

塑性力学及其应用

黄筑平 主编

2

北京理工大学出版社

前 言

为了交流近年来塑性力学在学术研究、实际应用和教学经验等方面的成果,探讨塑性力学的发展方向,经中国力学学会塑性力学专业组主办,由吉林工业大学承办,于1997年8月在长春召开了“全国塑性力学及其应用学术研讨会”。会议除交流了塑性力学学术研究成果外,还特别强调了塑性力学在工程实际问题(如金属压力加工)中的应用,加强了塑性力学工作者与工程技术人员的交流与沟通,从而使塑性力学能更好地为生产实践服务。

塑性力学不仅是固体力学中的一个重要分支,是断裂力学、损伤力学等许多研究领域的理论基础,而且它在金属压力加工、岩土工程、机械制造、结构分析等许多工程实际问题中有着重要的应用背景。近年来塑性力学一直是国内外十分活跃的研究领域之一。在塑性力学的理论研究方面,我国学者在跟踪国际前沿的同时,也作出了一些有特色的创新性工作;在塑性力学的工程应用方面,我国学者所取得的一批令人瞩目的成果,正在我国的国民经济中发挥着巨大的作用。

从“全国塑性力学及其应用学术研讨会”的参会论文中,我们精选出来一部分有代表性的论文,它们基本上反映了我国学者近年来在塑性力学的学术研究和工程应用方面的概况。现正式出版,供同行们和有关工作人员参考。其中难免有不妥和错误之处,恳请读者能提出批评指正。最后还要感谢对本文集进行评审的专家们和北京理工大学出版社对我们工作所给予的支持。

编 者
1998年6月

目 录

一、材料力学行为

- 1 非经典变温大变形弹塑性本构方程及其应用
.....高芝晖 彭向和 韩荣辉 (3)
- 2 形状记忆合金相变的热力学本构模型: I.基本理论
.....朱久江 梁乃刚 刘志宏 (14)
- 3 形状记忆合金相变的热力学本构模型: II.数值模拟及其与实验的比较
.....朱久江 梁乃刚 刘志宏 (23)
- 4 应变梯度理论展望.....黄克智 姜汉卿 (31)
- 5 弹塑性有限变形的几何描述.....宋 凡 孙 毅 王 铎 (37)
- 6 关于结构蠕变破坏的研究.....王 仁 (44)
- 7 分析颗粒分布不均匀性对复合材料性能影响的一种方法.....胡更开 (53)
- 8 织构板塑性各向异性行为研究.....刘守荣 陈积伟 连建设 (59)
- 9 短纤维增强金属基复合材料弹性和屈服行为的解析研究 I-应力场分布
及弹性模量和屈服强度.....江中浩 丁向东 连建设 胡 平 (65)
- 10 短纤维增强金属基复合材料弹性和屈服行为的解析研究 II-热残留应
力分布及其对拉伸和压缩载荷下的应力场分布及弹性模量和屈服
强度的影响.....江中浩 丁向东 连建设 胡 平 (76)
- 11 塑性介质中的双孔问题.....宁建国 黄筑平 刘 熠 (88)
- 12 弹塑性损伤材料的剪切带状失稳.....李相麟 扶名福 (98)
- 13 群体位错自组织的宏观力学效应和临界特征.....黄国君 段祝平 (103)
- 14 晶体塑性尺度效应的柔性位错塞积模拟吴筱益 杨 卫 (111)
- 15 金属钨裂端位错发射和韧脆性质.....汤奇恒 王自强 (117)

二、实 验 研 究

- 16 非比例循环加载下 1Cr18Ni9Ti 不锈钢的棘轮行为实验研究.....杨显杰 (131)
- 17 灰口铸铁在复杂应力状态下屈服与强度的实验研究
.....张泽华 庞宝君 赵树山 陈晓光 (137)
- 18 充满液体的弹塑性圆柱壳轴压屈曲过程中内压变化的研究
.....张善元 雷建平 孙华东 刘志芳 李 珠 王显耀 (142)

- 19 26Cr2Ni4MoV 钢高温状态下动态再结晶过程及晶粒尺寸演化规律的实验研究..... 许福军 金泉林(148)

三、结 构 响 应

- 20 用一个新的无量纲数——“响应数”表征结构塑性动力响应的若干解析结果.....赵亚溥(157)
- 21 粘塑性薄壁圆管中复合应力波的传播黄承义 李永池 张 伟 金咏梅(167)
- 22 钝头弹体正冲击下薄壁金属结构局部破裂模式分析张铁光(175)
- 23 关于理想塑性平面应力问题裂纹尖端应力场的讨论..... 庞宝君 王志伟 袁祖培(187)

