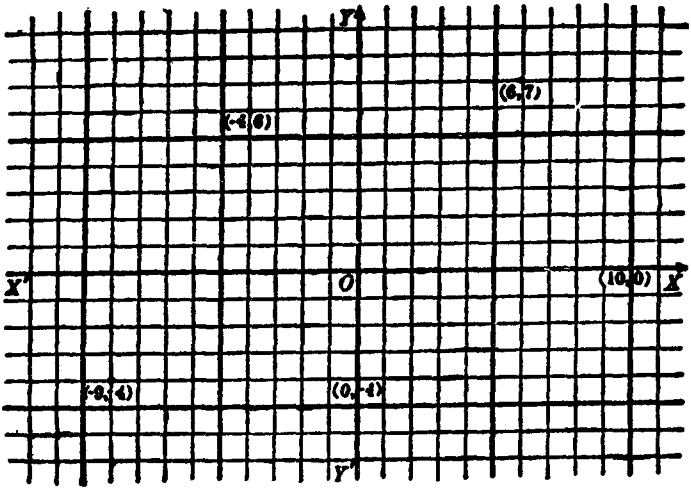

$P$ 之橫標 $a$ 與縱標 $b$ 即其坐標 (coördinates)，而可寫於一括弧內$(a, b)$，其中橫標置於縱標之前。$XX'$ 及 $YY'$ 二直線稱爲坐標軸 (axes of coördinates)：$XX'$ 爲 $x$ 軸(或稱橫軸)；$YY'$ 爲 $y$ 軸 (或稱縱軸)。$O$ 點爲原點 (origin)。

於直角坐標制中，描點工作往往因應用坐標紙或作圖紙而大爲簡化，此種紙乃將平面分爲相等之方格而成，其邊則皆與軸平行。

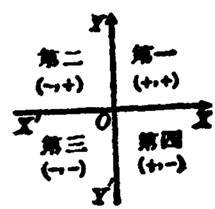
下圖描有數點，該圖假定以軸上之一格爲單位長度。描法極易，即爲：

註：因笛卡兒 (Rene Descartes, 1596—1650) 首先引用坐標之觀念於幾何學之研究，故如此名之。

自 $O$ 沿 $X'X$ 取格數，使其與已知之橫標相等——若橫標爲正，則向右取；若爲負，則向左取。再由所定之點依照縱標之正負而在上或在下取格數，令其等於縱標。




直角坐標軸分平面爲四部分，稱爲象限；各象限之號碼已於圖中表出，而坐標之正負亦示於圖中。




若坐標軸並非垂直（見下頁之圖），則謂之斜坐標，以別於直角坐標。此時，$P$ 之坐標爲與軸平行之線 $MP$ 及 $NP$。橫標爲 $NP(=OM)$，縱標爲 $MP$。

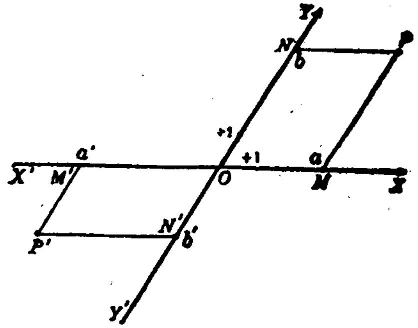
上述之符號規則於此亦能適用。以後之問題中，均假定取直角坐標，除非另有說明：

平面內任意一點 $P$ 可決定二數，即 $P$ 之坐標。反之，已知二實數 $a'$ 及 $b'$，則平面內一點 $P'$ 即可作出。其坐標爲$(a'\ b')$。蓋截$OM'=a'$，$ON'=b'$，且過$M'$ 及$N'$ 分別作二平行於軸之直線則此二直線

乃相交於 $P'(a',b')$。是故

任意一點可決定一對實數,反之,一對實數亦可決定一點。

代數學中之虛數不能用此法表示,故初等解析幾何學僅與代數學中之實數有關。




## 問　　題

1. 正確描出(6, 2),(−2, 6),(3, −3),(4, 0),(0, −2),(−4, −3)諸點。

2. 一點移動時其(1)横標恆爲 −3,(2)縱標恆爲 4。問此點之軌跡爲何?

3. 作各三角形,其頂點爲:

(a) (8, 4),(0, −4),(2, 4)。

(b) (1, −1),(−4, 3),(−6, −2)。

(c) (3, 5),(3, 10),(0, 2.5)。

(d) (2, 0),(−1, $\sqrt{3}$),(−1, $-\sqrt{3}$)。

(e) ($b$, $d$),($c$, $d$),($a$, 0)。

4. 求問題 3 中 ($c$),($d$),($e$) 各三角形之面積。　　答:($d$) $3\sqrt{3}$。

5. 作各四邊形,其頂點爲:

(a) (0, −4),(6, 2),(0, 4),(−6, 2)。

(b) (0, 0),(4, 5),(8, 0),(7, 3)。

(c) ($a$, $b$),($-a$, $b$),($a$, $-b$),($-a$, $-b$)。

6. 一點之軌跡爲何,設其(1)横標與縱標相等;(2)横標爲縱標之負數?

7. 用幾何作圖法正確描出($\sqrt{2}$, 3),($\sqrt{3}$, 2),($\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$)諸點。

8. 等邊三角形一邊之長爲 6 吋,底邊在 $x$ 軸上,且其中點在原點。諸頂點

之坐標爲何?(兩種情況)。

9. 正方形一邊之長爲6吋,其二對角線在二坐標軸上。諸頂點之坐標爲何? 答: $(3\sqrt{2}, 0)$, $(0, 3\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2}, 0)$, $(0, -3\sqrt{2})$。

10. 四邊形之各頂點爲$(2, 4)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(2, -4)$。問此爲何種四邊形?其面積又爲何?

