



高等数学

物理类

(修订版)

第三册

文 丽 吴良大 编著

(x)



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等学校数学基础课教材

高等数学

(物理类)

(修订版)

第三册

文 丽 吴良大 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·第三册:物理类/文丽,吴良大编著.一修订版.一北京:北京大学出版社,2004.8

ISBN 7-301-07544-8

I. 高… I. ①文… ②吴… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 058374 号

书 名: 高等数学(物理类)(修订版)第三册

著作责任者: 文 丽 吴良大 编著

责任编辑: 曾琬婷

标准书号: ISBN 7-301-07544-8/O · 0601

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

850 mm×1168 mm 32 开本 11.25 印张 289 千字

1990 年 10 月第 1 版 2004 年 8 月修订版

2004 年 8 月第 1 次印刷(总第 9 次印刷)

印 数: 30001—33000 册

定 价: 17.00 元

内 容 简 介

本书是根据物理类“高等数学教学大纲”编写的教材。全套书共分三册,于1989年7月出版,印数达三万多套,现为修订版。经过十多年的教学实践,作者在保留第一版优点的基础上,按新世纪的教学要求对全套书的内容进行了认真、系统的整合。

本书为第三册,共分四章,内容包括无穷级数、含参变量的积分、傅里叶级数与傅里叶积分以及常微分方程等。本书总结了作者长期讲授物理类“高等数学”课程的教学经验,内容叙述简炼,难点分散,例题典型、丰富,逻辑推导严谨、细致,对基本定理着重阐明它们的几何意义、物理背景以及实际应用价值,强调基本计算与物理应用,注重培养学生解决实际问题的综合能力。根据教学需要,本书各章配置了适量的习题,书末附有习题答案与提示,便于教师和学生使用。

本书可作为综合性大学、高等师范院校物理学、电子学、信息科学等院系各专业的本科生和工科大学相近专业大学生的教材或教学参考书。

目 录

第十四章 无穷级数	(1)
§ 1 数项级数的概念和性质	(1)
1.1 基本概念	(1)
1.2 级数的简单性质	(5)
1.3 收敛的必要条件	(7)
1.4 柯西收敛原理(柯西准则)	(8)
习题 14.1	(10)
§ 2 正项级数的收敛判别法	(11)
习题 14.2	(24)
§ 3 任意项级数的收敛判别法	(25)
3.1 交错级数	(25)
3.2 绝对收敛与条件收敛	(27)
3.3 狄里克雷判别法和阿贝尔(Abel)判别法	(31)
习题 14.3	(39)
§ 4 绝对收敛级数的性质	(40)
4.1 可交换性	(40)
4.2 级数的乘法	(43)
习题 14.4	(47)
§ 5 函数项级数	(47)
5.1 函数序列	(47)
5.2 函数项级数	(55)
5.3 一致收敛的函数项级数的性质	(67)
习题 14.5	(75)

§ 6 幂级数	(76)
6.1 幂级数的收敛域和收敛半径	(77)
6.2 收敛半径的求法	(80)
6.3 幂级数的性质	(84)
习题 14.6	(94)
§ 7 泰勒级数	(95)
7.1 泰勒级数	(96)
7.2 初等函数的泰勒展开式	(99)
7.3 幂级数的简单应用	(108)
§ 8 欧拉(Euler)公式	(111)
习题 14.7	(113)
第十五章 含参变量的积分	(114)
§ 1 含参变量的常义积分	(115)
1.1 积分限固定的情形	(115)
1.2 积分限变动的情形	(121)
习题 15.1	(124)
§ 2 含参变量的广义积分	(125)
2.1 含参变量的无穷积分	(125)
2.2 含参变量的瑕积分	(144)
习题 15.2	(147)
第十六章 傅里叶级数与傅里叶积分	(149)
§ 1 傅里叶级数	(149)
1.1 三角函数系的正交性	(150)
1.2 周期为 2π 的函数的傅氏系数与傅氏级数	(151)
1.3 傅氏级数的收敛性	(154)
1.4 奇、偶函数的傅氏级数	(155)
1.5 函数的傅里叶展开式举例	(156)

