

莊 宏 編 著



A circular diagram with a coordinate system and geometric constructions. The diagram is set within a light green circle on a dark blue background. It features a vertical y-axis with an upward-pointing arrow and a horizontal x-axis. A point  $O$  is marked at the origin. A circle is drawn with center  $O$ . A point  $D$  is marked on the x-axis to the right of  $O$ . A point  $B$  is marked on the circle in the first quadrant. A point  $A$  is marked on the x-axis to the left of  $O$ . A point  $C$  is marked on the y-axis above  $O$ . Several lines are drawn: a vertical line through  $O$ , a horizontal line through  $O$ , a line through  $O$  and  $B$ , a line through  $D$  and  $B$ , a line through  $A$  and  $B$ , and a line through  $C$  and  $B$ . The title "解析幾何學" is overlaid on the diagram.

# 解析幾何學

香港宏業書局出版

解 析 幾 何 學

莊 宏 編 著

江苏工业学院图书馆  
藏 书 章

香 港 宏 業 書 局 出 版

版權所有・翻印必究  
一九七九年六月版

解 析 幾 何 學  
莊 宏 編 著

---

香港宏業書局出版  
香港干諾道西179-180號六樓A座  
THE WON YIT BOOK CO.  
Block 'A' 5th Fl. 179-180 Connaught Rd. W.,  
Hong Kong

---

聯興印刷公司承印  
士瓜灣上鄉道39-41號七樓A1座

# 目 錄

## 第一篇 笛卡兒坐標

1. 解析幾何學..... 1
2. 笛卡兒直角坐標。斜坐標..... 1
3. 有向直線..... 4
4. 長..... 5
5. 依已知比分一線段之點..... 7
6. 幾何學定理上之應用..... 9
7. 斜角與斜率..... 11
8. 平行線或垂直線之檢驗法..... 13
9. 角之公式..... 14
10. 面積..... 17

## 第二篇 曲線與方程式

11. 曲線之方程式 ( 點之軌跡 ) ..... 23
12. 方程式之軌跡..... 27
13. 方程式之討論..... 30
14. 摘要..... 35
15. 水平及垂直漸近線..... 39
16. 交點..... 43

## 第三篇 直線

17. 任意直線方程式之次數..... 46

18. 任意一次方程式之軌跡	46
19. 描直線。定理。用因子分解法作圖	47
20. 點斜式	51
21. 二點式	52
22. 截距式	52
23. 三直線相交於一點之條件	53
24. 直線之法線方程式	56
25. 化爲法線式	57
26. 自直線至一點之垂直距離	60
27. 直線系	65
28. 通過二已知線之交點之直線系	68

#### 第四篇 圓

29. 圓之方程式	73
30. 圓之檢驗法	74
31. 三條件決定一圓	75
32. 根軸	80
33. 切距	81
34. 圓系	83

#### 第五篇 拋物線橢圓及雙曲線

35. 拋物線	87
36. 拋物線之作圖法	89
37. 拋物拱	89
38. 描拋物線	90
39. 橢圓	92
40. 橢圓之作圖法	95

41. 描橢圓	96
42. 特例	96
43. 雙曲線	98
44. 雙曲線之作圖法	101
45. 描雙曲線	101
46. 共軛雙曲線與漸近線	103
47. 等軸雙曲線或直角雙曲線	106
48. 摘要	106
49. 割錐線	107
50. 二次曲線系	107

## 第六篇 坐標之變換

51. 引論	110
52. 平移	110
53. 用平移化簡方程式	112
54. 定理	116
55. 割錐線之特徵方程式	117
56. 旋轉	119
57. 用旋转化簡方程式	120
58. 任意二次方程式之軌跡	122
59. 描二次方程式之軌跡	125
60. 一特例。等軸(直角)雙曲線。等軸雙曲線之作圖法	131
61. 割錐線(錐線)之另一定義	132
62. 一般之坐標變換	133
63. 軌跡之分類	133

## 第七篇 切線

64. 切線之方程式	136
65. 一般定理	139
66. 法線之方程式	140
67. 次切距及次法距	141
68. 斜率已知之切線	142
69. 通過曲線外一點之切線	143
70. 已知斜率之切線公式	145
71. 錐線之切線及法線之性質	148

