

ANSYS

在建筑工程中的应用

◆ 徐鹤山 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



ANSYS 在建筑工程中的应用

徐鹤山 编著



机械工业出版社

本书内容包括有限元技术的应用基础、ANSYS 程序主要功能的使用介绍和力学分析方面的线弹性分析、几何非线性分析、材料非线性分析、模态分析和动力响应分析等。各章中的实例分析基本上涵盖了建筑工程中经常遇到的工程项目。

本书是从工程应用角度编写的,着重实际工程项目的分析和应用。其中的实例分析介绍得比较详细,给出了具体的操作过程和分析步骤,并且在题前有综合说明,介绍项目的来源、性质和特点,题后有分析,讨论计算结果和解题方案等。同时还给出了各个实例分析的命令流,供工程技术人员分析类似问题时参考。也可以将命令流复制成文本文件,采用读入执行文件的方法再现本实例分析的原貌,从中得到更多的计算结果数据。因此,最适合于从事具体结构分析人员使用。

由于本书是从力学分析方面编写的,因此它不仅适用于建筑工程也适用于与上述专业性性质相关的其他工程。也可供相关专业的学生、研究生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 在建筑工程中的应用/徐鹤山编著. —北京:

机械工业出版社, 2005.7

ISBN 7-111-17139-X

I. A... II. 徐... III. 建筑工程—有限元分析—应用软件, ANSYS IV. TU17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 089239 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 杨少彤 责任编辑: 杨少彤 版式设计: 冉晓华

责任校对: 王 欣 封面设计: 张 静 责任印制: 陶 湛

北京铭成印刷有限公司印刷

2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

787mm × 1092mm $1/16$ · 15.5 印张 · 384 千字

0001—4000 册

定价: 35.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

封面无防伪标均为盗版

前 言

随着电子计算机的出现而发展起来的有限元结构分析技术在我国的发展,大体上经历了如下四个阶段。

(1)20世纪70年代编制、应用专用的有限元程序阶段;(2)80年代引进和开发大型有限元分析程序阶段;(3)20世纪90年代广泛应用有限元技术和提高阶段;(4)2000年以后大型结构分析软件微机化,个人电脑应用阶段。

由于工作的需要,我从1973年开始向哈尔滨工业大学黄文虎教授(现为工程院院士)学习、引进三角形板单元固有频率计算程序并在当时的121电子计算机和719电子计算机上应用。从此,经历了有限元在我国的发展过程。承担过正交各向异性材料三维有限元应用研究课题,引进、开发和应用过SAP5、ADINA、NASTRAN、ASKA、I-DEAS、ABQUS、ANSYS、MARC和ALGOR等多个大型有限元结构分析程序。2000年以后,又用ALGOR程序和ANSYS程序作了些建筑方面的实际工程分析项目。本书就是在这个基础上编写而成的。

在编写本书以前,查阅了有关介绍大型有限元程序的书籍和资料,发现这些书籍和资料多数都是从软件商业运作角度,介绍其应用功能。这样介绍虽然比较全面和系统,但是由于大型有限元程序涉及到的专业领域较多,对于具体工程技术人员而言,总觉得有些烦琐、不直接,而且缺乏一些必要的工程分析细节。所以我想,作为第一线上从事力学分析的工程技术人员,写出来的东西应该对实际应用的工程技术人员有直接的帮助。

当前我国高层建筑发展很快,在施工中用全钢结构加轻型护围(轻型保温材料、轻型装饰材料、玻璃幕墙等)代替钢筋混凝土结构是一个发展趋势。编写这本书的目的就是适应其发展需要,提供这方面的技术知识,为培养新型建筑结构分析人才打下基础。