四、工 程 应 用

- 24 高温锻造与热塑性本构关系..... 金泉林(197)
- 25 考虑相变的积分型热弹塑性本构方程及其在焊接残余应力分析中的应用.....陈 斌 彭向和 高芝晖 范镜泓(208)
- 26 应力应变顺序对应规律及其在体积成形中的应用.....王仲仁 詹艳然(214)
- 27 厚壁管的身管机械自紧的理论和计算徐秉业 芮嘉白 朱 峰 徐 迟(220)
- 28 板料线状加热弯曲的简化分析.....王志强 金泉林 海锦涛(225)
- 29 热推弯管成形过程力学原理及分析求解方法...鹿晓阳 徐秉业 岑章志 史宝军(231)
- 30 梯形模拟块技术及其应用栾贻国 孙 胜 张广松(240)
- 31 基于刚塑性有限元和非线性规划算法的锻造毛坯形状优化.....聂绍珉 段新建 郑晓强(247)
- 32 冲压件成形与模具设计数值仿真一体化技术.....胡 平 李运兴 柳玉起 连建设(253)
- 33 刚塑性、刚粘塑性、弹塑性有限元法中的两个关键因数.....徐伟力 李雪春 徐宏志 杨玉英(265)
- 34 新型加压介质超塑性成形过程的有限元模拟.....张凯锋 吴 为 张 怀(271)
- 35 变断面细长杆件无模拉伸刚塑性有限元分析...王忠堂 栾瑰馥 白光润 曹 立(277)
- 36 热力耦合大变形有限元方法及其在热轧中的应用.....崔振山 刘 才(284)
- 37 直缝焊管成型过程的计算机仿真研究.....韩志武 刘 才 周 瑛(290)
- 38 反应堆压力壳上法兰锻造芯轴拔长工艺模拟研究.....朱 峰 徐秉业 曹起骧(294)
- 39 工程分形根的拔出力和拔出能.....程兆雄 黄怡筠(301)

一、材料力学行为

非经典变温大变形弹塑性本构方程及其应用

高芝晖 彭向和 韩荣辉

(重庆大学工程力学系, 重庆 400044)

摘要 利用由弹性元件和塑性滑块组成的机械模型发展了一种考虑材质随温度改变的非经典大变形弹塑性本构方程。

由此发展了基于 Updated-Lagrangian 描述的热力耦合问题的结构分析有限元程序。由于不采用屈服面及相应的加卸载准则和流动法则, 避免了由于本构方程的不连续性带来的计算上的困难, 因而在热力耦合大变形弹塑性分析中具有特殊的优越性。

利用所发展的本构方程与结构分析程序分析了圆棒试件拉伸颈缩问题及压力容器 O 形密封环的大变形压扁和反复加、卸载过程中压紧载荷和回弹量的松弛, 均取得了与实验数据较为一致的结果。计算还显示了较高的计算效率、精度和良好的收敛性, 因而在工程实际中具有较大的应用价值。

关键词 非经典塑性理论, 热力耦合, 弹塑性分析, 大变形, 本构方程

引言

经典塑性理论在发展非线性力学及解决工程结构的受力和强度、稳定性问题中都起了重要作用, 但它是以屈服面概念作为其发展前提, 由此日益显现出它在理论上和工程应用上的局限性和缺陷。Drucker 不久前指出“……进行测量的灵敏度越高、屈服面的直径就越小。当适量的位错运动作为宏观塑性变形被检测时, 观察到的屈服面半径将收缩为零”^[1]。工程计算上常用的强化规则也包含了太多的假设。当屈服面几何及其运动规律难以捉摸时, 依据正交法则确定的塑性应变增量, 其可靠程度也值得商榷。同时屈服面的存在导致本构方程的不连续性, 给理论分析和工程计算带来了复杂性和困难。

随后发展起来的非经典塑性理论在不同的方面突破了经典塑性理论的框架。一些学派定义了广义时间以代替牛顿时间作为物质不可逆热力学过程历史的量度, 且不以屈服面和屈服准则作为其发展理论的前提, 这一突出的特点, 使得对工程中复杂加载的弹塑性问题进行力学分析显得极其方便和有效。

本文依据热力学相容的本构模型^[2], 发展了一种考虑变温对材质影响的非经典弹塑性大变形本构方程。在此基础上, 并考虑热力耦合, 发展了基于 Updated-Lagrangian 描述(以下简称为 U.L.描述)的对变温弹塑性大变形进行结构分析的有限元程序。与传统的算法比较, 由于不采用屈服面及相应的加卸载准则, 避免了由于本构方程的不连续带来的计算上的困难, 因而在大变形弹塑性分析中具有特殊的优越性, 精炼了程序结构, 加快了算法的收敛速度, 并由于给出的是较精确的积分型增量本构方程, 可加大步长, 缩短了计算机时, 提高了计算精度。

1 考虑材质随温度改变的非经典大变形弹塑性本构方程

与其它应变度量相比,对数应变有其较明显的优点,它能反映真实应变,拉、压(正、负)对称,有可加性,且其正应变之和即为体积应变等,故本文中以对数应变 ϵ 作为变形的度量,与其共轭的应力 $\mathbf{T}$ (以下暂称之为对数应力)在变形很小时近似地表为^[3]

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 Kirchhoff 应力, $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{R}$ 为变形梯度 $\mathbf{F}$ 极分解中的正交张量。在有限元应力应变分析中,当采用 U.L.描述时,由于每一增量步的当前构形相对参考构形的变形很小,使对数应力与 Kirchhoff 应力间近似成立如(1)式的简单关系,使本文中推导以对数应力率与形变率基本变量的本构关系和相应的有限元列式变得简便。

对于不可逆的热力学过程,我们采用 Valanis 的内蕴时间 z 作为度量材料不可逆变形史的广义时间, $dz = \frac{1}{f(z)} \sqrt{d\epsilon_j^p d\epsilon_j^p}$, 其中 $f(z)$ 为强化函数。