11. 設矩形二邊之長爲 $a$ 及 $b$,各在 $x$ 軸及 $y$ 軸上。諸頂點之坐標爲何?(四種情況)。

12. 設平行四邊形三頂點之坐標爲$(0, 0)$, $(0, b)$, $(a, c)$,第四頂點之坐標爲何? 答: $(a, b+c)$, $(a, c-b)$, $(-a, b-c)$。

13. 設斜坐標二軸間之角爲$45°$,描$(-3, 2)$, $(4, 2)$, $(-4, -3)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(4, 2+\sqrt{2})$諸點。

14. 設二軸間之角爲$60°$,試作問題5中各四邊形。

15. 設等邊三角形一邊之長爲 $b$,一頂點爲$(0, 0)$,及一邊在 $y$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?(四種情況)。

16. 關於 $x$ 軸,$y$ 軸,原點,而與$(a, b)$對稱之各點之坐標爲何?

17. 正方形一邊之長爲 $2a$,一頂點爲$(0, 0)$,及一對角線在正 $x$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?

答: $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $(2a\sqrt{2}, 0)$, $(a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$。

18. 等邊三角形一邊之長爲 $b$,一頂點在原點,及一高在 $y$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?(兩種情況)。

§3. **有向直線** 當 $OM$ 是被一個正數所決定時,我們就在 $x$ 軸上 $O$ 點之右取 $M$ 點;當 $OM$ 被一負數決定時,則 $M$ 點取在 $O$ 點之左。這樣就指定 $X'X$ 向右的方向爲正方向。於是 $X'X$ 變成一方向線,也就是它上面有假定的原點、單位長度和正方向的一直線。有向直線上常加一箭頭用來表示它的正方向。

設 $A$ 及 $B$ 爲同一有向直線上之任意兩點，而

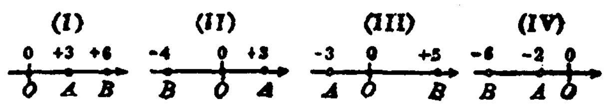
$$OA=a,\quad OB=b,$$

則線段 $AB$ 之長恆爲 $b-a$。

同一有向直線上 $A,B$ 二點無論在何位置，其長 $AB$ 恆可由下式求得，即

$$AB=OB-OA, \tag{1}$$

其中 $O$ 爲原點。




上列定義可由此四圖分別說明之。

Ⅰ. $AB=OB-OA=6-3=+3$。

Ⅱ. $AB=OB-OA=-4-3=-7$。

Ⅲ. $AB=OB-OA=+5-(-3)=+8$。

Ⅳ. $AB=OB-OA=-6-(-2)=-4$。

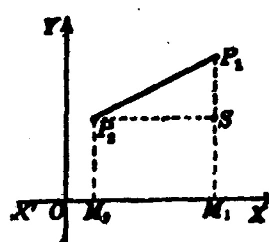
在一有向直線上，顯然有

(1) $AB=-BA$。

(2) 設由 $A$ 至 $B$ 之方向與有向直線之正方向一致，則 $AB$ 爲正，反之，則 $AB$ 爲負。

§4. **長　定理**：連接 $P_1(x_1,\ y_1)$ 與 $P_2(x_2,\ y_2)$ 二點直線之長 $l$，可由下列公式求得：

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}。\quad (\mathrm{I})$$




〔證〕 通過 $P_1$ 及 $P_2$ 各作平行於軸之直線，則得直角三角形 $P_1SP_2$。

於是 $P_2S=OM_1-OM_2=x_1-x_2$,

$SP_1=M_1P_1-M_2P_2=y_1-y_2$,

$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_2S}^2+\overline{SP_1}^2}$;

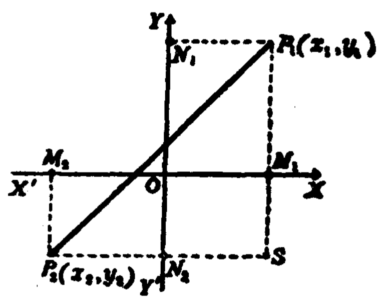
故 $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。 〔已證〕

無論 $P_1$ 及 $P_2$ 之位置如何，其間之長均可用公式(1)求得。例如，於下圖中，令 $P_2S$ 向右之方向爲正，$SP_1$ 向上之方向爲正，則由圖及第3節(1)，得

$$P_2S=M_2M_1=OM_1-OM_2=x_1-x_2,$$

$$SP_1=N_2N_1=ON_1-ON_2=y_1-y_2,$$

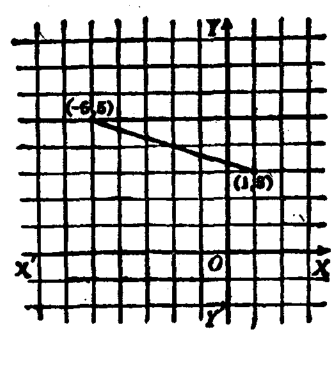
證明與前相同。




公式(Ⅰ)對於 $P_1$ 及 $P_2$ 二點，無論在何位置皆眞乃一基本重要之事實。故應用此公式於任一問題時，僅爲直接代入而已。爲求此等一般公式而作圖時，使各假定的已知量爲正，最爲方便。

## 例　　題

求(1,3)及(−5,5)二點連線之長。




〔解〕 稱(1,3)爲 $P_1$，(−5,5)爲 $P_2$。

於是 $x_1=1$; $y_1=3$,

及 $x_2=-5$, $y_2=5$;

再代入(1)，得

$$l=\sqrt{(1+5)^2+(3-5)^2}$$

$$=\sqrt{40}=6.32。$$ 答。