本书共分七章,第1章介绍有限元技术的应用基础,主要针对缺乏有限元基本概念的初级用户,也针对那些没有实践经验的高级用户。这些内容是一个结构分析工程师必须具备的基本知识。第2章介绍ANSYS程序的交互使用。包括介绍程序的用户图形界面、前后处理、加载求解等主要功能及其具体操作。为在以下各章中使用ANSYS程序分析具体工程问题打下基础。第3章至第7章是按力学专业性质编写的。第3章介绍结构分析必不可少的线弹性分析内容。由于建筑工程中使用线单元比较多,本章采用了按线单元、面单元和体单元类型介绍。第4章介绍几何非线性分析内容,是建筑工程中常遇到的分析内容。第5章介绍材料非线性分析内容,是力学分析必不可少的内容。第6章介绍模态分析内容,特别介绍了非稳定结构的模态分析内容,它是拉索结构特有的现象。第7章介绍了动力响应内容,介绍了地震时钢结构的频谱响应和地震加速度(地震力)响应。由于第3章至第7章是按力学专业性质编写的,因此,这些内容不仅适用于建筑工程,也适用于与这些专业性质相关的其他工程。

上述各章中的工程实例介绍得比较具体,使用户容易掌握。这些实例中以线单元实例为最多,包括刚性结构例题、柔性结构例题、刚柔结合结构例题、连接件例题等。也有不少面单元例题和体单元例题。而且,在每章前有相关知识综合说明;在每个实例分析前介绍该例题的来源、性质、特点、适用范围以及计算分析时应注意的重点等;在解题之后还有题后分

析，包括解题可能有的方案和计算结果的合理性等。同时，还给出了每个实例分析的命令流，读者可以将这些命令流复制成文本文件，采用读入执行的方法将实例分析恢复原貌，查看更多的计算结果。这对工程技术人员的结构设计是很有益的。

由于水平和精力所限，书中难免有疏漏之处，欢迎同行和读者批评指正。如果读者在使用 ANSYS 程序过程中遇到问题，欢迎与我联系，电话：024-24283127，E-mail: XHS606@sina.com，必将认真回复。

徐鹤山

目 录

前言

第 1 章 有限元技术的应用基础	1
1.1 有限元平衡方程、刚度矩阵及求解概述	1
1.1.1 有限元平衡方程、刚度矩阵、位移和载荷	1
1.1.2 有限元平衡方程的求解	2
1.2 单元平衡方程、刚度矩阵的建立	2
1.2.1 弹性力学概念——有限元的理论基础	2
1.2.2 单元平衡方程的建立	5
1.2.3 典型单元的平衡方程和刚度矩阵的建立	6
1.3 结构平衡方程、刚度矩阵的建立及求解	15
1.3.1 载荷移置, 等效节点力的形成	15
1.3.2 结构平衡方程的建立和求解	16
1.4 动力学问题的有限元法简介	16
1.5 工程计算用单位制	16
1.6 ANSYS 有限元结构分析程序的常用单元类型	17
1.7 有限元强度计算时的网格划分	21
1.8 材料性能及使用	22
1.9 有限元计算时边界条件的确定	23
1.10 有限元程序力学分析的求解方法	23
1.11 强度理论及当量应力	24
1.12 评定标准的使用	25
第 2 章 ANSYS 程序使用介绍	26
2.1 ANSYS 程序图形用户界面、主要菜单介绍	26
2.1.1 图形用户界面	26
2.1.2 ANSYS 程序主要菜单介绍	26
2.2 ANSYS 程序前处理、求解和后处理功能介绍	32
2.2.1 ANSYS 程序前处理	32
2.2.2 加载和求解	55
2.2.3 通用后处理	59
第 3 章 结构线弹性计算分析	62
3.1 线单元结构计算分析	62