不用屈服面的概念,采用图 1 所示的由弹簧和塑性滑块组成的热力学相容的本构模型^[2], 图中 $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{e}^e$ 、 $\mathbf{e}^p$ 分别为 Hill 对数应变张量偏量及其弹、塑性部分, $\mathbf{S}$ 为对数应力张量偏量。 $\mathbf{p}^{(r)}$ 为第 r 个内变量(设为二阶张量)的偏量,相应的广义内摩擦力为 $\mathbf{Q}^{(r)}$, E_r 和 b_r 反映内部某一微观机制的弹性刚度和阻尼。我们设 $\mathbf{p}^{(r)}$ 与 $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{e}^p$ 等具有同样的张量性质,当取当前构形为参考构形时, $\mathbf{p}^{(r)}$ 的变化率 $\dot{\mathbf{p}}^{(r)}$ 与形变率 $\mathbf{D}$ 相似也为客观张量,且与转动无关。设材料为初始各向同性和塑性不可压,且考虑变温对材质的影响。

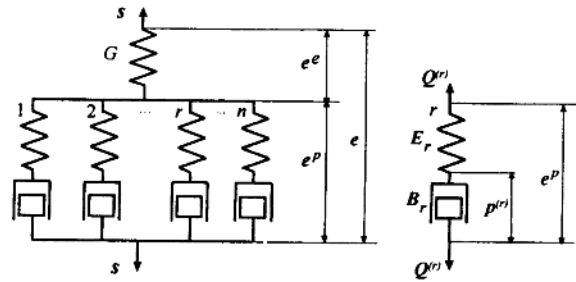


图 1 本构关系的简单机械模型

设微观机制的本构响应为线性的, 则有

$$\mathbf{Q}^{(r)} = E_r (\mathbf{e}^p - \mathbf{p}^{(r)}) \quad (2a)$$

$$\text{及} \quad \mathbf{Q}^{(r)} = b_r \dot{\mathbf{p}}^{(r)} \quad (2b)$$

注意到当取当前构形为参考构形时, Hill 类应变率量度都可简化为形变率^[4]。由此得

$$\dot{\mathbf{Q}}^{(r)} = \dot{E}_r (\mathbf{e}^p - \mathbf{p}^{(r)}) + E_r (\mathbf{D}^p - \dot{\mathbf{p}}^{(r)}) \quad (3)$$

利用式(2a)、(2b), 则上式变换为:

$$\dot{\mathbf{Q}}^{(r)} + \bar{\alpha}_r \mathbf{Q}^{(r)} = E_r \mathbf{D}^p, \quad \bar{\alpha}_r = \alpha_r - \frac{1}{E_r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (4)$$

式中 θ 为总温升, $\dot{\theta} = d\theta/dz$ 为对广义时间的物质导数, $\alpha_r = E_r/b_r$ 。现假设在每一增量步中, (i) $\dot{\theta}$ 和 $\mathbf{D}^p$ 保持不变, (ii) E_r 和 α_r 保持不变, 则由(4)式可积分得

$$\mathbf{Q}^{(r)}(z) = \mathbf{Q}^{(r)}(z_n) e^{-\bar{\alpha}_r \Delta z} + \bar{k}_r E_r \Delta \mathbf{e}^p, \quad \bar{k}_r = \frac{1}{\bar{\alpha}_r \Delta z} (1 - e^{-\bar{\alpha}_r \Delta z}) \quad (5)$$

由此得积分型增量

$$\Delta \mathbf{Q}^{(r)} = \mathbf{Q}^{(r)}(z) - \mathbf{Q}^{(r)}(z_n) = \bar{\mathbf{A}}_r \Delta \mathbf{e}^p + \bar{\mathbf{B}}^{(r)} \Delta z \quad (6)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}}_r = \bar{k}_r E_r, \quad \bar{\mathbf{B}}^{(r)} = -\bar{k}_r \bar{\alpha}_r \mathbf{Q}^{(r)}(z_n) \quad (7)$$

由图 1 可得:

$$\mathbf{S} = \sum_{r=1}^N \mathbf{Q}^{(r)} \quad (8)$$

由此得

$$\Delta \mathbf{S} = \sum_{r=1}^N \Delta \mathbf{Q}^{(r)} = \bar{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{e}^p + \bar{\mathbf{B}} \Delta z \quad (9)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_{r=1}^N \bar{\mathbf{A}}_r, \quad \bar{\mathbf{B}} = \sum_{r=1}^N \bar{\mathbf{B}}^{(r)} \quad (10)$$

将(9)式中的 $\Delta \mathbf{e}^p$ 用 $\Delta \mathbf{e}$ 表示得

$$\Delta \mathbf{S} = 2\bar{\mu}_p \Delta \mathbf{e} + \bar{\mathbf{T}}_p \bar{\mathbf{B}} \Delta z \quad (11)$$

式中

$$\bar{\mathbf{T}}_p = \left(1 + \frac{\bar{\mathbf{A}}}{2G} \right)^{-1}, \quad 2\bar{\mu}_p = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{T}}_p \quad (12)$$

