〔英〕H·S·霍尔　S·R·奈特

# HALL-KNIGHT

# 大代数 下

$$C_n^{n-r}=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=C_n^r$$

$$N=a^{\log_a N}$$

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$$

$$S=abn+(a+b)\sum(n-1)+\sum(n-1)^2$$

$$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

科学普及出版社

# Hall-Knight 大代数

## 下

[英] H. S. 霍尔 S. R. 奈特

席小云 译

何桂莲 校

科学普及出版社

## 内 容 提 要

Hall-Knight大代数是一本享有世界盛名的初等数学著作，初版于1887年，再版几十次，历久不衰。尤其近年来，美、英等国都连年重印。我国老一辈知名数学家中，有不少人至今还念念不忘该书给他们的教益。

该书译本分上、下两册出版，共三十五章，书末附练习解答，内容丰富，讲解透彻，题型多，其解题技术为同类书所不及，深受世界各国中学师生欢迎。

**Hall-Knight 大代数**

**下**

［英］H.S. 霍尔 S.R. 奈特 著

席 小 云 译

何 桂 莲 校

责任编辑：陈 金 凤

封面设计：王 序 德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北省新城县印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：21.625 字数：480 千字

1985年10月 第1版 1987年10月第2次印刷

印数：15,101—20,100册 定价：3.60 元

统一书号：13051·1374 本社书号：0764

# 前　　言

H. S. 霍尔与 S. R. 奈特二氏的《大代数》是 1887 年在美国出版的。近百年来版本版次极多，现在还在各处不断地印刷出版。此书对不少国家的中学数学教学影响很大。我国五十多岁以上的老一辈数学家中有不少人在中学时期为学此书花过不少功夫，得益非浅，至今还念念不忘！当时的高中一般采用 Fine 氏大代数作为教本，而 Hall-Knight 二氏大代数是教师与学生普遍使用的参考书与课外读物。

有一批高质量的课外读物与参考书，对教学效果的提高，学生兴趣的培养是很重要的。但是现在极其缺乏这样的数学读物。所以 Hall-Knight 二氏大代数的翻译出版是件很好的事。这本书内容极为丰富，讲解详尽，透彻，易懂，其中一部分很有意义的内容在一般中学课本中是少讲或不讲的。此书的另一个特点是它的例题与习题的“题型”很多，除了大量一般性的习题外，还有很多较为复杂难解的习题。所有这些对于课程内容的理解与解题能力的培养都是很重要的。为便于读者参考，书末附有习题解答，不是 H. S. 霍尔与 S. R. 奈特所著。

希望本书也将成为现在中学教师与高中学生在数学教学与学习中的好帮手。

周毓麟

1981 年 5 月 4 日

# 目　　录

# 第二十五章 连分式

**331.** 形如 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots}}$ 的表达式称作**连分式**；这里，字母 $a$，$b,c,\cdots$可以表示任何量，但在目前，我们只考虑一种比较简单的形式$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$，其中，$a_1$，$a_2,a_3,\cdots$均为正整数。这一表达式通常写成更为简洁的形式

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots.$$

**332.** 当商 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$\cdots$的个数为有限的时候，连分式称为有尽连分式；如果商的个数为无穷，这样的连分式称为无限连分式。

我们可以从最下面的一个分数开始，逐个地化简，从而把一个有尽连分式化成一个普通的分数。

**333.** 将给定分数转化成连分式。

设$\frac{m}{n}$为所给分数，以 $n$ 去除$m$，设 $a_1$ 为商，$p$ 为余数；于是

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{n}{p}};$$

以 $p$ 去除 $n$，设 $a_2$ 为商，$q$ 为余数；则

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\cfrac{1}{\cfrac{p}{q}};$$

以 $q$ 去除 $p$，设 $a_3$ 为商，$r$ 为余数；以此类推。于是

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots.$$

如果 $m$ 小于 $n$，则第一个商为零，这样，我们取

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{\cfrac{n}{m}},$$

然后与前面一样进行。

我们注意到，上面的运算过程，与求 $m$ 与 $n$ 的最大公约数的运算过程相同；因此，如果 $m$ 与 $n$ 为可通约的量，那么我们终将达到这样一步，这时正好除尽，运算过程终止。所以，任何一个分子与分母均为正整数的分数，都可以转化成一个有尽连分式。