实例 1 钢骨架的变形和应力分析	62
实例 2 雨篷结构的变形和应力分析	78
实例 3 钢结构楼梯及转接平台的受力分析	86
3.2 面单元结构计算分析	99
实例 1 带孔钢板的应力集中分析(平面应力问题)	99
实例 2 风荷载作用下四孔玻璃变形和应力分析	105
3.3 体单元结构计算分析	111
实例 1 X 型钢爪结构的变形和应力分析	111
实例 2 拉伸试件的应力分析	117
实例 3 钢结构连接构件的应力分析	123
第 4 章 几何非线性计算分析	129
4.1 鱼腹式点驳接幕墙结构分析(柔性结构)(拉索和杆单元)	129
4.2 平行拉索点驳接幕墙结构分析(柔性结构)(拉索单元)	135
4.3 单拉索点驳接幕墙结构分析(柔性结构)(拉索单元)	141
4.4 拉索、压杆、钢管点驳接幕墙结构分析(刚、柔结合结构) (拉索、杆和梁单元)	146
第 5 章 材料非线性计算分析	153
5.1 牛顿—拉普森迭代法简介	153
5.2 金属材料的弹塑性行为	154
5.3 拉杆螺纹端头的弹塑性应力-应变分析	154
5.4 玻璃密封条的大应变分析	171
5.5 飞石(或冰雹)冲击玻璃平面的非线性分析	178
第 6 章 结构模态计算分析	187
6.1 长方钢板的模态分析	187
6.2 钢索的静力和频率分析(拉索和质量单元)	192
6.3 平面玻璃的模态分析	200
第 7 章 建筑结构的抗震响应计算分析	206
7.1 钢结构的地震力响应计算分析	207
7.2 钢结构的地震谱响应计算分析	216
附录 传统建筑结构分析计算书流程	226
参考文献	242

第 1 章 有限元技术的应用基础

本章内容包括有限元的理论基础、有限元技术的工程应用基础和有限元技术的工程应用经验等。

有限元的理论基础包括有限元平衡方程的建立、刚度矩阵的形成和有限元平衡方程的求解等。这些内容在高等院校至少需要两个学期的学时才能完成，而且只能学到平面问题的有限元内容。这里作者通过比较通俗的语言，简明扼要地对包括三维有限元在内的有限元知识作了介绍，给那些没有学过有限元或没有学过弹性力学的读者建立有限元的基本概念。

有限元技术的工程应用基础是每个结构分析工程师都必须具备的知识。如果没有这些知识，那么去使用 ANSYS 等大型结构分析程序，只能算作大型程序的操作员，不能算是一个结构分析工程师，真正遇到实际工程问题，他是无能为力的。

有限元技术的工程应用经验是作者多年来从事力学分析工作积累的一些知识，读者掌握这些知识，将有可能避免在工程应用中走弯路。

本章的目的是为读者建立有限元的基本概念，打下有限元技术的工程应用基础，培养名副其实的建筑结构分析工程师。

1.1 有限元平衡方程、刚度矩阵及求解概述

1.1.1 有限元平衡方程、刚度矩阵、位移和载荷

设有一个连续弹性体在外力作用下处于平衡状态。现在我们将这个连续弹性体分割成有限个单元体，而且每个单元体的性质(几何性质和物理性质)用节点表达。例如：将一个方板分割成 81 个单元，100 个节点，每个节点具有三个自由度(X 、 Y 和 Z 向)，共有 300 个自由度，而且将外力按照一定的原则分配到每个节点的自由度上。由于连续弹性体处于平衡状态，因此就形成了一个用节点自由度表达的连续体在外力作用下的平衡方程组(1-1)。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_n &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_n &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_n &= f_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_n &= f_n \end{aligned} \quad (1-1)$$

用矩阵表达这个方程组就得到方程(1-2)和方程(1-3)：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

将矩阵简化为式(1-3):

$$[K]_{n \times m} \{\delta\}_n = \{F\}_n \quad (1-3)$$

这样就形成了结构的平衡方程。

其含意为:平衡方程的系数 $[K]_{n \times m}$,我们称之为刚度矩阵;平衡方程的未知数 $\{\delta\}_n$ 称为位移,平衡方程的右端项 $\{F\}_n$ 称为载荷。

1.1.2 有限元平衡方程的求解

由方程(1-1)可知,上述结构平衡方程是一个多元一次方程组。理论上讲,解此方程组不存在什么困难,但实际上由于其未知数很多,只靠人工是难于办到的,必须借助于计算机。