假设体积响应是弹性的, 并假定杨氏模量 E 随温度改变而泊松比 ν 不随温度变化, 得:

$$\Delta T_k^k = 3K \Delta \epsilon_k^k - g \Delta \theta \quad (13)$$

式中

$$g = 9K\alpha - T_k^k \frac{\partial E}{\partial \theta} / E + 9K\theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \quad (14)$$

E 、 K 和 G 为杨氏模量、体弹模量和剪切模量, α 为线膨胀系数。

将(11)和(13)式代入下式

$$\Delta \mathbf{T} = \Delta \mathbf{S} + \frac{1}{3} \Delta T_k^k \mathbf{I} \quad (15)$$

并将 Δz 用 $\Delta \mathbf{e}^p$ 和 $\Delta \epsilon$ 表示, 经过一些运算, 并写成率的形式, 最后得

$$\dot{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{E}} : \mathbf{D} - \frac{g}{3} \mathbf{I} \dot{\theta} \quad (16a)$$

$$\text{写成张量分量形式} \quad (\dot{\mathbf{T}})_j^i = \bar{E}_{ji}^k D_k^i - \frac{g}{3} \delta_j^i \dot{\theta} \quad (16b)$$

$$\text{式中} \quad \bar{E}_{ji}^k = 2\bar{\mu}_p \delta_j^i \delta_k^i + \left(K - \frac{2}{3} \bar{\mu}_p \right) \delta_j^i \delta_k^i + \frac{2}{\alpha} (G - \bar{\mu}_p) \bar{H} \bar{B}_j^i \frac{\Delta e_i^k}{\Delta z} \quad (17)$$

$$\text{其中} \quad \bar{H} = \bar{T}_p / (2Gf^2), \quad \bar{a} = 1 + \frac{\bar{H}}{\Delta z} \bar{B}_j^i \Delta e_i^p \quad (18)$$

对强化趋于饱和的材料, 取

$$f(z) = c - (c-1)e^{-\beta z} \quad (19)$$

式(16)即为本文所得的非经典大变形积分型增量弹塑性本构方程。当材质不随温度改变时

$$\frac{\bar{g}}{3} = 3K\alpha, \quad \bar{\alpha}_r = \alpha_r, \quad \bar{k}_r = k_r, \quad \bar{A} = A, \quad \bar{B} = B, \quad \bar{\mu}_p = \mu_p, \quad \bar{H} = H \quad (20)$$

本构方程(16)成为

$$(\dot{\mathbf{T}})_j^i = E_{ji}^{ik} D_k^i - 3K\alpha \delta_j^i \dot{\theta} \quad (21)$$

$$\text{式中} \quad E_{ji}^{ik} = 2\mu_p \delta_j^i \delta_k^i + \left(K - \frac{2}{3}\mu_p\right) \delta_j^i \delta_k^i + \frac{2}{a}(G - \mu_p) H B_j^i \frac{\Delta e_i^k}{\Delta z} \quad (22)$$

式中 μ_p 、 H 、 B_j^i 等符号参见[2]。由圆棒试件的单拉实验获得的实验数据可求得对数应力应变曲线 $T = \varphi(\varepsilon)$, 从而可确定材料的本构常数 E_r 、 α_r 、 c 、 β 等。

将 $\bar{\mu}_p$ 用级数展开, 并忽略高阶小量, 得

$$\bar{\mu}_p = \mu_p \left[1 + \left(\frac{1}{A} - \frac{T_p}{2G} \right) \left(\sum \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \frac{\Delta \theta}{2} \right] \quad (23)$$

一般 $\partial E_r / \partial \theta < 0$, 由(23)式可得升温时 $\bar{\mu}_p < \mu_p$ 。可见若对材质随温度改变的结构材料, 采用材质不随温度改变的变温本构方程(21)、(22)式(只是对应于不同增量步因温度值不同而取不同的材料常数)计算结构在变温承载时之应力、应变, 将引起明显的误差。以单拉升温为例, 在给定外载时将使计算得到的位移值偏小, 而在给定位移时使算得的应力值偏大。

在轴对称情况下, 将式(16)写成工程(而非张量)形式, 并用矩阵表示:

$$\{\Delta T\} = [D_{ep}] \{\Delta \varepsilon\} - \frac{\bar{g}}{3} \{m\} \Delta \theta \quad (24)$$

$$\text{式中} \quad \{\Delta T\}^T = (\Delta T_1^1, \Delta T_2^2, \Delta T_3^3, \Delta T_3^1) \quad (25)$$

$$\{\Delta \varepsilon\}^T = (\Delta \varepsilon_1^1, \Delta \varepsilon_2^2, \Delta \varepsilon_3^3, \Delta \gamma_3^1), \quad \text{其中 } \Delta \gamma_3^1 = 2\Delta \varepsilon_3^1$$

$$\{m\} = (1 \ 1 \ 1 \ 0)^T \quad (26)$$

$$[D_{ep}] = 2\bar{\mu}_p [D] + \frac{2}{a} (G - \bar{\mu}_p) \frac{\bar{H}}{\Delta z} [B_p] \quad (27)$$