**【例】** 将 $\frac{251}{802}$ 化成连分式。

按一般过程求最大公约数

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 251 | 802 | 3 |
| 6 | 6 | 49 | 8 |
| | | 1 | |

于是，商逐个为 3，5，8，6；所以

$$\frac{251}{802}=\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{6}.$$

**334.** 截止在一个连分式的第一，第二，第三，…个商上

而得到的分数，称为这个连分式的一阶，二阶，三阶，···**渐近分数**，正如 339 节将表明的那样，高阶的渐近分数比低阶的更接近该连分数的真值。

**335.** 证明一连分式的逐阶渐近分数依次交替地小于和大于该连分式。

设该连分式为 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$.

一阶渐近分数为 $a_1$，因为舍去了$\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$，所以它太小了。二阶渐近分数为 $a_1+\frac{1}{a_2}$，因为分母 $a_2$ 太小，所以该渐近分数太大。三阶渐近分数为 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3}$，因为$a_2+\frac{1}{a_3}$太大，所以该渐近分数太小；以此类推。

当所给的分数为一真分数时，$a_1=0$；在这种情况下，如果将零看作是一阶渐近分数的话，那么上面的结果可以表述如下：

任一连分式的奇阶渐近分数总小于该连分式；偶阶渐近分数总大于该连分式。

**336.** 连分式的逐阶渐近分数的递推法则。

设连分式为

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots,$$

则前三阶渐近分数为

$$\frac{a_1}{1},\quad \frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_2a_3+1};$$

由此可见，三阶渐近分数的分子是由二阶渐近分数的分子乘

以第三个商，然后加上一阶渐近分数的分子；它的分母也按同样方式组成。

设逐阶渐近分数均按同样方式组成，且 $p_1$，$p_2$，$p_3$，$\cdots$ 表示逐阶渐近分数的分子，$q_1$，$q_2$，$q_3$，$\cdots$表示它们的分母。

假定递推法则对于 $n$ 阶渐近分数成立；也就是说，设

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$

第 $n+1$ 阶渐近分数与第 $n$ 阶渐近分数的不同仅在于在 $a_n$ 的位置上有商 $a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}$；所以，$n+1$ 阶渐近分数为

$$\frac{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}.$$

（按假设 $a_np_{n-1}+p_{n-2}=p_n$，$a_nq_{n-1}+q_{n-2}=q_n$）

所以，如果取

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1},$$

便可见第 $n+1$ 阶渐近分数的分子与分母，仍遵循我们假设在 $n$ 阶渐近分数中成立的递推法则。而这一公式在三阶渐近分数的情况下是成立的，于是四阶也成立；依次类推，所以它普遍成立。

**337.** 把 $a_n$ 称作第 $n$ 个部分商是很适宜的。因为在这一步，全部商为 $a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}+}\,\dfrac{1}{a_{n+2}+}\cdots$. 我们通常用 $k$ 表示任何一步的全部商。

我们已经知道

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+q_{n-2}};$$

假定 $x$ 表示该连分式，则 $x$ 与 $\frac{p_n}{q_n}$ 的不同仅在于取全部商 $k$ 代替了部分商 $a_n$；所以

$$x=\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

**338.** 如果 $\frac{p_n}{q_n}$ 为一连分式的第 $n$ 阶渐近分数，则

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

设该连分数为

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots;$$

则

$$\begin{aligned}p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n&=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})\\&=(-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})\\&=(-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2).\end{aligned}$$

但是 $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2$；

$$\therefore\quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

当连分式小于 1 时，如果设 $a_1=0$，即一阶渐近分数为零，那么这个结论仍成立。

**注**：当我们计算逐阶渐近分数的数值时，上面的定理提供了检验运算是否正确的方便的办法。

**推论一**：每一阶渐近分数都是一个既约分数，因为如果 $p_n$ 与 $q_n$ 有公因子的话，那它一定可以整除 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$ 或 1；这显然是不可能的。

**推论二**：两个相继的渐近分数的差是一个分子为 1 的分数。这是因为

$$\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}.$$

（符号～表示前者减后者或后者减前者。译注）

## 练习二十五　*a*

计算下列连分式的逐阶渐近分数：

1. $2+\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{11+}\frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{6}$.

