韩云瑞　扈志明　编

微积分学习指导

（第2版）

历史溯源

内容综述

释疑解惑

例题分析

分组练习

清华大学出版社

韩云瑞 扈志明 编

微积分学习指导

（第2版）

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书通过对微积分发展历史的回顾，对微积分各个部分内容和方法的概括综合，以及对若干常见的疑难问题的解答，帮助读者在整体上理解微积分的原理和方法.然后通过典型例题的分析和习题的训练，帮助读者扎扎实实地掌握微积分的基本解题方法.认真阅读这本书并且钻研其中的问题，能够帮助读者全面提高对微积分的理解水平和解题能力.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/韩云瑞，扈志明编. —2版. —北京：清华大学出版社，2005.5

ISBN 7-302-10562-6

Ⅰ.微…　Ⅱ.①韩…②扈…　Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第013791号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：刘　颖

印 刷 者：北京市清华园胶印厂

装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：140×203　**印张**：10.375　**字数**：268千字

版　次：2005年5月第2版　2005年5月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-10562-6/O·446

印　数：1～3000

定　价：16.00元

致 读 者

《微积分学习指导》编写的宗旨是对于正在学习微积分(高等数学)或者复习微积分并准备参加各种考试的读者提供学习指导，帮助读者更好地理解微积分的原理，掌握微积分的内容和方法.

《微积分学习指导》不同于一般的微积分辅导书和习题集.不是简单地通过例题和习题，分散、孤立地介绍各种解题技巧，而是通过对微积分发展历史的回顾，对微积分各个部分内容和方法的概括综合，以及对若干常见疑难问题的解答，帮助读者在整体上理解微积分的原理和方法.然后通过典型例题的分析和习题的训练，帮助读者扎扎实实地掌握微积分的基本解题方法.认真阅读这本书并且钻研其中的问题，能够帮助读者全面提高对于微积分的理解水平和解题能力.

《微积分学习指导》的对象是大学理工科非数学专业的学生.特别是对数学有一定兴趣、学习成绩较好，或者有志于提升微积分学习水平的同学，也包括准备参加硕士研究生入学考试的读者.同时，本书中的历史资料、内容的综合概括、释疑解惑、某些典型例题以及编者对于微积分知识的有特色的诠释，对于正在讲授微积分(高等数学)课程的教师也有参考价值.

本书以篇为单元编写，每一篇的内容分成下列5个板块：

1. 历史回顾

了解微积分的创造发明史是理解微积分思想和方法的重要途径."历史回顾"部分向读者简单介绍了微积分概念和原理的创造发明历史，使读者走近一个个伟大的微积分先驱，从他们的创造活动中吸取营养，得到启示.

2. 内容与方法

编者力求在读者能够理解的程度上，用更宽的视野，对于微积

分的主要内容、方法和意义进行总结概括.使读者对所学知识获得一个整体上的、更加有条理的认识.

3. 释疑解惑

编者根据自己的教学经验,列举了学生中若干常见的、具有共性的疑问,给予解答.目的是为读者释疑解惑、澄清误解,更加准确地理解和掌握微积分的基本概念.其中有些问题不仅能够解答学生的疑问,而且有一定的启发性.另外,释疑解惑也能够为教师减轻重复回答问题所带来的繁重劳动.

4. 典型例题分析

通过对于典型例题的解题思路和解题技巧的分析,帮助读者提高分析问题和解决问题的能力.本书的宗旨是以提高为主,因此例题中的简单题目较少.但是所有例题和习题都是编者精心选编的,适合于非数学专业的理工科大学生的需要.其中包含了历年的全国理工科硕士研究生入学考试中的部分有典型意义的题目.这些题目用小括号内的5位数字表示,其中前两位数字表示年份,第3位数字表示考卷数,后两位数字表示在试卷中的题号数.

5. 练习题

本书的例题和习题,特别是某些较难的题目,目的不是对读者重复地训练解题技巧,而是重点培养读者的探索精神和创新能力.鉴于本书的练习题有一定难度,所以所有的习题都附有答案和必要的提示.