用计算机解这样的方程组通常采用高斯消去法或波前法等。高斯消去法的解题思路是消元和回代,可用三元一次方程解释:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= f_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= f_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= f_3 \end{aligned} \quad (1-4)$$

消成如方程(1-5):

$$\begin{aligned} x + a'_{12}y + a'_{13}z &= f'_1 \\ y + a'_{23}z &= f'_2 \\ z &= f'_3 \end{aligned} \quad (1-5)$$

得到最后一个解 z 后,回代求出: y 、 x 。

这就是高斯消去法的解题过程,也是用有限元法进行结构分析常用的方法。

波前法与高斯消去法的主要区别在于:高斯消去法按节点求解,波前法按波上的单元求解。波前法的优点是节省内存、节点可以不连续。

有关波前法的求解方法请参考有关资料,在此不作介绍。

1.2 单元平衡方程、刚度矩阵的建立

1.2.1 弹性力学概念——有限元的理论基础

用有限元求解弹性力学问题,并不需要掌握弹性力学中的很多理论知识,但一定要清楚其中的某些概念。这些概念主要是单元位移模式的建立、单元应力和应变关系的建立、虚功原理和静力等效原则等。

1. 单元位移模式的建立和应变分量的形成

(1) 单元位移模式的建立

计算坐标系内单元节点位移 (u, v, w) 和节点坐标 (x, y, z) 之间的关系称为单元位移模式。弹性体被离散为单元以后,首先用几何方程建立单元的位移模式。不同单元需要建立不同的位移模式,建立位移模式时要根据单元的自由度(转动和移动)来建立,位移模式决定了单元的精度。前人已建立了各种典型单元的位移模式,在此列出如下表达式。

① 三节点三角形板单元具有6个自由度,它的位移模式中就必须有6个待定系数,其

表达式为:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \quad (1-6)$$

② 四节点四面体单元具有 12 个自由度, 它的位移模式中就必须有 12 个待定系数, 其表达式为:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \\ w &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \end{aligned} \quad (1-7)$$

③ 四节点任意四边形平面单元具有 8 个自由度, 它的位移模式中必须有 8 个待定系数, 其表达式为:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \quad (1-8)$$

④ 四节点任意四边形薄板单元具有 12 个自由度, 它的位移模式中就必须有 12 个待定系数, 其表达式为:

$$\begin{aligned} w &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + \\ &\quad a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (1-9)$$

⑤ 轴对称问题的位移模式(以三角形环单元为例)。三角形环单元具有 6 个自由度, 它的位移模式为:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 r + a_3 z \\ v &= a_4 + a_5 r + a_6 z \end{aligned} \quad (1-10)$$

用单元节点位移和单元节点坐标表示:

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (1-11)$$

式中:
$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (i, j, m) \quad (1-12)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j \\ b_i &= z_j - z_m \\ c_i &= -(r_j - r_m) \end{aligned} \quad (i, j, m) \quad (1-13)$$

⑥ 三维单元的位移模式(以 20 节点六面体单元为例)

20 节点六面体单元具有 60 个自由度, 用形状函数和单元节点位移表示, 它的位移模式为:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \quad (1-14)$$

式中, u_i 、 v_i 、 w_i 为节点位移; $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ 为形状函数, 即局部坐标 ξ 、 η 、 ζ 的函数, i 是单元节点号(其单元节点排列顺序见图 1-4a)。表达式为:

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2) \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2) \\
 N_9 &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) \\
 N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta) \\
 N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\zeta) \\
 N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) \\
 N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\zeta) \\
 N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1+\eta) \\
 N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1-\eta)
 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

(2) 应变分量的形成

应变最简单的形式是弹性体单向受力时的相对伸长量, 即 $\epsilon = (L - L_0)/L_0$ 。上述单元的应变都可以用微分式表达形成各种分量。例如: 杆单元的应变分量为 $\epsilon = \frac{\partial U_i}{\partial S}$ 。其余单元的应变分量将在以下各节分别介绍。