3. $3+\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{9}$.

用连分式表示下列各量，且求出其四阶渐近分数：

4. $\frac{253}{179}$.　5. $\frac{832}{159}$.　6. $\frac{1189}{3927}$.　7. $\frac{729}{2318}$.

8. $0.\dot{3}\dot{7}$.　9. 1.139.　10. 0.3029.　11. $4.31\dot{6}$.

12. 1 米等于 39.37079 英寸，用连分式理论证明，32 米近似等于 35 码。（注：12 英寸＝1 英尺，3 英尺＝1 码）

13. 求一列渐近于 0.24226 的分数，这是一精确回归年超过 365 天的天数。

14. 1 公里近似地等于 0.62138 英里，证明分数 $\frac{5}{8}$，$\frac{18}{29}$，$\frac{23}{37}$，$\frac{64}{103}$逐次渐近于 1 公里与 1 英里的比值。

15. 两把长度相同的尺子，分别刻成 162 与 209 等分；如果它们的零点重合，证明一把尺子的第 31 个刻点与另一把第 40 个刻点近似地重合。

16．如果$\frac{n^4+n^2-1}{n^3+n^2+n+1}$化成连分式的形式，证明该连分式的商依次交替为$n-1$与$n+1$，且求出其逐阶渐近分数。

17．证明：

(1) $\frac{p_{n+1}-p_{n-1}}{q_{n+1}-q_{n-1}}=\frac{p_n}{q_n}$.

(2) $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right)=\left(\frac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right)$.

18．如果$\frac{p_n}{q_n}$是一连分式的$n$阶渐近分数，$a_n$是对应的商，证明

$$p_{n+2}q_{n-2}\sim p_{n-2}q_{n+2}=a_{n+2}a_{n+1}a_n+a_{n+2}+a_n.$$

**339．任何一阶渐近分数都比它的前一阶更近似地等于该连分式。**

设$x$表示该连分式，$\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$为其三个连续的渐近分数；则$x$与$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$的不同仅在于在$a_{n+2}$的位置上取第$n+2$个全部商，记为$k$；于是

$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n};$$

$$\therefore\quad x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k(p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1})}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)},$$

及
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\sim x=\frac{p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1}}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{1}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}.$$

而$k$大于1，$q_n$小于$q_{n+1}$；基于这两个原因，所以$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$与$x$的差，小于$\frac{p_n}{q_n}$与$x$的差；也就是说，每一阶渐近分数都比它的前一阶更接近这个连分式。所以，每一阶渐近分数比它前面任一阶就都更接近这个连分式。

将这一节的结论与335节的结合起来，可以得出以下结论：

一连分式的奇阶渐近分数逐渐增加，但总小于该连分式；偶阶渐近分数逐渐减小，但总大于该连分式。

**340.** 在取连分式的任一阶渐近分数时，所产生的误差的界限。

设$\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$为一连分式的三个连续的渐近分数，$k$表示第$n+2$个全部商。则

$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n}.$$

$$\therefore\quad x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+\frac{q_n}{k}\right)}.$$

由于$k$大于1，所以$x$与$\frac{p_n}{q_n}$的差小于$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，大于$\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}$。

另外，由于$q_{n+1}>q_n$，所以取$\frac{p_n}{q_n}$代替$x$所产生的误差小于$\frac{1}{q_n^2}$，大于$\frac{1}{2q_{n+1}^2}$。

**341.** 从上一节可以明显看出，取$\frac{p_n}{q_n}$代替连分式的误差小于$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，或$\frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})}$；即小于$\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$；所以$a_{n+1}$越大，$\frac{p_n}{q_n}$便越近似地等于该连分式。所以，任何一个大商前面的渐近分数，便是该连分式很近似的值。

另外，因为误差小于$\frac{1}{q_n^2}$，所以为了求到一个与连分式的差小于某已知量$\frac{1}{a}$的渐近分数，我们只要计算逐阶渐近分数到$\frac{p_n}{q_n}$，其中 $q_n^2$ 大于 $a$ 便够了。