### 第八篇 極坐標

72. 極坐標	152
73. 描極標方程式之軌跡	153
74. 迅速描出極標方程式之軌跡	158
75. 直角坐標與極坐標之關係	160
76. 應用。直線及圓	161
77. 錐線之極標方程式	163
78. 交點	165
79. 用極坐標求軌跡	167

### 第九篇 超越曲線

80. 自然對數。指數曲線及對數曲線	171
81. 正弦曲線	176
82. 週期性	178
83. 描正弦曲線	178
84. 其他三角曲線	181
85. 縱標之加法	184
86. 境界曲線	187

## 第十篇 參數方程式與軌跡

- 87. 描參數方程式之軌跡·····190
- 88. 由參數方程式求直角坐標方程式·····192
- 89. 同一曲線之各種參數方程式·····193
- 90. 用參數方程式解軌跡問題·····197
- 91. 對應線交點之軌跡·····204
- 92. 錐線之直徑·····206

## 第十一篇 函數與脈及經驗方程式

- 93. 函數。函數之記法·····211
- 94. 函數之脈。簡單函數之例·····211
- 95. 函數之立式及圖解·····215
- 96. 經驗函數·····218
- 97. 直線定律·····219
- 98. 平均法·····220
- 99. 上例之注釋·····221
- 100. 含二常數之定律·····224
- 101. 冪定律·····224
- 102. 指數定律及雙曲線定律·····227
- 103. 拋物線定律·····231
- 104. 平均法應用於一般拋物線定律·····233
- 105. 代數方程式圖解法·····235
- 106. 超越方程式圖解法·····238

## 第十二篇 空間笛卡兒坐標

- 107. 笛卡兒坐標·····241
- 108. 重要關係·····242



109. 直線之方向餘弦	244
110. 直線之方向數	245
111. 長	248
112. 二有向直線間之角	248
113. 平行線或垂直線之檢驗法	249
114. 依已知比分一線段之點	250
115. 空間之軌跡	253
116. 曲面之方程式	254
117. 曲線之方程式	254
118. 方程式之軌跡。聯立二方程式之軌跡	255

### 第十三篇 空間之平面與直線

119. 平面方程式之法線式	258
120. 任意一次方程式之軌跡。化爲法線式	259
121. 特殊平面	260
122. 平面之截距及跡	261
123. 二平面間之角	264
124. 三條件決定一平面	265
125. 平面方程式之截距式	267
126. 自平面至一點之垂直距離	269
127. 平面系	272
128. 直線之一般方程式	275
129. 直線方程式之各種形式	278
130. 直線之射影平面。射影式	279
131. 直線與平面之相對位置	284

### 第十四篇 特殊曲面

132. 球	289
133. 柱	293
134. 錐	294
135. 曲面方程式之討論	296
136. 二次曲面	300
137. 橢面	300
138. 單葉雙曲面	301
139. 雙葉雙曲面	302
140. 橢圓拋物面	305
141. 雙曲拋物面	306

### 第十五篇 空間幾何學之補充教材

142. 廻轉曲面	309
143. 直紋曲面	311
144. 直紋二次曲面。直母線	313
145. 素線傾斜於軸之柱	315
146. 一曲線之射影柱	316
147. 空間曲線之參數方程式	320

### 第十六篇 坐標之變換 不同之坐標系

148. 軸之平移	323
149. 軸之旋轉	323
150. 含 $x$ , $y$ 及 $z$ 之二次方程式之軌跡	326
151. 含三變數之一般二次方程式之化簡	327
152. 極坐標	329
153. 球面坐標	330
154. 柱面坐標	330

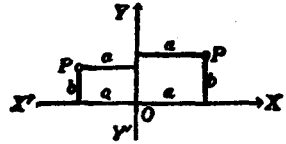
## 附錄 參考公式與表

1. 幾何學代數學及三角學之公式……………333
2. 眞值。特殊角……………337
3. 三角函數之符號規則……………337
4. 三角函數之眞值……………338
5. 希臘字母……………338