2. 单元应力和应变关系的建立

一般来讲, 任何弹性体都具有一定的物理关系, 其最简单的形式就是人们所说的胡克定律。材料力学中给出了弹性体单向受力时的虎克定律: $\sigma = E\epsilon$ 。这个关系式表达了弹性体的应力和应变关系。此式可以用于建立单元的应力和应变关系。各种单元的应力和应变关系式的建立, 在以下各节分别介绍。

3. 虚功原理

功的概念大家可能是不会忘记的, 即力与在力的方向上发生的真实位移之积。而虚功也是力与位移之积, 但是它的位移是虚构的, 它的方向和大小是想像的, 因此具有任意性。

虚功原理: 如果在虚位移发生之前, 弹性体处于平衡状态, 那么, 在虚位移发生时, 外力在虚位移上的虚功就等于(整个弹性体内)应力在虚应变上的虚功。

4. 静力等效原则

所谓静力等效原则, 是指移置前的原载荷与移置后的节点载荷在任何虚位移上的虚功都相等。它是虚功原理的另一种形式。

1.2.2 单元平衡方程的建立

用虚功原理建立单元平衡方程, 同时得到单元刚度矩阵。

单元的平衡方程可以用虚功原理建立, 也可以用变分原理、离散算子等建立。单元平衡方程建立以后, 就可得到单元刚度矩阵。在此我们用虚功原理建立单元平衡方程。

设有受外力作用的弹性体, 它所受的外力已经按照静力等效原则移置到单元节点上, 成为单元节点力 $\{F\}^e$, 弹性体所引起的应力为 $\{\sigma\}$, 单元发生的虚位移为 $\{\delta^*\}^e$, 引起的虚应变为 $\{\epsilon^*\}$ 。

这个虚位移和虚应变一般不是上述实际外力引起的, 而是为了分析问题假想在弹性体中发生的, 即虚位移具有任意性。

外力在虚位移上所做的虚功等于内力在虚应变上的虚功, 建立单元的虚功方程(用三维表达):

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (1-16)$$

由于 $\{\epsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}^e$ 和 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e$ 代入单元的虚功方程后得到:

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint \{[B]\{\delta^*\}^e\}^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz \quad (1-17)$$

根据矩阵乘积的逆序法则, 上式可化为:

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint (\{\delta^*\}^e)^T [B]^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz \quad (1-18)$$

又由于虚位移的任意性, 可以将方程右端的虚位移提到积分式前面, 从而得到单元的平衡方程:

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz \quad (1-19)$$

将单元的位移提出, 上式成为:

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \{\delta\}^e \quad (1-20)$$

式(1-20)可写成:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad (1-21)$$

式中, $[K]^e$ 为单元的刚度矩阵, 用式(1-22)表示:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] V \quad (1-22)$$

式中, $[B]$ 为单元的几何矩阵, 具体表达式见以下各节; $[D]$ 为单元的弹性矩阵, 具体表达式见以下各节; V 为单元的体积。

1.2.3 典型单元的平衡方程和刚度矩阵的建立

1. 空间杆单元

(1) 单元功能

三维杆单元可以在笛卡儿直角坐标系中的任意位置。它能承受在杆单元平面内作用在节点上的集中力、杆单元自重引起的体积力和温度变化产生的热负荷。

(2) 单元的刚度矩阵、应力矩阵和质量矩阵

一个典型的杆单元如图 1-1 所示。杆单元两端的节点为 i 和 j , 坐标系正的方向如图 1-1 所示。

a. 单元长度

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \quad (1-23)$$

式中, $\begin{cases} L_x = x_j - x_i \\ L_y = y_j - y_i \\ L_z = z_j - z_i \end{cases}$