**342.** 连分式的有关性质使我们能够找到两个小整数，它们的比近似地等于两个不可通约量之比，或要用两个大整数才能准确表示的两个量的比。

【例】求近似地等于 3.14159 的一列分数。

在求 14159 与 100000 的最大公约数的过程中，商依次为 7，15，1，25，1，7，4。所以

$$3.14159=3+\frac{1}{7+}\ \frac{1}{15+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{25+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{4}.$$

逐阶渐近分数为

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \cdots;$$

上面最后一阶渐近分数在大商 25 的前面，它是一个相当近似的值，其误差小于$\frac{1}{25\times(113)^2}$，所以更小于$\frac{1}{25\times(100)^2}$，或 0.000004。

**343.** 连分式的任一阶渐近分数，比分母小于该渐近分数分母的任何分数更近似地等于这个连分式。

设 $x$ 为这个连分式，$\frac{p_n}{q_n}$与$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$为其两个连续的渐近分数。$\frac{r}{s}$为一分数，其分母 $s$ 小于 $q_n$。

假设$\frac{r}{s}$比$\frac{p_n}{q_n}$更靠近 $x$，则$\frac{r}{s}$必然比$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$更靠近 $x$。[见 339 节]因为 $x$ 在 $\frac{p_n}{q_n}$与$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之间，所以$\frac{r}{s}$也必落在 $\frac{p_n}{q_n}$ 与$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

之间。

所以

$$\frac{r}{s}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \text{即}\frac{r}{s}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{1}{q_nq_{n-1}};$$

$$\therefore\qquad rq_{n-1}\sim sp_{n-1}<\frac{s}{q_n};$$

这样，一个整数就小于一个分数了．这是不可能的。因此$\frac{p_n}{q_n}$必比$\frac{r}{s}$更靠近该连分式。

**344.** 如果$\frac{p}{q}$与$\frac{p'}{q'}$为一连分式$x$的两个连续的渐近分数，则$\frac{pp'}{qq'}$大于还是小于$x^2$，依$\frac{p}{q}$大于还是小于$\frac{p'}{q'}$而定。

设$k$为对应于紧跟在$\frac{p'}{q'}$后面的那个渐近分数的全部商；则$x=\frac{kp'+p}{kq'+q}$。

$$\therefore\quad \frac{pp'}{qq'}-x^2=\frac{1}{qq'(kq'+q)^2}[pp'(kq'+q)^2$$

$$-qq'(kp'+p)^2]$$

$$=\frac{(k^2p'q'-pq)(pq'-p'q)}{qq'(kq'-q)^2}。$$

因为$p'>p$，$q'>q$，$k>1$，所以因子$k^2p'q'-pq$为正；于是$\frac{pp'}{qq'}$大于或小于$x^2$，依$pq'-p'q$为正或为负，即依$\frac{p}{q}$大于或小于$\frac{p'}{q'}$而定。

**推论：** 从以上讨论中可见，表达式$pq'-p'q$，$pp'-$

$qq'x^2$，$p^2-q^2x^2$，$q'^2x^2-p'^2$ 同号。

## 练习二十五 b

1．已知1米等于1.0936码，如果取$\frac{222}{203}$码等于1米，求误差界限。

2．求 $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9+}\frac{1}{11+}\cdots$的近似值，它与精确值的误差小于0.0001。

3．用连分式理论证明$\frac{99}{70}$与1.41421的误差小于$\frac{1}{11830}$。

4．将$\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$表示成一个连分数，且求出其三阶渐近分数。

5．证明一阶与$n$阶渐近分数之差，在数值上等于

$$\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

6．如果$a_n$是对应于$\frac{p_n}{q_n}$的商，证明

(1) $\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_1}$；

(2) $\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_2}$.

7．在连分式$\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\cdots$中，证明

(1) $p_n^2+p_{n+1}^2=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2}$；

(2) $p_n=q_{n-1}$.

8．如果$\frac{p_n}{q_n}$是连分式$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots$的$n$阶渐近分数，证明

$$q_{2n}=p_{2n+1},\ q_{2n-1}=\frac{a}{b}p_{2n}.$$