刘庆华,王燕来和吴洁华几位老师曾经参加过《微积分学习指导》第1版的编写工作.在第1版的基础上,由韩云瑞和扈志明对原书进行了大幅度的修订,形成本书的第2版.编者将这本书奉献给读者,希望读者给予批评指正.

编　者

2004年10月于清华大学

目　　录

第1篇　极限与连续

1.1　历 史 回 顾

建立在实数理论基础上的极限论是近代微积分的理论基础.近代微积分指微积分在18～19世纪的发展,这一时期微积分的特点是建立了严密化体系.代表人物有捷克数学家波尔察诺(Bolzano,1781—1848),法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857)和德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass, 1815—1879)等.

17～18世纪,由于微积分解决问题的特殊能力,使得微积分先驱们把主要精力致力于微积分的应用.他们创造了许多有力的方法,并建立了不少以微积分方法为主的分支科学.但是微积分中的许多概念则缺少统一的、精确的定义.在那个时期,对于函数的研究总是和几何以及运动联系在一起.因此很多结论都是由几何直观以及对于运动的理解而得到的,缺少严格的证明.所以18世纪之前的微积分存在相当多的含混不清之处.进入19世纪以后,微积分本身的矛盾迭起,数学家们才不得不对微积分的基本概念与理论方法进行认真分析,通过实数的精确概念,以及用ε-δ方法建立的极限理论为微积分奠定了严实的基础.这正是18～19世纪许多数学大师致力于微积分严格化的历史背景.

捷克数学家波尔查诺最早将严格的论证方法引入微积分之中,是数学严格化的先驱之一.法国数学家柯西和德国数学家魏尔斯特拉斯在微积分中引进了严格的表述与证明,使微积分摆脱了单纯对几何直观理解和物理解释,从而形成了微积分的近代体系.从古希腊一直到18世纪,极限的思想与方法绵延不断地出现

在许多数学家的创造活动之中.例如中国古代数学家刘徽在用割圆术计算圆周率时,从圆的内接正六边形算起,依次将边数加倍,一直算到内接正192边形.刘徽割圆的思想与方法,包含了朴素的极限概念.又如17世纪的英国数学家沃利斯(1616—1703)已经很清楚地叙述极限概念,他说:变量的极限——这是变量能如此逼近的一个常数,它们之间的差能够小于任何给定的量.但是,直至18世纪30年代,柯西才以正确的方法建立了极限理论.现今微积分教科书中表述极限概念的 ε-δ 方法,就是由柯西创建,后经魏尔斯特拉斯加工而成的.柯西和魏尔斯特拉斯用不等式表述极限定义,从而使得极限这个概念得以定量化,进而能够从极限的定义出发证明微积分学中的许多命题,同时也能够借助于极限去界定微积分的许多重要概念.例如,函数的连续性,函数的导数和积分,级数的求和以及反常积分的收敛性等概念都是用极限定义的.

波尔查诺在1817年就给出了连续函数的定义,并且用确界的概念证明了连续函数的介质定理.后来柯西又以更加严格的方式定义了连续函数.他说:函数 $f(x)$ 连续,就是差值 $f(x+a)-f(x)$ 随着 a 无限减少而无限减少.柯西还利用区间套的思想证明了连续函数的介质定理.现在微积分教科书中用 ε-δ 方法表述函数连续性的严密定义是由魏尔斯特拉斯给出的.魏尔斯特拉斯还陈述了闭区间上的连续函数必定能达到上确界和下确界的性质,也就是连续函数在有界闭区间上的最大最小值定理.

1.2　内容与方法综述

传统的微积分(高等数学)用 ε-N 和 ε-δ 算术化语言描述极限概念,并且在这个基础上对于极限的若干重要性质(例如极限的保号性、无穷大量的定量描述)和运算法进行证明.以极限理论作为载体,对于学生进行一些非常基本的理性思维的训练.多年的教学

实践表明,这种处理方法对于培养学生的理性思维能力有不可替代的作用.如果完全缺少了这一部分,会使微积分的教与学产生不少困难.但是也有一些专家认为,微积分的核心是微分和积分,而不是极限论.加之极限理论比较困难,初学者不容易接受,因此微积分可以不讲极限理论,或者在学过一元微积分之后再讲极限.这就产生了所谓的"直观微积分",即没有 ε-N 和 ε-δ,尽可能减少理论分析和论证的微积分.本书不打算仔细比较两种讲法的利弊,而是要照顾到分别使用以上两种类型教材的读者.处理方法是将极限分成两个部分.首先要求读者掌握两个重要极限,熟练地掌握极限的运算法则,包括无穷小量阶的比较.然后讲解极限的定量概念,并且围绕极限的概念和性质进行基本的逻辑思维和推理能力的训练.这样可以同时适用于不同层次、使用不同教材的读者.