## 第一篇 笛卡兒坐標

§ 1. 在解析幾何學中所有問題均可應用坐標，方程式及代數學方法解之。

§ 2. 笛卡兒直角坐標(註)(Rectangular Cartesian Coordinates)。設  $XX'$  及  $YY'$  為平面內垂直相交於  $O$  之二直線。自  $YY'$  至一點之距離稱為該點之橫標(abscissa)；自  $XX'$  至此點之距離稱為該點之縱標(ordinate)。由此二距離並依照下列之符號規則可定平面內一點之位置。設  $P$  點在  $YY'$  之右則該點之橫標為正，在左則為負；若  $P$  點在  $XX'$  之上則該點之縱標為正，在下則為負。



$P$  之橫標  $a$  與縱標  $b$  即其坐標(coordinates)，而可寫於一括弧內  $(a, b)$ ，其中橫標置於縱標之前。 $XX'$  及  $YY'$  二直線稱為坐標軸(axes of coordinates)： $XX'$  為  $x$  軸(或稱橫軸)； $YY'$  為  $y$  軸(或稱縱軸)。 $O$  點為原點(origin)。

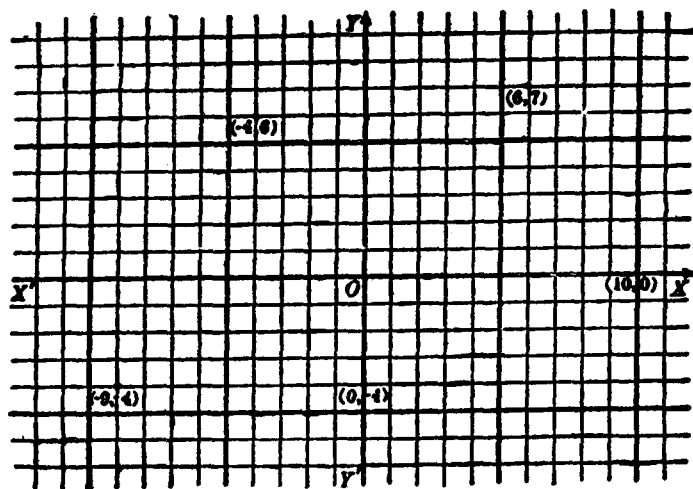
於直角坐標制中，描點工作往往因應用坐標紙或作圖紙而大為簡化，此種紙乃將平面分為相等之方格而成，其邊則皆與軸平行。

下圖描有數點，該圖假定以軸上之一格為單位長度。描法極易，即為：

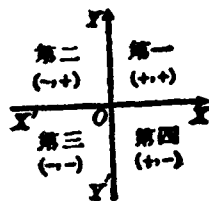
---

註：因笛卡兒(Rene Descartes, 1596--1650)首先引用坐標之觀念於幾何學之研究，故如此名之。

自  $O$  沿  $X'X$  取格數，使其與已知之橫標相等——若橫標為正，則向右取；若為負，則向左取。再由所定之點依照縱標之正負而在上或在下取格數，令其等於縱標。



直角坐標軸分平面為四部分，稱為象限；各象限之號碼已於圖中表出，而坐標之正負亦示於圖中。



若坐標軸並非垂直（見下頁之圖），則謂之斜坐標，以別於直角坐標。此時， $P$  之坐標為與軸平行之線  $MP$  及  $NP$ 。橫標為  $NP(=OM)$ ，縱標為  $MP$ 。

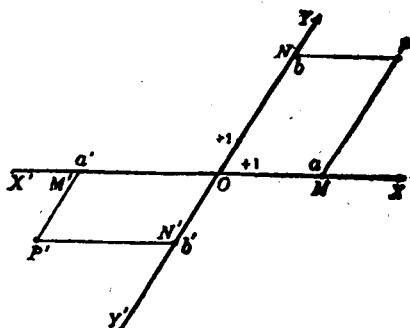
上述之符號規則於此亦能適用。以後之問題中，均假定取直角坐標，除非另有說明：

平面內任意一點  $P$  可決定二數，即  $P$  之坐標。反之，已知二實數  $a'$  及  $b'$ ，則平面內一點  $P'$  即可作出。其坐標為  $(a' b')$ 。蓋截  $OM' = a'$ ， $ON' = b'$ ，且過  $M'$  及  $N'$  分別作二平行於軸之直線則此二直線