假定沿杆单元纵轴方向 S 的位移 U_s 是线性的(常应变), 局部坐标 S 在 i 点等于零, 在 j 点等于 L , 则单元上任意一点的轴向位移可表示为:

$$U_s = U_{si} + \frac{S}{L} (U_{sj} - U_{si}) \quad (1-24)$$

b. 轴向应变

$$\epsilon_s = \frac{\partial U_s}{\partial S} = \frac{1}{L} (U_{sj} - U_{si}) \quad (1-25)$$

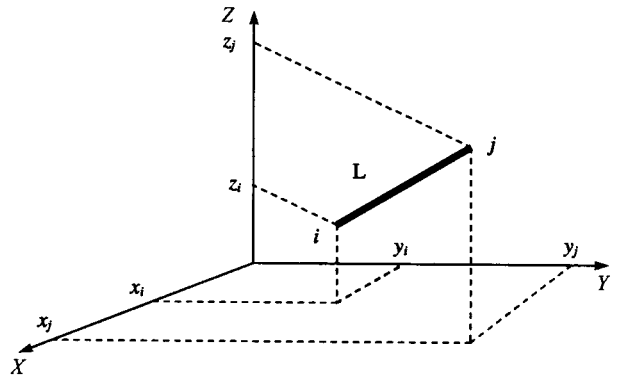


图 1-1 空间杆单元

用整体坐标表示单元两节点的位移有:

$$\begin{aligned} U_{si} &= \frac{L_x}{L} U_{xi} + \frac{L_y}{L} U_{yi} + \frac{L_z}{L} U_{zi} \\ U_{sj} &= \frac{L_x}{L} U_{xj} + \frac{L_y}{L} U_{yj} + \frac{L_z}{L} U_{zj} \end{aligned} \quad (1-26)$$

将式(1-26)代入式(1-25)得:

$$\epsilon_s = \frac{1}{L} \left(\frac{L_x}{L} U_{xj} + \frac{L_y}{L} U_{yj} + \frac{L_z}{L} U_{zj} - \frac{L_x}{L} U_{xi} - \frac{L_y}{L} U_{yi} - \frac{L_z}{L} U_{zi} \right) =$$

$$\frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -L_x & -L_y & -L_z & L_x & L_y & L_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \\ U_{zj} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \quad (1-27)$$

式中, 几何矩阵 $[B] = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -L_x & L_y & -L_z & L_x & L_y & L_z \end{bmatrix}$ (1-28)

节点位移 $\{\delta\} = \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \\ U_{zj} \end{Bmatrix}$ (1-29)

c. 应力应变关系

由胡克定律得:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{\delta\} \quad (1-30)$$

式中, $[D]$ 为弹性矩阵, 对于杆单元 $[D]$ 就等于弹性模量 E 。

d. 单元平衡方程和单元刚度矩阵、应力矩阵

由虚功原理: 外力在虚位移上所做的虚功就等于应力在虚应变上的虚功, 于是有:

$$\{\delta^*\}^T \{P\} = \int_v \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta^*\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} \int_v dV$$

式中, ΔV 是杆单元的体积, 它等于单元横截面积 A 乘以单元长度 L ; $[K]$ 是杆单元的刚度矩阵:

$$[K] = [B]^T [D] [B] \Delta V \quad (1-31)$$

所以 $\{P\} = [B]^T [D] [B] \Delta V \{\delta\} = [K] \{\delta\}$ (1-32)

将式(1-28)代入式(1-31)得杆单元的刚度矩阵的显式:

$$[K] = \frac{1}{L^2} \begin{Bmatrix} -L_x \\ -L_y \\ -L_z \\ L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} E \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -L_x & -L_y & -L_z & L_x & L_y & L_z \end{bmatrix} LA =$$

$$\frac{EA}{L^3} \begin{bmatrix} L_x^2 & L_x L_y & L_x L_z & -L_x^2 & -L_x L_y & -L_x L_z \\ & L_y^2 & L_y L_z & -L_y^2 & -L_y L_x & -L_y L_z \\ & & L_z^2 & -L_z L_x & -L_z L_y & -L_z^2 \\ \text{对} & & & L_x^2 & L_x L_y & L_x L_z \\ & & & & L_y^2 & L_y L_z \\ & & & & & L_z^2 \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