其中

$$[D] = \begin{bmatrix} 1+c & c & c & 0 \\ & 1+c & c & 0 \\ & & 1+c & 0 \\ \text{对 称} & & & 1/2 \end{bmatrix} \quad c = \frac{K}{2\bar{\mu}_p} - \frac{1}{3} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
[B_p] &= \{\bar{b}\} \{\Delta e^p\}^T \\
\{\bar{b}\} &= (\bar{B}_1^1, \bar{B}_2^2, \bar{B}_3^3, \bar{B}_3^1) \\
\{\Delta e^p\}^T &= \left(\Delta e_1^p, \Delta e_2^p, \Delta e_3^p, \Delta e_3^p \right)
\end{aligned} \quad (29)$$

2 虚功率方程和求解位移场的有限元列式

设 Ω 、 Γ 和 ρ 为物体在某一参考构形时占有的体积、界面和密度，在界面 Γ_u 上给定速度 V ，在界面 Γ_T 上给定面力率 $\dot{p}$ ，且 $\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_u$ ，在 Ω 内给定单位质量的体力率 $\dot{b}$ ，则由虚功率原理可得

$$\int_{\Omega} \dot{t} : (\delta V \nabla) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \dot{p} \cdot \delta V d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \dot{b} \cdot \delta V d\Omega \quad (30)$$

式中 t 为第一类 Piola-Kirchhoff 应力，符号 ∇ 为 Hamilton 算子。现取当前构形为参考构形时， Ω 、 Γ 和 ρ 表当前构形之体积、界面和密度，忽略体力，并利用由关系式

$$t = J \sigma (F^{-1})^T \quad (F \text{ 为变形梯度张量}) \quad (31a)$$

$$\text{得到的} \quad \dot{t} = D_k^k \sigma + \sigma^j + V \nabla \cdot \sigma - D \cdot \sigma - \sigma \cdot D = \dot{T} + V \nabla \cdot \sigma - D \cdot \sigma - \sigma \cdot D \quad (31b)$$

式中 σ^j 为 Cauchy 应力 σ 的 Jaumann 导数，则式(30)可化为下列形式

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \dot{T} : \delta D dW - \int_{\Omega} 2 \sigma \cdot D : \delta D dW \\
+ \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla V : \nabla \delta V d\Omega = \int_{\Gamma_T} \dot{p} \cdot \delta V d\Gamma
\end{aligned} \quad (32a)$$

写成分量形式为：

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\dot{T})_j \delta D_i^j d\Omega - \int_{\Omega} 2 \sigma_j^i D_k^j \delta D_i^k d\Omega + \\
\int_{\Omega} \sigma_j^i g^{jr} g_{ks} \nabla_r V^s \nabla_i \delta V^k d\Omega = \int_{\Gamma_T} \dot{p}_k \delta V^k d\Gamma
\end{aligned} \quad (32b)$$

上式对任何坐标系成立，式中 $\nabla_i V^j$ 为矢量逆变分量的协变导数， g^{ij} 、 g_{ij} 为度量张量， $\dot{p}_k$ 为矢量 p 物质导数的分量，而非矢量分量的物质导数 $\dot{p}_k$ ，称为矢量分量的全导数：

$$\dot{p}_k = \dot{p}_k - p_j V^j \Gamma_{ki}^i \quad (\text{对空间固定坐标系}) \quad (33a)$$

$$\dot{p}_k = \dot{p}_k - p_j \nabla_k V^j \quad (\text{对拖带坐标系}) \quad (33b)$$

Γ_{ki}^j 为 Christoffel 符号。

对轴对称问题和圆柱坐标系，采用 U.L. 描述，将单元任一点位移 $\{u\}$ 和速度 $\{V\}$ 用单元节点位移 $\{\psi_e\}$ 和节点速度 $\{\dot{\psi}_e\}$ 来表示

$$\begin{aligned}
\{u\} &= [N] \{\psi_e\} \\
\{V\} &= [N] \{\dot{\psi}_e\}
\end{aligned} \quad (34)$$

并将式(32)用矩阵表示, 得有限元列式如下

$$[K]_n^{i-1} \{\Delta\psi\}_n^i = \{\Delta R\}_n + \{\Delta R_\theta\}_n \quad (35)$$

式中 $[K]_n^{i-1}$ 为第 n 次增量步第 $i-1$ 次迭代后的总刚矩阵

$$[K]_n^{i-1} = \sum_{r=1}^M \left\{ \int_{\Omega_r} [B]^T ([D_{ep}] - [\sigma_I]) [B] d\Omega + \int_{\Omega_r} [E]^T [\sigma_{II}] [E] d\Omega \right\} \quad (36)$$

$\{\Delta R\}_n$ 和 $\{\Delta R_\theta\}_n$ 为第 n 次增量步中的载荷增量和虚拟温度载荷增量

$$\{\Delta R\}_n = \int_{\Gamma_T} [N]^T \{p\}_n d\Gamma - \sum_{r=1}^M \int_{\Omega_r} [B]^T \{\sigma\}_{n-1} d\Omega \quad (37a)$$

$$\{\Delta R_\theta\}_n = \int_{\Omega} [B]^T \frac{g}{3} \{m\} \Delta\theta d\Omega \quad (37b)$$