1.6	周期为 $2l$ 的函数的傅氏展开式	(165)
1.7	函数在半区间 $[0, l]$ 上的傅氏展开式	(170)
	习题 16.1	(177)
§ 2	复数形式的傅氏级数	(178)
2.1	频谱分析——傅氏级数的应用之一	(178)
2.2	复数形式的傅氏级数	(180)
2.3	两种形式的傅氏级数的比较	(183)
2.4	利用复数形式的傅氏级数作频谱分析	(184)
	习题 16.2	(187)
* § 3	广义傅氏级数简介	(187)
3.1	标准正交系	(187)
3.2	广义傅氏系数与广义傅氏级数	(188)
3.3	平均平方误差与平均平方逼近	(190)
3.4	贝塞尔(Bessel)不等式	(191)
3.5	傅氏级数的平均平方收敛	(195)
3.6	帕斯瓦尔(Parseval)等式	(195)
§ 4	傅里叶积分	(196)
4.1	傅里叶积分与傅里叶变换	(196)
4.2	傅氏积分收敛定理	(201)
4.3	非周期函数的频谱分析	(204)
4.4	傅氏积分的三角形式(或实数形式)	(207)
4.5	奇、偶函数的傅氏积分与傅氏变换	(207)
4.6	函数在半区间 $[0, +\infty)$ 上的傅氏积分	(208)
	习题 16.3	(211)
§ 5	傅氏变换的基本性质	(212)
	习题 16.4	(218)

第十七章 常微分方程 (220)

§ 1	微分方程的基本概念	(220)
-----	-----------	-------

1.1	微分方程	(220)
1.2	微分方程的解	(222)
	习题 17.1	(224)
§ 2	一阶微分方程	(225)
2.1	可分离变量的方程	(225)
	习题 17.2(1)	(230)
2.2	可化为分离变量方程的几类一阶方程	(231)
	习题 17.2(2)	(236)
2.3	一阶线性方程	(236)
	习题 17.2(3)	(243)
2.4	全微分方程与积分因子	(244)
	习题 17.2(4)	(254)
2.5	可降阶的二阶微分方程	(255)
	习题 17.2(5)	(258)
§ 3	一阶微分方程解的存在惟一性定理	(258)
3.1	比卡逐次逼近法	(258)
3.2	比卡存在惟一性定理	(261)
	习题 17.3	(269)
§ 4	二阶线性微分方程通解的结构	(269)
4.1	几个实例	(269)
4.2	线性微分方程解的存在惟一性定理	(273)
4.3	二阶线性齐次微分方程通解的结构	(274)
4.4	二阶线性非齐次微分方程通解的结构	(278)
	习题 17.4	(280)
§ 5	常系数二阶线性齐次微分方程的解法	(280)
	习题 17.5	(286)
§ 6	常系数二阶线性非齐次微分方程的求解	(287)
6.1	三类常见的特殊右端	(287)

6.2 其他几类特殊右端	(291)
6.3 两个常用定理	(293)
习题 17.6	(296)
§ 7 用常数变易法求解二阶线性非齐次方程	(296)
7.1 常数变易法	(296)
7.2 欧拉方程	(300)
习题 17.7	(301)
§ 8 应用举例	(302)
8.1 几种常见的列方程方法	(302)
8.2 关于二阶微分方程的几个实例	(307)
习题 17.8	(313)
§ 9 常系数线性微分方程组	(315)
9.1 实例	(315)
9.2 一阶线性微分方程组	(316)
9.3 用消元法求解常系数线性微分方程组	(317)
习题 17.9	(323)
附录 微分方程的幂级数解法简介	(325)
习题	(334)
习题答案	(335)

第十四章 无穷级数

早在 17 世纪,无穷级数就已成为研究超越函数、计算一些特殊的量(例如 $\pi, e, \ln 2$ 等等)以及表达函数的有力工具.但是,关于级数收敛的明确概念,却是在 19 世纪初与准确的极限概念一起形成的.无穷级数的理论十分丰富,应用也很广泛,它是数学分析不可缺少的组成部分.

本章先讨论数项级数,介绍关于无穷级数的一些基本概念、简单性质以及收敛性判别法,然后讨论函数项级数的一般理论以及应用十分广泛的幂级数.

§ 1 数项级数的概念和性质

1.1 基本概念

1. 无穷级数

设有数列

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

用加号把这些数依次连接起来所得到的式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

称为无穷级数,简称级数.(1)式也记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$

其中 $u_1, u_2, \dots$ 分别称为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的第 1 项,第 2 项,.... 我们把第 n 项 u_n 称为级数的通项或一般项.

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的前 n 项之和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为级数的前 n 项部分和.

2. 无穷级数的收敛与发散

无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 只是一种形式和. 任意有限个数相加总是有和的, 那么, 无穷个数又该如何相加呢? 有没有和呢? 我们先看一个例子.

考察无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots \quad (2)$$

它的前 n 项之和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right). \end{aligned}$$

显然, 这个部分和 S_n 随着项数 n 的增大而增大, 并且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $S_n \rightarrow \frac{1}{2}$. 因此我们很自然地把极限值 $\frac{1}{2}$ 规定为无穷级数(2)的和. 于是有

定义 若无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时有极限 S , 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛, 其和为 S , 记作

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S.$$

此时也称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛于 S . 若数列 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称该级数

发散,此时它没有和.