乃相交於  $P'(a', b')$ 。是故

任意一點可決定一對實數，反之，一對實數亦可決定一點。

代數學中之虛數不能用此法表示，故初等解析幾何學僅與代數學中之實數有關。



### 問 題

1. 正確描出  $(6, 2)$ ,  $(-2, 6)$ ,  $(3, -3)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(-4, -3)$  諸點。
2. 一點移動時其(1)橫標恆為  $-3$ , (2)縱標恆為  $4$ 。問此點之軌跡為何?
3. 作各三角形，其頂點為：
  - (a)  $(8, 4)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(2, 4)$ 。
  - (b)  $(1, -1)$ ,  $(-4, 3)$ ,  $(-6, -2)$ 。
  - (c)  $(3, 5)$ ,  $(3, 10)$ ,  $(0, 2.5)$ 。
  - (d)  $(2, 0)$ ,  $(-1, \sqrt{3})$ ,  $(-1, -\sqrt{3})$ 。
  - (e)  $(b, a)$ ,  $(c, a)$ ,  $(a, 0)$ 。
4. 求問題 3 中 (c), (d), (e) 各三角形之面積。 答: (c)  $3\sqrt{3}$ 。
5. 作各四邊形，其頂點為：
  - (a)  $(0, -4)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(-6, 2)$ 。
  - (b)  $(0, 0)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(8, 0)$ ,  $(7, 3)$ 。
  - (c)  $(a, b)$ ,  $(-a, b)$ ,  $(a, -b)$ ,  $(-a, -b)$ 。
6. 一點之軌跡為何，設其(1)橫標與縱標相等；(2)橫標為縱標之負數?
7. 用幾何作圖法正確描出  $(\sqrt{2}, 3)$ ,  $(\sqrt{3}, 2)$ ,  $(\sqrt{5}, \sqrt{6})$  諸點。
8. 等邊三角形一邊之長為 6 吋，底邊在  $x$  軸上，且其中點在原點。諸頂點

之坐標爲何?(兩種情況)。

9. 正方形一邊之長爲6吋,其二對角線在二坐標軸上。諸頂點之坐標爲何? 答:  $(3\sqrt{2}, 0), (0, 3\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, 0), (0, -3\sqrt{2})$ 。

10. 四邊形之各頂點爲 $(2, 4), (0, 4), (0, -4), (2, -4)$ 。問此爲何種四邊形?其面積又爲何?

11. 設矩形二邊之長爲 $a$ 及 $b$ ,各在 $x$ 軸及 $y$ 軸上。諸頂點之坐標爲何?(四種情況)。

12. 設平行四邊形三頂點之坐標爲 $(0, 0), (0, b), (a, c)$ ,第四頂點之坐標爲何? 答:  $(a, b+c), (a, c-b), (-a, b-c)$ 。

13. 設斜坐標二軸間之角爲 $45^\circ$ , 描 $(-3, 2), (4, 2), (-4, -3), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (4, 2+\sqrt{2})$ 諸點。

14. 設二軸間之角爲 $60^\circ$ , 試作問題5中各四邊形。

15. 設等邊三角形一邊之長爲 $b$ , 一頂點爲 $(0, 0)$ , 及一邊在 $y$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?(四種情況)。

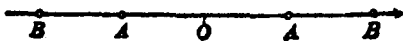
16. 關於 $x$ 軸,  $y$ 軸, 原點, 而與 $(a, b)$ 對稱之各點之坐標爲何?

17. 正方形一邊之長爲 $2a$ , 一頂點爲 $(0, 0)$ , 及一對角線在正 $x$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?