式中 矩阵 $[B]$ 、 $[E]$ 、 $[\sigma_I]$ 、 $[\sigma_{II}]$ 参见[5], M 为单元数。 $\{p\}_n$ 为第 n 次增量步末之总载, $\{\sigma\}_{n-1}$ 为第 $n-1$ 次增量步全部迭代完后的应力列阵。在求得第 n 次增量步之节点位移增量 $\{\Delta\psi\}$ 或节点速度 $\{\dot{\psi}\}$ 之后, 就可求得变形梯度 F 和形变率 D , 并由本构方程(16)求得 $\dot{T}$,

由(31b)求得 $\dot{t}$ 或 Δt_n 和 $t_n = \sigma_{n-1} + \Delta t_n$, 再由(31a)式求得增量步末之 Cauchy 应力 σ_n 。

3 热力耦合的热传导方程及其有限元解法

实验表明, 外界对弹塑性体所做的变形功由于内耗散, 将有一部分转化为热, 热量使物体温度升高, 反过来影响弹塑性体的变形和刚度, 因此存在着热与力的耦合。在热力耦合问题中, 物体的变形场与温度场是耦合的, 因此不能单独分别求解, 而必须同时求解。

O. W. Dillon 指出塑性变形功是引起热效应的主要部分, 但并不是所有的塑性变形功都转化为热, 其中有一部分用于改变材料的微结构。因此 E.H.Lee 用一个系数 η 考虑塑性变形功转化为热的分数。一般 $1 > \eta \geq 0.9$ 。为了简化, 这里我们暂且忽略热常数(比热、导热和换热系数等)随温度的变化(此变化将使热传导方程增加非线性的附加项^[6]), 并忽略弹性变形的热效应, 则热传导的张量方程可写为

$$\nabla_k q^k + \rho C_v \frac{d\theta}{dt} = \rho Q + \eta \dot{W}_p \quad (38)$$

式中 $\nabla_k q^k$ 为热流矢量的散度, $\dot{W}_p$ 为塑性变形功率, $\dot{W}_p = \sigma : D^p$ 。将 q^k 用 Fourier 定律表示, 并忽略内热源 Q , 在轴对称的情况下, (38)式成为:

$$\rho C_v \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(k_r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] + \eta \dot{W}_p \quad (39)$$

采用有限元法时对空间域进行离散, 并应用伽辽金法可得求解温度场的有限元列式:

$$[H]\{\theta\} + [C]\{\dot{\theta}\} = \{P\} + \{W\} \quad (40)$$

式中热传导刚度阵 $[H]$ 的元素为

$$H_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \left[k_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] r dr dz + \int_{\Gamma_3} h N_i N_j dS \quad (41a)$$

热容矩阵 $[C]$ 、热载荷矢量 $\{P\}$ 和耗散矢量 $\{W\}$ 的元素为

$$C_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho C_v N_i N_j r dr dz \quad (41b)$$

$$P_i = \int_{\Gamma_2} \dot{q} N_i r dS + \int_{\Gamma_3} h \theta_\infty N_i r dS \quad (41c)$$

$$W_i = \sum_e \int_{\Omega_e} \eta \dot{W}_p N_i r dr dz \quad (41d)$$

式中 $\dot{q}$ 为第二类热边界条件的已知热流量, h 为第三类热边界条件之换热系数, θ_∞ 为外界温度。

对非稳态热传导, 还需对时间域进行离散, 当采用后差分格式时, 求解初值问题的有限元列式为:

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + [H] \right) \{\theta_n\} = \frac{[C]}{\Delta t} \{\theta_{n-1}\} + \{P_n\} + \{W_n\} \quad (42)$$

式中 下标“ $n-1$ ”表第 n 增量步起始时之值, 下标“ n ”表增量步末了时之值。而采用中心差分格式时, 有限元列式为:

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{[H]}{2} \right) \{\theta_n\} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{[H]}{2} \right) \{\theta_{n-1}\} + \{P_{n-0.5}\} + \{W_{n-0.5}\} \quad (43)$$

式中下标“ $n-0.5$ ”表增量步中点处之值。由上两式之一, 可从增量步起始时之温度值求得增量步末了时之温度值。

在用有限元法联合求解热力耦合问题的变形场与温度场时, 为减少求解方程组的阶数, 我们不采用同时取节点位移和节点温度为未知数联合求解的方法^[7], 而采用在位移场与温度场间反复迭代。对每一增量步中的迭代, 在求解位移场(及应变、应力场)时, 以上一次迭代结果为已知值计算刚度阵之系数并求解位移(应变、应力)场, 又以求得的位移场为已知值计算温度场。若未满足收敛要求则进行下一次迭代, 否则进入下一增量步。由于我们这里研究的变形属于拟静态问题, 变形过程中温度变化较缓, 收敛性较好。计算表明, 只要位移场迭代收敛得到满足, 温度场计算收敛自然得到满足。收敛的判别法如下: 进行第 k 次载荷增量步的位移场迭代计算时, 算出相邻两次迭代计算的内时标度增量 Δz_k^{i-1} 和 Δz_k^i , 求得误差

$$ERR = \max_{j=1}^N \frac{|\Delta z_k^i - \Delta z_k^{i-1}|}{\Delta z_k^i} \quad (44)$$