1.2.1 极限的直观概念和运算法则

极限描述处于无限变化过程(简称变化过程)中的函数的变化趋势.变化过程指自变量的变化过程.对于数列,自变量是自然数(数列通项的序号),对于一元函数,自变量是实数.自然数的变化过程只有一种,就是 $n\to\infty$.实数的变化过程可以有 6 种:$x\to a$,$x\to a-0$,$x\to a+0$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$.由于自变量的变化过程不同,上述 7 种变化过程中的极限概念的表述方式略有区别.但是它们的本质都是相同的,因而具有完全相同的性质和运算法则.今后,根据函数自变量的不同和具体变化过程的各异,还将会出现新的类型的极限(例如多元函数的极限、函数的定积分、级数求和以及反常积分等).

1. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

由第一个重要极限可以直接推出下列结果：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

由第二个极限直接可以推出

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2. 夹逼定理

设在同一个变化过程中(例如 $n\to\infty$，$x\to x_0$ 等)，有 $\lim f(x)=\lim g(x)=A$. 如果在这个过程中满足 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则有 $\lim h(x)=A$.

夹逼定理是判定极限是否存在的一个充分条件，同时也是一个求极限的重要方法.

3. 极限的运算法则

极限运算法则是求函数极限和数列极限的主要工具.

(1) 极限的四则运算是应用最多、也是最容易掌握的运算法则. 关于极限的四则运算，惟一需要注意的是：求分式极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，分母必须满足 $\lim g(x)\neq 0$. 如果 $\lim g(x)=0$，但是 $\lim f(x)\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在；如果 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$，则问题需要作进一步分析.

(2) 极限的复合运算法则对于求函数极限是一个非常有效的工具，现在叙述这个法则，并用实例说明它的应用. 关于这个法则理解中的难点，留到本章的释疑解惑中说明.

定理 1.1 设 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，且当 $x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

例 1.1 因为$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以由定理 1.1 推出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1,\text{即}\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1.$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以由定理 1.1 推出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}=1$.

例 1.2 因为$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$，所以由定理 1.1 推出$\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan x)^{\cot x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(3) 幂指函数的求导法则

定理 1.2 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b$.

例 1.3 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2-a^2}\right)^{x^2-a^2}=\mathrm{e}^2$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-a^2}=1$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x^2-a^2}\right)^{x^2+a^2}\right]^{\frac{x^2}{x^2+a^2}}=(\mathrm{e}^2)^1=\mathrm{e}^2.$$

1.2.2 无穷小量与无穷大量

无穷小量是以零为极限的变量，因此无穷小量在变化过程中，其绝对值可以小于事先指定的任意小的正数.但是不能说无穷小量是任意小的数，这就是说，绝不能将变量混同于常量.

无穷大量是指在变化过程中其绝对值可以无限增大的变量.也就是说，在变化过程中，该变量的绝对值可以大于事先指定的任意大的正数.注意，无穷大的变量是没有极限的. $\lim f(x)=\infty$ ($+\infty$或$-\infty$)并不意味极限存在，只是一种记号.

无穷小量这一部分内容的核心是无穷小量的阶的比较.因为

只有涉及到阶的比较,对于无穷小量的讲解才有实际意义.关于无穷小量的比较,要注意以下几方面的问题:

(1) 处在同一个变化过程中的无穷小量才能够作阶的比较;

(2) 在同一个变化过程中,并不是所有的无穷小量都可以比阶.例如,当 $x\to 0$ 时,x 和 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 都是无穷小量,但是因为比值 $\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$ 没有极限,也不趋向于无穷大,所以 x 和 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 不能互相比较阶的高低.