答:  $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}), (2a\sqrt{2}, 0), (a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ 。

18. 等邊三角形一邊之長爲 $b$ , 一頂點在原點, 及一高在 $y$ 軸上。其他諸頂點之坐標爲何?(兩種情況)。

§ 3. 有向直線 當 $OM$ 是被一個正數所決定時, 我們就在 $x$ 軸上 $O$ 點之右取 $M$ 點; 當 $OM$ 被一負數決定時, 則 $M$ 點取在 $O$ 點之左。這樣就指定 $X'X$ 向右的方向爲正方向。於是 $X'X$ 變成一方向線, 也就是它上面有假定的原點、單位長度和正方向的一直線。有向直線上常加一箭頭用來表示它的正方向。



設  $A$  及  $B$  為同一有向直線上之任意兩點，而

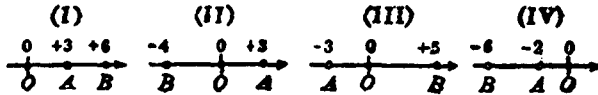
$$OA = a, \quad OB = b,$$

則線段  $AB$  之長恆為  $b - a$ 。

同一有向直線上  $A, B$  二點無論在何位置，其長  $AB$  恆可由下式求得，即

$$(1) \quad AB = OB - OA,$$

其中  $O$  為原點。



上列定義可由此四圖分別說明之。

$$\text{I. } AB = OB - OA = 6 - 3 = +3.$$

$$\text{II. } AB = OB - OA = -4 - 3 = -7.$$

$$\text{III. } AB = OB - OA = +5 - (-3) = +8.$$

$$\text{IV. } AB = OB - OA = -6 - (-2) = -4.$$

在一有向直線上，顯然有

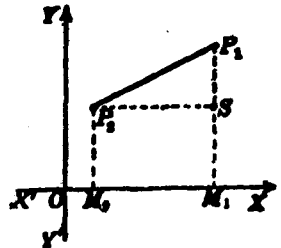
$$(1) \quad AB = -BA.$$

(2) 設由  $A$  至  $B$  之方向與有向直線之正方向一致，則  $AB$  為正，反之，則  $AB$  為負。

**§ 4. 長 定理：** 連接  $P_1(x_1, y_1)$  與  $P_2(x_2, y_2)$  二點直線之長  $l$ ，可由下列公式求得：

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (\text{I})$$

〔證〕 通過  $P_1$  及  $P_2$  各作平行於軸之直線，則得直角三角形  $P_1SP_2$ 。





於是  $P_2S = OM_1 - OM_2 = x_1 - x_2,$

$SP_1 = M_1P_1 - M_2P_2 = y_1 - y_2,$

$P_1P_2 = \sqrt{P_2S^2 + SP_1^2};$

故  $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$  [已證]

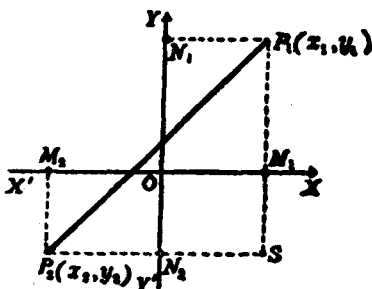
無論  $P_1$  及  $P_2$  之位置如何，其間之長均可用公式(1)求得。例如，於下圖中，令  $P_2S$  向右之方向為正， $SP_1$  向上之方向為正，則由圖及第3節(1)，得

$P_2S = M_2M_1 = OM_1 - OM_2 = x_1 - x_2,$

$SP_1 = N_2N_1 = ON_1 - ON_2 = y_1 - y_2,$

證明與前相同。

公式(I)對於  $P_1$  及  $P_2$  二點，無論在何位置皆真乃一基本重要之事實。故應用此公式於任一問題時，僅為直接代入而已。為求此等一般公式而作圖時，使各假定的已知量為正，最為方便。



### 例題

求(1, 3)及(-5, 5)二點連線之長。

[解] 稱(1, 3)為  $P_1$ , (-5, 5)為  $P_2$ 。

於是  $x_1 = 1;$   $y_1 = 3,$

及  $x_2 = -5,$   $y_2 = 5;$

再代入(1)，得

$$l = \sqrt{(1+5)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{40} = 6.32. \text{ 答。}$$