式中 N 为高斯点点数, 若 ERR 大于给定的控制值, 则继续迭代, 否则将所求得的结果迭加到第 $k-1$ 次增量步结果上。

4 应用与验证

这里举两个应用的例子。

4.1 圆棒拉伸颈缩问题的数值模拟

未计热力耦合时, 为了模拟颈缩的形成都要在试件的中部加一人为的几何缺陷以在试

件中形成不均匀的变形场,使中部的变形比两端为大,促成模拟计算中颈缩的形成。但计及热力耦合时可不引入人为的缺陷。拉伸时的温度边界条件可这样设定:试件两端夹持处温度保持室温(通过夹头的接触快速传热),为一类边界条件;由于颈缩过程发展较快,试件圆柱面向四周的散热很少,可设为绝热边界条件;试件两端可设为三类边界条件。这样,在拉伸过程中,中部的温度上升将高于两端,使中部软化,变形比两端大,从而促成颈缩的自动形成。

试件材料为不锈钢 1Cr18Ni9Ti, 直径 8mm, 长度 80mm, 由于颈缩时温度变化范围不大,在 100°C 左右,为简化计算,取弹性模量 E 和材料常数 E_1 随温度作线性变化,其余材料与热常数不随温度变化。材料常数由实验测定,热常数由手册查得,其值分别为

$$E=183000-143(\theta-\theta_0)(\text{MPa}), \nu=0.3, \eta=0.9$$

$$E_1=140760-150(\theta-\theta_0)(\text{MPa}), E_2=922\text{MPa},$$

$$E_3=77.3\text{MPa}, \alpha_1=9252, \alpha_2=353.7, \alpha_3=28.8, \text{强化参数 } c=1.206, \beta=17.3, \text{导热系数 } k=$$

$$16.3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \text{热膨胀系数 } \alpha=16.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C},$$

$$\text{换热系数 } h=17.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}), \text{比热 } C_V=502 \text{ J}/$$

$$(\text{kg} \cdot \text{K}), \text{密度 } \rho=7850 \text{ kg}/\text{m}^3, \theta_\infty=10^\circ\text{C}, \text{初始 } \theta_0=\theta_\infty。$$

采用位移控制,一直拉伸到 $\Delta L=30\text{mm}$, 拉伸试验速度取恒速 $V=0.1\text{mm/s}$ 。有限单元取 8 节点等参元。分为 96 个单元。由于轴对称,只要取试件的四分之一进行计算。图 2 给出了试件中部温度随伸长量的变化,图 3 给出了试件表面的温度沿轴向的分布,图中实线为计算结果,圆圈等为实验结果,可见计算与实验吻合良好,图 4 给出 $\Delta L=23\text{mm}$ 和 30mm 时之网格变形情况。

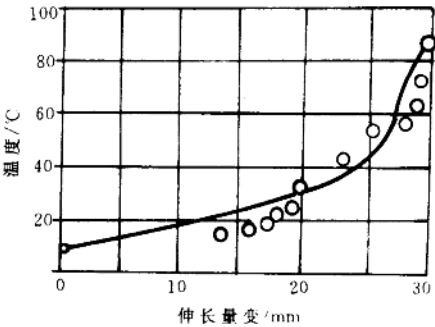


图 2 试件中部温度变化与实验的比较

4.2 O 形密封环的大变形压扁和循环松弛分析

O 形环用外径 $d_o=13.1\text{mm}$, 内径 $d_i=9.4\text{mm}$ 的 1Cr18Ni9Ti 无缝钢管制造,其初始环圈半径为 1m 。由于 O 形环在工作状态下塑性变形不大,忽略热力耦合,并作为等温问题计算。由实验确定的材料参数为 $E=143\text{GPa}$, $c=1.2$, $\beta=0.28$, $\nu=0.28$, $E_{1,2,3}=(883000, 1500, 147.4)\text{MPa}$, $\alpha_{1,2,3}=5000, 97, 6.0$ 。计算采用 8 节点等参元,将上半环分为 30 个单元,117 个节点。

对 O 形环进行两种计算和实验:(1) 大变形压扁实验,设环圈水平置于一刚性平面上,并设想一水平刚性平面贴合于环上面,使此刚性平面有一垂直向下的位移 δ ,其最大值为 $0.1 \times \frac{d_o}{2} = 0.655\text{mm}$,整个压扁过程分为 50 个增量步计算。所有增量步中最大迭代次数

11 次,平均迭代次数小于 6 次,最大收敛误差为 0.48%,可见所发展的方法具有良好的收敛性。图 5 给出了计算得的压扁后 O 形环横截面形状的改变(实践),与实验结果吻合良好,图 6 为 O 形环的压下量 δ 与 O 形环上每 50mm 长度段上之外载 P 的关系的计算结果及其与实验结果的比较。(2) 循环松弛实验。在卸载及重新加载和卸载过程中,均各取 10 个增量

步。达到收敛的平均迭代次数均小于 5 次。图 7 和图 8 分别给出了最大作用载荷与回弹量随循环次数的松弛的计算结果及其与实验数据的比较。分析表明：循环松弛速度开始较快，以后在循环过程中逐渐减慢，安定性分析表明，回弹量最终将趋于稳定值。