(3) 除了恒等于零的函数之外,在同一个变化过程中不存在阶最高的无穷小量;同时也不存在阶最低的无穷小量.也就是说,对于某个变化过程中的任意一个不等于零的无穷小量 α,总可以构造同一个变化过程的另外两个无穷小量 β 和 γ,使得 α 与 β 比较是高阶无穷小量;γ 与 β 比较是高阶无穷小量(参阅本章的释疑解惑).

(4) 无穷小量的阶数.假设当 $x\to 0$ 时,α 是无穷小量.如果存在正数 p,使得 α 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{|x|^p}=c\neq 0$,则称当 $x\to 0$ 时,α 是 p 阶无穷小量.但是,并非任何一个无穷小量都是某个阶的无穷小量.例如当 $x\to 0$ 时,$x\ln|x|$ 是无穷小量.但是,对于任意正数 p,$x\ln|x|$ 不是 p 阶无穷小量.

(5) 关于等价无穷小量的代换问题.在极限运算过程中,用等价无穷小量的互相代换求极限是一个非常有用的方法.但是一定要注意,在表达式中,只有作为因子的无穷小量才可以用等价无穷小量取代.作为(加、减)项的无穷小量是不能随意用等价无穷小量取代的.

作为练习,请读者回答下面的问题:

假定当 $x\to 0$ 时,u,v,w 和 u_1,v_1,w_1 都是无穷小量,并且 $u\sim u_1,v\sim v_1,w\sim w_1$.又设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u+v}{w}=a$,则下列极限必定等于 a 的

表达式是哪一个？

(A) $\frac{u_1+v}{w}$ (B) $\frac{u+v_1}{w}$ (C) $\frac{u_1+v_1}{w_1}$ (D) $\frac{u+v}{w_1}$

又问：如果$\lim\limits_{x\to 0}\frac{u+v}{w}=0$，能否推出 $u=o(w)$，$v=o(w)$？

（答案：D 中函数极限等于 a；不能.）

1.2.3 连续函数

1. 间断点分类

如果 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域（即包含 x_0 的某个开区间）中处处有定义，并且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

如果 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称 x_0 是函数 $f(x)$的一个间断点.

当 $f(x)$在点 x_0 发生间断时，可能有下列几种情形：

(1) $f(x)$在点 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$不成立. 这时称 x_0 为 $f(x)$的第一类间断点.

第一类间断点又可以分成两种情形：

① $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，从而极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$不成立. 此时可能有两种情形：第一种情形是 $f(x)$在点 x_0 没有定义，第二种情形是 $f(x)$在点 x_0 有定义，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$. 在这种情形，称 x_0 为 $f(x)$的可去间断点.

② $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，此时，称 x_0 为 $f(x)$的跳跃间断点.

(2) 如果 $f(x)$在点 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点.

第二类间断点又可以分成两种情形：

① 当 $x \to x_0$ 时，如果 $f(x)$ 无界，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

② 当 $x \to x_0$ 时，如果 $f(x)$ 有界，但是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 或者 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的震荡间断点.

关于一元函数间断点的分类，国内不同的教科书上有些微小的差别.比较多的教科书采用上述分类方法.

2. 有关连续函数的重要定理

(1) **最大最小值定理**　若 $f \in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 有界，并且存在两点 ξ, η，使得

$$f(\xi) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$
$$f(\eta) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

最大值点和最小值点不一定是惟一的.连续函数的最大最小值定理只断定能够达到最大值和最小值，却没有给出求最大值和最小值的方法.

(2) **介值定理**　若 $f \in C[a,b]$，

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\},\quad m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$

则对于任意的 $\mu \in (m, M)$，都存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \mu$.

因此，闭区间上的连续函数取遍最大值和最小值之间的所有数值.也就是说，闭区间上的连续函数的值域是一个闭区间.

(3) **零点定理**　设 $f \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

零点定理是介值定理的特殊情形.但请读者注意，这两个定理的证明方法不是先证明一般情形(介值定理)，然后由一般定理推出特殊情形(零点定理).而是相反：先证明零点定理(特殊情形)，再设法将介值定理(一般情形)化归零点定理.数学的证明过程经常采用这样的方法：为了解决一个一般的(复杂的)问题，首先考