例 1 讨论级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

的收敛性.

解 考察此级数的部分和数列:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, & S_2 &= 0, \\ S_3 &= 1, & S_4 &= 0, \\ \dots\dots & & \dots\dots & \\ S_{2n-1} &= 1, & S_{2n} &= 0, \\ \dots\dots & & \dots\dots & \end{aligned}$$

显然当 $n \rightarrow +\infty$ 时, S_n 的极限不存在, 因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ 发散.

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 此级数的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n [\ln(1+k) - \ln k] \\ &= \ln(n+1) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性.

解 前 n 项部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 其和为 1, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例 4 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (3)$$

($a \neq 0$) 的收敛性, 其中 q 称为公比.

解 (1) 当公比 $q=1$ 时, 级数(3)化为

$$a + a + \cdots + a + \cdots,$$

它的前 n 项部分和

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \uparrow} = na \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow +\infty),$$

因此级数发散.

当 $q=-1$ 时, 级数(3)化为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$$

根据与例 1 类似的讨论知, 级数发散.

(2) 当 $|q| \neq 1$ 时, 级数(3)的前 n 项部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

级数(3)收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时, $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow +\infty$), 级数(3)发散.

综合起来, 得到结论:

当公比 q 的绝对值 $|q| < 1$ 时, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛, 其和为

$\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

1.2 级数的简单性质

定理 1 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛, c 为任一常数, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ 也收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

证 设 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 则由条件知, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 设为 S , 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ 的前 n 项部分和为 σ_n , 则

$$\begin{aligned}\sigma_n &= cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n \\ &= c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \\ &\rightarrow cS \quad (n \rightarrow +\infty),\end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ 收敛, 其和为 $cS = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$. **■**

易知, 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 常数 $c \neq 0$, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ 也发散.

定理 2 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ 也收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

证 设 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = B$, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k = B,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n u_k \pm \sum_{k=1}^n v_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k = A \pm B,$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \quad \text{I}$$

定理 1, 2 说明, 收敛级数具有与无穷和相同的线性性质.

定理 3 在级数前面加上(或去掉)有限项, 不影响级数的敛散性.

证 考虑两个级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (4)$$

与

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_l + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad (5)$$

级数(5)是在级数(4)的前面加上 l 项后所得到的. 设 σ_n 与 S_n 分别表示级数(4)与级数(5)的前 n 项部分和, 则显然有

$$S_{n+l} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_l) + \sigma_n.$$

因为 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_l)$ 是一个与 n 无关的常数, 所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时, S_{n+l} 与 σ_n 同时有极限或同时无极限, 从而级数(4)与级数(5)同时收敛或同时发散.

同理可证, 去掉级数前面的有限项也不影响级数的收敛性. I

将收敛级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

去掉前 n 项部分和 $\sum_{k=1}^n u_k$ 后, 剩下的级数

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为原级数的**余项(或余和)**, 记作 r_n , 即

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

定理 4 将收敛级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛, 且其和不变(这个性质也称为无穷和的结合律).

证 设收敛级数

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

任意加括号后所成的级数为

$$(u_1 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) \\ + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n}) + \cdots,$$

并设原级数部分和数列为 $\{S_n\}$, 则新级数的部分和数列为

$$S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_n}, \cdots,$$

它是数列 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 因此与 $\{S_n\}$ 有相同的极限 S . $\blacksquare$

推论 若加括号后的级数发散, 则原来的级数亦必发散(请自己证明).

定理 4 说明, 对收敛级数可以任意加括号. 但是请注意, 收敛级数不能任意去括号. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛, 而去括号后所成的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却发散.

1.3 收敛的必要条件

定理 5 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛, 则一般项 u_n 趋于零, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

证 设 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} \\ = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

本定理可以用来判断某些级数的发散性. 例如, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ 发散, 因为它的一般项 $u_n = (-1)^{n-1}$ 不趋于零. 同理易知, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

发散.

例 5 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(2n+1)^3 \cdot (n+2)^n}$$

的敛散性.

解 因为级数的一般项

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^{n+3}}{(2n+1)^3 \cdot (n+2)^n} \\ &= \frac{n^3}{(2n+1)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} \frac{1}{8e^2} \neq 0, \end{aligned}$$

所以级数发散.

注 一般项趋于零 (即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$) 仅仅是级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛的必要条件, 而不是充分条件. 换句话说, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ 不能断定级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 是否收敛, 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

的一般项 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 但该级数却是发散的 (例 2).

1.4 柯西收敛原理 (柯西准则)

怎样判别一个级数是否收敛呢? 下面的柯西收敛原理给出了判别级数收敛性的充分必要条件.

定理 6 (判别级数收敛性的柯西收敛原理) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛的充分必要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意自然数 p , 都成立不等式