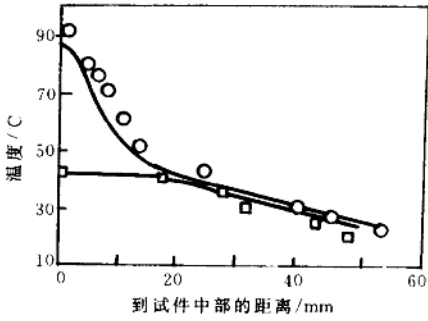


图 3 伸长量分别为 23mm 和 30mm 时试件表面的温度分布

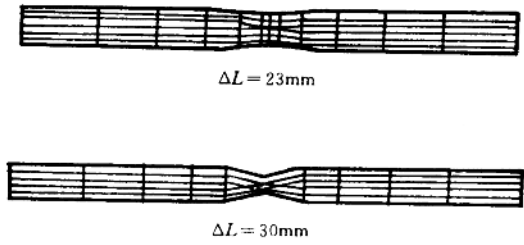


图 4 网格变形

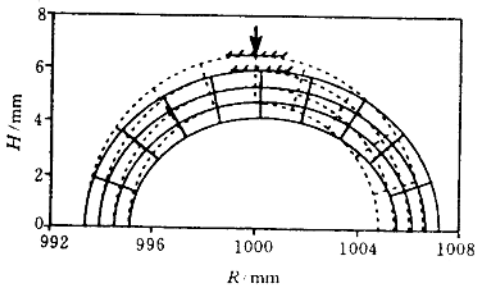


图 5 压扁前后 O 型环的横截面

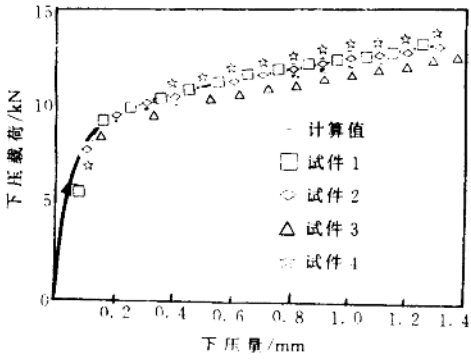


图 6 压扁过程中的 $P-\delta$ 曲线

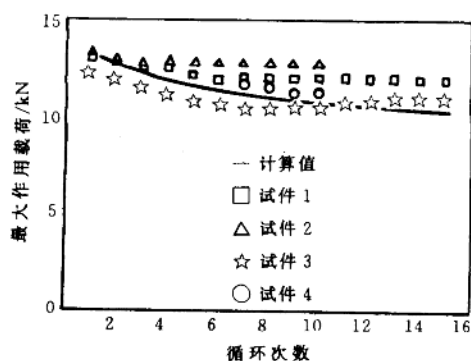


图 7 最大作用载荷随循环次数的松弛

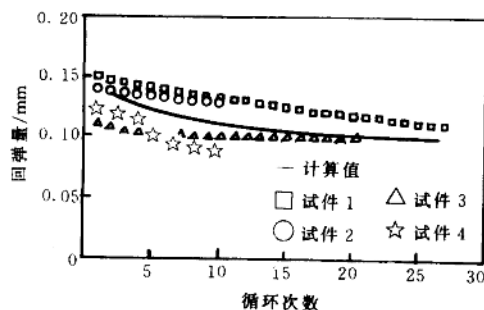


图 8 回弹量随循环次数的松弛

参 考 文 献

- 1 Drucker DC. Constitutive Relation for Soils Reprospect and Prospect. In Proc. 4rd Int. Conf. constitutive laws for Engineering Materials, Tucson, 1991, 8
- 2 高芝晖, 彭向和, 黄晨光. 弹塑性大变形的一种热力学相容的本构模型. 重庆大学学报. 1993, 16(3):18-24
- 3 黄克智. 非线性连续介质力学. 清华大学出版社, 1989.260-261
- 4 Nemat-Nasser S. On Finite Plastic Flow Crystalline Solids and Geomaterials. *J. of Applied Mechanics*. 1983, 50:1114-1126
- 5 彭向和, 高芝晖. 非经典大变形弹塑性本构方程及其算法研究. 应用力学学报, 1995, 12(3):45-51
- 6 王洪钢. 热弹性力学概论. 清华大学出版社. 1989. 8 北京一版
- 7 Sluzalec A. An Evaluation of the Internal Dissipation Factor in Coupled Thermoplasticity. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1990, 25(4):395-403

A NONCLASSICAL CONSTITUTIVE MODEL FOR FINITE ELASTOPLASTIC DEFORMATION BY CONSIDERING TEMPERATURE EFFECT

Gao Zhihui Peng Xianghe Han Ronghui

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract Based on a simple mechanical model composed of elastic components and plastic dashpot blocks, a nonclassical constitutive model is proposed for finite elastoplastic strain and deformation, in which the effect of temperature on the material properties is considered. A corresponding finite element approach and program using Updated-Lagrangian description are developed for the analysis of structures subjected to coupled heat and mechanical loading. Great convenience, high efficiency and good convergence is obtained in computation because there is no discontinuity in the constitutive relation without using a yield surface and the corresponding loading/unloading criteria. The necking of a stretched cylindrical bar, and the relaxation of both the compressive load and the elastic recovery of a confined O-ring subjected to large compressive deformation followed by heat and mechanical cycles are analyzed. The results are in satisfactory agreement with that obtained experimentally.