称

杆单元的应力矩阵:

$$[S] = E[B] = \frac{E}{L^2} [-L_x \quad -L_y \quad -L_z \quad L_x \quad L_y \quad L_z] \quad (1-34)$$

杆单元质量矩阵的六个分量都是总质量的一半:

$$[M] = \frac{\rho AL}{2} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (1-35)$$

式中, ρ 是杆的密度。

(3) 单元载荷模式的形成

a. 体积力形成的等效节点力和体积力载荷因子

把杆单元的重力平均分配给两个节点形成等效节点力:

$$P = \frac{W_T AL}{2} \quad (1-36)$$

式中, W_T 为重度[⊖]

等效节点力也是空间任意方向的, 它和三个坐标轴的夹角分别是 α 、 β 和 γ 。则等效节点力 P 可表示为:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} \frac{W_T AL}{2} \quad (1-37)$$

通常称三个方向余弦 $\cos \alpha$, $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 分别为 X 、 Y 、 Z 三个方向的单元载荷因子。

b. 温度变化引起的等效节点力和温度载荷因子:

用于计算单元热负荷的温度增量: $\Delta T = (T_i + T_j)/2 - T_r$

式中, $(T_i + T_j)/2$ 是 i 节点和 j 节点温度的平均值(为单元温度); T_r 是单元零应力时的参考温度。

温度变化 ΔT 产生的杆单元的线应变:

$$\epsilon_T = \alpha_T \Delta T \quad (1-38)$$

式中, α_T 为热膨胀系数。

则产生的等效节点力:

$$P_T = -[B]^T [D] \{\epsilon_T\} AL \quad (1-39)$$

2. 空间梁单元

(1) 单元功能

⊖ 本书中重度均指重量密度。

空间梁单元有两个节点,一般每个节点有6个自由度(三个线位移,三个角位移),单元之间用节点刚性连接,节点可传递集中力,也可传递扭矩,还可承受热载荷。单元刚度矩阵考虑了剪切挠度的影响,适用于比较短粗的梁。

这种单元,除了可以获得节点位移外,还可以算得单元两端的内力和内力矩,需要时还可以算得单元两端截面上的最大和最小正应力。使用这种单元可以对连续梁、平面刚架和空间刚架进行静、动力分析。

空间梁单元见图1-2。

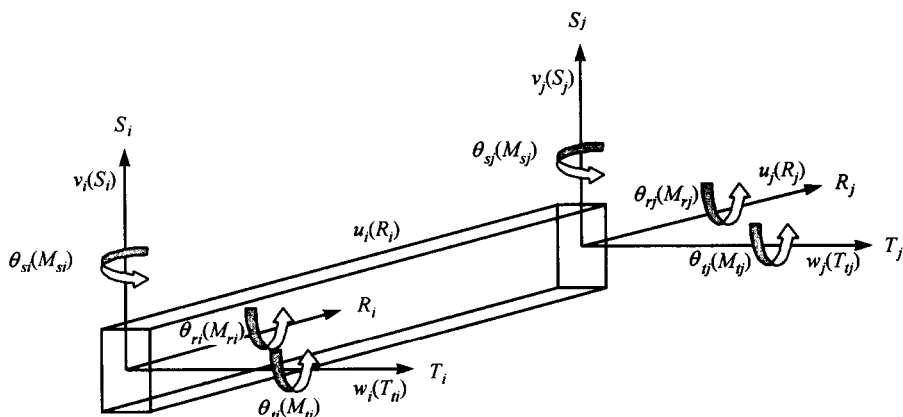


图 1-2 空间梁单元

(2) 单元刚度矩阵

a. 空间梁单元结构坐标系下的单元刚度矩阵和坐标变换

空间梁单元结构坐标系下的单元刚度矩阵:

$$[K]_M^e = [\lambda]^T [K]_e^e [\lambda] \quad (1-40)$$

式中, $[K]_M^e$ 为结构坐标系下的单元刚度矩阵; $[K]_e^e$ 为单元坐标系下的单元刚度矩阵; $[\lambda]$ 为坐标变换矩阵。

坐标变换矩阵:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (1-41)$$

由式(1-40)可知结构坐标系下的单元刚度矩阵取决于单元坐标系下的刚度矩阵,得到单元坐标系下的刚度矩阵以后,采用坐标变换就可以得到结构坐标系下的单元刚度矩阵。

b. 单元坐标系下的刚度矩阵

在有限元法中,单元刚度矩阵是一个极其重要的单元特性,它反映了单元中节点力与位移之间的关系。对单元坐标系来讲有平衡方程:

$$\{F\}_e^e = [K]_e^e \{\delta\}_e^e \quad (1-42)$$

式中, $\{F\}_e^e = [R_i \ S_i \ T_i \ M_{ri} \ M_{ti} \ M_{si} \ R_j \ S_j \ T_j \ M_{rj} \ M_{tj} \ M_{sj}]^T$;

$$\{\delta\}_e^e = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{ri} \ \theta_{si} \ \theta_{ti} \ u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{rj} \ \theta_{sj} \ \theta_{tj}]^T。$$

$\{F\}_e^e$ 与 $\{\delta\}_e^e$ 中各分量关系如下所述。

为了便于分析, 把拉压刚度 ($R_i R_j$ 与 $u_i u_j$ 的关系)、扭转刚度 ($M_{ri} M_{rj}$ 与 $\theta_{ri} \theta_{rj}$ 的关系)、ROS 平面内的弯曲刚度 ($S_i M_{ti} S_j M_{tj}$ 与 $v_i \theta_{si} v_j \theta_{sj}$ 的关系) 和 ROT 平面内的弯曲刚度 ($T_i T_j M_{si} M_{sj}$ 与 $w_i \theta_{ti} w_j \theta_{tj}$ 的关系) 分开来介绍。

c. 拉压刚度方程

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \frac{EA_r}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1-43)$$

d. 扭转刚度方程

$$\begin{Bmatrix} M_{ri} \\ M_{rj} \end{Bmatrix} = \frac{GJ_r}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ri} \\ \theta_{rj} \end{Bmatrix} \quad (1-44)$$

e. ROS 平面内的弯曲刚度方程

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_{ti} \\ S_j \\ M_{tj} \end{Bmatrix} = \frac{EJ_t}{1 + \Phi_s} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4 + \Phi_s}{6} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2 - \Phi_s}{L} \\ \text{对} & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L^2} \\ & \text{称} & & \frac{4 + \Phi_s}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{si} \\ v_j \\ \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (1-45)$$

$$\Phi_s = \frac{12\alpha_s EJ_t}{GAL^2}$$

$$A_s = \frac{A}{\alpha_s}$$

f. ROT 平面内的弯曲刚度方程

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_{si} \\ T_j \\ M_{sj} \end{Bmatrix} = \frac{EJ_s}{1 + \Phi_t} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & \frac{4 + \Phi_s}{6} & \frac{6}{L^2} & \frac{2 - \Phi_s}{L} \\ \text{对} & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L^2} \\ & \text{称} & & \frac{4 + \Phi_s}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{ti} \\ w_j \\ \theta_{tj} \end{Bmatrix} \quad (1-46)$$

$$\Phi_t = \frac{12\alpha_t EJ_s}{GAL^2}$$

$$A_t = \frac{A}{\alpha_t}$$

g. 空间梁单元刚度矩阵

综合以上拉压、扭转与弯曲刚度方程, 得到空间梁单元刚度方程为:

$$\{F\}_e^e = [K]_e^e \{\delta\}_e^e \quad (1-47)$$

由空间梁单元刚度方程得梁单元刚度矩阵显式: