普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计

◆ 郭仿平 何 兰 主编

4

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计

主　编　郭仿平　何　兰

副主编　严羿鹏　陈元玖　黎　彬

参　编　杜敏文　周定均

主　审　陈明宝

机械工业出版社

本书系统地介绍了概率论与数理统计的基础知识，包括事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、MATLAB 在概率统计中的应用等内容。本书力求深入浅出，条理清楚，注重基本概念的阐释，重视理论知识的实际应用。

本书为普通高等院校（特别是应用型本科）的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/郭仿平，何兰主编．—北京：机械工业出版社，2005.2

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-15952-7

Ⅰ．概…　Ⅱ．①郭…②何…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 142313 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：李永联　版式设计：霍永明　责任校对：吴美英

封面设计：饶　薇　责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 2 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5·6.625 印张·256 千字

定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

68326294、68320718

前　言

本书是作者参照原国家教委颁布的概率论与数理统计课程的基本要求，总结并融入作者多年来对这门课程在教学中所取得的经验和在教改中对课程的目的、任务、内容体系、教学方法、教学手段的探索与实践，并结合目前普通高校学生的实际状况，从教与学两个方面综合考虑编写而成的。

本书主要特色如下：

1. 注重实际。本书充分考虑目前普通高校本科学生的实际程度，注意与这种实际状况的良好衔接，因而在深入浅出上注意把握“浅出”，重点放在对基本概念和基本思想的阐释，在理论上不追求完整性，但尽量解释其实际意义。

2. 注重培养学生运用本学科的思想方法去分析问题、解决问题的能力。

3. 习题针对性强、覆盖面大。例题注重对学生解题方法的多样性、灵活性的培养与训练。

4. 具有一定的先进性。引入数学软件 **MATLAB** 在概率统计中的应用，用以培养学生在以后的实际工作中解决大规模统计计算问题的能力。

本书第一、二章由严羿鹏编写，第三、四章由杜敏文编写，第五、六章由陈元玖编写，第七章由何兰编写，第八章由黎彬编写，第九章由郭仿平编写，第十章由周定均编写。全书由何兰、郭仿平负责统稿。本书由陈明宝担任主审，在此表示衷心的感谢！本书在编写过程中参阅了很多教材，未一一列出，对此也表示衷心感谢！

本书为普通高等院校工科学生、特别是应用型本科学生概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考之用。

尽管作者在编写中参考了国内外众多相关书籍，但由于我们水平有限，再加上时间仓促，书中仍难免有缺点和错误，敬请专家和读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　随机事件与概率

第一节　随 机 事 件

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验

我们在现实生活中会碰到各种各样的现象，总的说来可分为两类。一类现象是：在一定条件下某种结果必然会出现，这类现象称为确定性现象。如同性的电荷必然会相互排斥，异性的电荷必然会相互吸引；另一类现象是：在一定条件下，可能出现的结果不止一个，事先又无法确切地知道哪一个结果会出现，这类现象称为随机现象。例如，某人购买了一注电脑彩票，他可能中奖也可能不中奖，至于他到底中不中奖在该期彩票开奖之前是无法确定的；抛掷一枚骰子，可能出现的点数是 1，2，…，6 这六个数之一，在抛掷之前也是无法确定哪一个点数会出现。

为了叙述方便，我们把对自然现象或社会现象进行的一次观察或实验，统称为一个试验。如果这个试验在相同条件下可以重复进行，且每次试验的结果事前不可预言，但知道试验的所有可能结果，这样的试验就称为一个**随机试验**。以后，我们所说的试验都指的是随机试验。

下面给出几个试验的例子。

E_1：抛一枚硬币，观察正、反面（约定其标有币值的一面为正面）出现的情况；

E_2：连续两次抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况；

E_3：抛一枚骰子，观察出现的点数；

E_4：从一个装有四个红球和两个白球的袋中任意取出三球，观察红球的数目；

E_5：观察某图书馆在一天内所借出书籍的册数；

E_6：在一批电视机中任意抽取一台，测试其寿命。

对于随机现象，就个别试验而言，其结果事先是无法预知的，出现哪一个结果纯属偶然，这是随机现象具有的随机性的一面。但是，人们还发现，在大量重

复试验下，其结果却呈现出某种规律性，这种规律性我们称为“统计规律性”，这说明随机现象又具有规律性的一面。概率论与数理统计就是对随机现象的这种规律性进行量化研究的一门数学学科。

2. 随机事件

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是知道的。每一个结果，称为该试验的一个**样本点**，由样本点的全体（试验的所有可能结果）构成的集合，称为该试验的**样本空间**，记为 Ω。前面六个试验的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{$正，反$\}$（“正”表示试验结果为“出现正面”，下同）；

$\Omega_2=\{$（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）$\}$；

$\Omega_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$（“1”表示“抛掷出的点数为1”，其他数字含义类似）；

$\Omega_4=\{1,\ 2,\ 3\}$；

$\Omega_5=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$；

$\Omega_6=\{t \mid 0\leqslant t<\infty\}$。

试验 E_1，E_2，E_3，E_4 的样本空间都只有有限个样本点，E_5 的样本空间含有无穷多个样本点，但这些样本点依照某种次序可以一个一个地数出来，以后称它的样本点为可数无穷个或可列无穷个；而 E_6 的样本空间也包含有无穷多个样本点，它们充满区间 $[0,\ \infty)$，以后称它的样本点为不可数个或不可列个。

在一次试验中，可能出现也可能不出现的事情称为**随机事件**，简称为**事件**。事件通常用大写英文字母 A，B，C 等表示。随机事件通常理解为还没有发生的事情，可以看作是随机试验的可能结果。

在抛掷一颗骰子的试验 E_3 中，记 $A_1=$“出现的点数为1”，$A=$“出现的点数为奇数”。在一次试验中，它们可能出现也可能不出现，所以都是随机事件。如果我们做 E_3 试验一次，即把骰子抛掷一次，当抛掷出的点数为1时，我们就说事件 A_1“发生了”，否则，就说事件 A_1“不发生”。也就是说，当且仅当出现样本点“1”时，事件 A_1 发生。这样，我们就可以把事件 A_1 看作是由这一个样本点所构成的集合，即 $A_1=\{1\}$。同样，当且仅当抛掷出的点数为1，或为3，或为5这些奇数点时，我们就说事件 A 发生。A 也就看作是由这三个样本点所组成的集合，即 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$。显然，事件 A_1，A 都是样本空间 Ω_3 的子集。

类似地，在 E_1 中“出现正面”；在 E_2 中“两次都出现正面”及“至少一次出现正面”；在 E_4 中“取出两个红球”；在 E_5 中，“所借出的书籍不超过1000册”；在 E_6 中“电视机的寿命在10~15kh之间”，这些都是随机事件，它们都是各自样本空间的子集。

由于随机事件是样本点的集合，当随机事件是由一个样本点构成的单点集时，这样的最简单的随机事件称为该试验的基本事件。通常，我们对基本事件与样本点并不严格加以区分，都看成是试验的基本可能结果。在抛掷骰子的试验中，记 A_i = "出现的点数为 i"（$i=1, 2, \cdots, 6$），则事件 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 是基本事件。

特别地，在一个随机试验中，每次试验一定发生的事件称为必然事件；每次试验一定不发生的事件称为不可能事件。必然事件记为 Ω，不可能事件记为 Φ。必然事件是由该试验的所有样本点构成的集合，也就是样本空间；不可能事件是不含任何样本点的集合，也就是空集，它们也可被看作是样本空间的子集。显然，必然事件和不可能事件已经不再具有随机性，但为了方便起见，仍把它们视为特殊的随机事件。

二、事件的关系与运算

在一个试验中，有些事件可能比较简单，有些比较复杂，如果我们能找到复杂事件与一些简单事件之间的关系的话，对于分析复杂事件以及解决其相关的概率问题无疑是非常重要的。我们已经知道事件是一个集合，因此，在理论上事件之间的关系与运算就是集合之间的关系与运算。但是，我们并不是把每个事件在任何时候都表示为样本点的集合的形式，所以，理解并掌握事件的关系与运算的含义就很必要了。

设某试验的样本空间为 Ω，且 A, B, A_k（$k=1, 2, 3, \cdots$）为该试验的事件。

包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

例如，在试验 E_3 中，记 A = "掷出的点数为 4"，B = "掷出的点数为偶数"。若事件 A 发生，显然事件 B 一定也发生。所以事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$。若把事件表示为集合，得 $A=\{4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$。显然有集合 B 包含集合 A，即 $A\subset B$。可见事件 A，B 同集合 A，B 有相同的关系。若记 C = "掷出的点数是 2 的倍数"，则事件 B 与事件 C 相等，即 $B=C$。

对任何事件 A，有 $\Phi\subset A\subset\Omega$。

事件的和　若记事件 C = "事件 A 与事件 B 至少有一个发生"，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的和，记为 $C=A+B$ 或 $C=A\cup B$。即事件 $A+B$ 发生当且仅当事件 A 发生或事件 B 发生。

在 E_3 中，记 A = "掷出的点数是奇数"，B = "掷出的点数是质数"，则 $A+B$ = "掷出的点数是奇数或者是质数"。即 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，则 $A+$

$B=\{1, 2, 3, 5\}$。

特别地，若 $A\subset B$，则 $A+B=B$。

事件的和可以推广到多个事件的情形：

$$A_1+A_2+\cdots+A_n = \text{“}A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 至少一个发生”。}$$
$$= \text{“}A_1 \text{ 发生，或 } A_2 \text{ 发生，}\cdots\text{，或 } A_n \text{ 发生”。}$$

事件的积　若记事件 $C=$ “事件 A 与事件 B 同时发生”，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的积，记为 AB 或 $A\cap B$。

在 E_3 中，记 $A=$“掷出的点数是奇数”，$B=$“掷出的点数是质数”，则 $AB=$“掷出的点数既是奇数又是质数”。即 $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，则 $AB=\{3, 5\}$。

特别地，若 $A\subset B$ 则 $AB=A$。

事件的积也可推广到多个事件的情形：

$$A_1A_2\cdots A_n = \text{“}A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 同时发生”。}$$

事件的差　若事件 $C=$“事件 A 发生而事件 B 不发生”，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$。

在 E_3 中，记 $A=$“掷出的点数是偶数”，$B=$“掷出的点数是质数”，则 $A-B=$“掷出的点数是偶数而又不是质数”。即 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，则 $A-B=\{4, 6\}$。

互不相容事件　若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 为互不相容的事件。互不相容的事件也称为互斥的事件。

显然，所有的基本事件之间都是互不相容的。

逆事件　若事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A+B=\Omega$，$AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 互为逆事件。此时也称事件 A 与事件 B 互为对立事件。事件 A 的逆事件记为 $\bar{A}$，则 $\bar{A}=B=\Omega-A$。

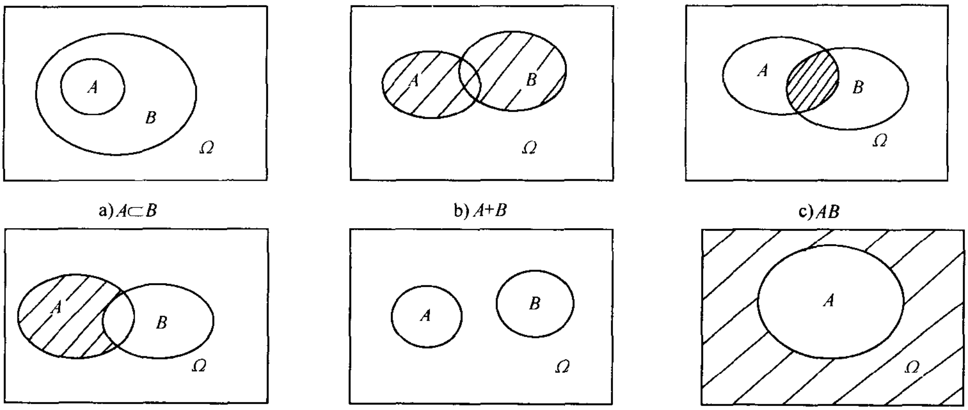
由定义可知，两个对立事件一定是互斥事件；而两个互斥事件不一定是对立事件。

在 E_3 中，记 $A=$“掷出的点数是奇数”，$B=$“掷出的点数是偶数”，$C=$“掷出的点数为 4”。显然 A，B 为对立事件也是互斥事件，A，C 为互斥事件但不是对立事件。

同集合一样，事件间的关系与运算可用文氏（Venn）图表示，用平面上的矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示所有的基本事件（样本点），椭圆 A 与椭圆 B 内的点分别表示事件 A 与事件 B，则事件 A 与 B 的关系与运算如图 1-1 所示。

事件运算的规律　由于事件的运算可以看作集合的运算，因此事件的运算满足集合运算的规律。

交换律　$A+B=B+A$；$AB=BA$



a) $A \subset B$　b) $A+B$　c) AB

d) $A-B$　e) $AB=\phi$(A,B互斥)　f) $\overline{A}$

图 1-1

结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$；$(AB)C=A(BC)$

分配律　$(A+B)C=AC+BC$；$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

即$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

德莫根(De Morgan)公式　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

德莫根公式可以推广到 n 个事件(甚至可列个)的情形

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}$$

例 1-1　从一批产品中随机地抽取三件，记事件 $A_k=\{$抽出的第 k 件是合格品$\}$，$k=1,2,3$。试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

(1) 抽出的三件都是合格品；

(2) 抽出的三件都不是合格品；

(3) 抽出的三件不都是合格品；

(4) 抽出的三件中只有第一件是合格品；

(5) 抽出的三件中恰有一件是合格品；

(6) 抽出的三件中至少有一件是合格品。

【解】　(1) $A_1A_2A_3$

(2) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$或$\overline{A_1+A_2+A_3}$

(3) $\overline{A_1A_2A_3}$或 $\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$

(4) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

(6) $A_1+A_2+A_3$

第二节 事件的概率

一、频率与概率

我们研究随机现象时，不仅需要知道一个试验可能出现的各种结果，而且还要进一步分析出现某个可能结果（事件）有多大的可能性。

在相同条件下，进行 n 次重复试验，事件 A 发生的次数记为 n_A。容易看出，若事件 A 发生的可能性越大，则它在 n 次试验中发生的次数 n_A 也越大，于是 n_A 与试验次数 n 的比值 n_A/n 也就越大。我们把这个在一定程度上反映事件 A 发生可能性大小的数 n_A/n 称为事件 A 在 n 次重复试验中发生的**频率**，记为 $f(A)$，即 $f(A)=\dfrac{n_A}{n}$。

为了进一步探求事件的频率与事件发生可能性大小之间的内在联系，历史上有许多人做过大量的重复试验，表 1-1 就是抛掷硬币这个试验的一些试验结果。

表 1-1

实验者	抛掷次数 n	正面向上次数 n_A	$f(A)=n_A/n$
德莫根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

分析表 1-1 我们发现，虽然事件 $A=$“正面向上”发生的频率 $f(A)$ 各不相同，但是它们都在一个固定的数值 0.5 附近摆动，而且，随着试验次数的增加，这种摆动的幅度越来越小，有逐渐稳定于 0.5 的趋势。

上述试验的结果揭示出这样一个统计规律性：一个事件发生的频率稳定于一个固定的数值。这一统计规律性称为频率的稳定性，它表明随机事件发生可能性的大小是由它自身固有的客观属性所决定的，因此，任何一个事件发生的可能性的大小都是惟一确定的。我们把用来度量一个事件发生可能性大小的数值称为该事件发生的**概率**。显然我们用事件频率的稳定值来作为度量事件发生可能性的大小是合适的。

定义 1（概率的统计定义） 在 n 次试验中，如果事件 A 发生的频率稳定地在某一确定的数值 p 附近摆动，且随着 n 的增大，其摆动的幅度越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，简称为事件 A 的概率，记作

$$P(A)=p$$

需要指出的是，概率的统计定义只是告诉了我们，任何一个事件都客观存在其确定的概率，但并没有提供一种计算事件概率的方法，因为我们永远也不可能依据这个定义确切地定出任何一个事件的概率。该定义提供的是一种估计事件概率的方法——用大量重复试验中事件发生的频率去估计概率。例如在工业生产中，根据抽取的一部分产品去估计全部产品的合格率；在医学上依据积累的资料去估计某种疾病的死亡率等。此外，该定义还提供了一种检验理论是否正确的准则。比如根据一定的理论、假设推算出某事件 A 的概率为 p，为了验证它的正确与否，我们可以通过大量重复试验来观察 A 的频率。若所得频率与 p 接近，则认为试验结果支持了有关理论；若相差较大，则可认为该理论可能有误。

二、概率的公理化定义

概率的统计定义虽然告诉我们，通过大量的重复试验可以得到事件概率的估计值，但是这样做既得不到概率的准确值也不便于概率的理论推导，因此需要给出概率的准确定义。从概率的统计定义中我们知道，任何一个随机事件 A 都有一个表示它发生可能性大小的实数 $P(A)$（事件 A 的概率）与之对应，而随机事件就是一个集合，因此事件的概率实质上就是一个把集合映射成实数的特殊函数，这样的函数称为集合函数。概率的公理化定义，就是通过把概率看作一个集合函数，并要求它满足几条公理而给出的。这几条公理是通过对事件频率性质的研究而归纳总结出来的。

定义 2（概率的公理化定义） 假设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一随机事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足下列三个条件：

(1) 非负性：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：当事件 A_1，A_2，… 两两互不相容时有 $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

该定义是由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫在 1933 年创立的。同概率的统计定义一样，概率的公理化定义也没有给出如何确定一个事件概率大小的方法，只是给出了概率这个概念应满足的几条一般公理。该定义的意义在于它为一种普遍而严格的概率理论奠定了坚实的理论基础，正是在此基础上才建立起了概率论的宏伟大厦。

由概率的公理化定义可以推出概率具有下列性质：

性质 1　$P(\Phi)=0$

性质 2（有限可加性） 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互不相容，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

性质 3 $P(A)=1-P(\overline{A})$

性质 4 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

推论 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$

性质 5（加法公式） $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推论 $P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$

性质 5 还可推广到多个事件的情形：

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$

下面给出这几条性质的证明。

【性质 1 的证明】 由 $\Omega=\Omega+\Phi+\Phi+\cdots$
和可列可加性得 $P(\Omega)=P(\Omega)+P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots$
且 $P(\Omega)=1$，$0\leqslant P(\Phi)\leqslant 1$，故得 $P(\Phi)=0$。

【性质 2 的证明】 取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\Phi$，由可列可加性得

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

【性质 3 的证明】 因为 $A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，由性质 2 得 $P(A)+P(\overline{A})=1$，故 $P(A)=1-P(\overline{A})$。

【性质 4 的证明】 假设 $A\subset B$，如图 1-2 所示，有

$$B=A+(B-A)\text{且 }A(B-A)=\Phi$$

由性质 2 得 $P(B)=P(A)+P(B-A)$
故 $P(B-A)=P(B)-P(A)$
又因 $P(B-A)\geqslant 0$，从而有推论 $P(B)\geqslant P(A)$。

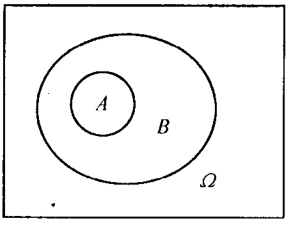


图 1-2

【性质 5 的证明】 设 A,B 为任意两事件，如图 1-3 所示，因为 $A+B=A+(B-A)$，且 $A(B-A)=\Phi$ 故 $P(A+B)=P(A)+P(B-A)$

又 $B=(AB)+(B-A)$，且 $(AB)(B-A)=\Phi$
再由性质 2 $P(B)=P(AB)+P(B-A)$
得 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$
故有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

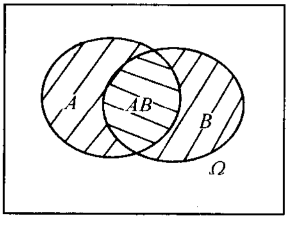


图 1-3

三、古典概型与古典概率

如果随机试验具有如下两个特点：

(1) 样本空间的样本点（基本事件）只有有限个；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同，则称该试验属于**古典概型**。这种等可能的数学模型曾经是概率论发展早期的主要研究对象，在概率论中占有相当重要

的地位。一方面，由于它简单，对它的讨论有助于直观地理解概率论的许多基本概念；另一方面，关于古典概型在实际问题中有着广泛的应用。

由古典概型的两个特点，自然地得出定义 3：

定义 3（概率的古典定义）　设属于古典概型的随机试验的基本事件总数为 n，事件 A 包含的基本事件数为 k，则事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

这样定义的事件的概率称为**古典概率**。古典概率是由法国数学家拉普拉斯（Laplace）在 1812 年引入的，当时他是把古典概率作为概率的一般定义。有了概率的公理化定义以后容易验证，古典概率是在古典概型下满足公理化定义要求的一种特殊形式的概率。

在古典概型中，事件的概率原则上都可由上述公式算出。应用公式时需要求出基本事件总数 n 及事件 A 包含的基本事件数 k，这经常要用到排列组合的有关知识，在此我们列出有关的排列组合公式：

(1) n 个元素中取 r 个（$1\leqslant r\leqslant n$）的不同排列总数为 $A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$；

(2) n 个元素中取 r 个（$1\leqslant r\leqslant n$）的不同组合总数为 $C_n^r=\dfrac{A_n^r}{r!}=\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$；

(3) n 个元素分成 k 堆，各堆的元素个数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 的分法是 $\dfrac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!}$；

(4) 二项式的展开式：$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$。

下面举一些关于古典概率计算的例题。

例 1-2　从 0,1,2,⋯,9 十个数字中,随机地取出一个数字,求取得的数字是 3 的倍数的概率。

【解】　设事件 A =“取得的数字是 3 的倍数”。该试验的基本事件总数 $n=10$，事件 A 包含的基本事件数 $k=4$（取到数字 0，3，6，9），因此所求概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{4}{10}=0.4$$

例 1-3　抛掷两个质地均匀的骰子，求它们出现的点数之和为 11 的概率。

【解】　设事件 A =“出现的点数之和为 11”。记抛掷两个骰子出现的点数为 $(i,\ j)$，由于 i，j 各有 6 种取法，故基本事件总数 $n=6\times6=36$。又事件 A 包含的基本事件数 $k=2$（即出现（5，6）或（6，5）时）。因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

对于该试验，如把两个骰子出现的点数之和，即出现 2 点，3 点，…，12 点这 11 个结果看成了具有等可能性的基本事件，就会得出错误的结论 $P(A)=\frac{1}{11}$。事实上以上 11 个结果的出现并不具有等可能性。可见在应用公式 $P(A)=\frac{k}{n}$ 之前弄清楚试验的结果是否真正具有等可能性是十分重要的。

例 1-4 购买某种电脑彩票的人需要从 01，02，…，32 这 32 个数字中选择七个下注，如果选中的数字与当期彩票开奖时由开奖机随机开出的七个数字相同(顺序可以不同)，则他就中一等奖，求某人购买了一注彩票而中一等奖的概率。

【解】 设事件 A =“某人购买一注彩票就中一等奖”。该试验的基本事件总数 $n=C_{32}^{7}$，事件 A 包含的基本事件数 $k=1$。因此，所求的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{1}{C_{32}^{7}}=0.000000297$$

此题中事件 A 出现的可能性是非常小的（约为千万分之三），像这样概率很小的事件称为小概率事件。小概率事件在一次试验中实际上是不可能出现的。这一原理称为**小概率原理**，它在统计学中有重要应用。

例 1-5 从装有 20 个白球、6 个黑球的袋中随机地取出 4 个球，求取出的球中恰有 2 个黑球的概率。

【解】 设事件 A =“取出的 4 个球中恰有 2 个黑球”。从 26 个球中随机取出 4 个球的取法种数就是该试验的基本事件总数，故 $n=C_{26}^{4}$。同理，事件 A 包含的基本事件数 $k=C_{20}^{2}\cdot C_{6}^{2}$，因此，所求事件的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_{20}^{2}\cdot C_{6}^{2}}{C_{26}^{4}}=0.19$$

如果把白球看作一批产品中的正品，黑球看作次品，则这个取球模型就可以描述产品的无放回抽样。如果产品分成更多的等级，则可用袋中装有更多颜色的取球模型来描述。

例 1-6 400 米赛跑中有 7 条跑道，其中有 3 条好跑道，7 名运动员抽签决定自己的跑道（每条跑道对应一根签），运动员小张最先抽，小李第二个抽，试问小张，小李抽到好跑道的概率是否相等？

【解】 设 A =“小张抽到好跑道”；B =“小李抽到好跑道”。

把 7 根签所有可能的排列作为基本事件总数 $n=7!$，事件 A 就是第一个位置排列好跑道，共有 C_{3}^{1} 种可能，事件 B 就是第二个位置排列好跑道，共有 C_{3}^{1} 种

可能，其余6个签任意排列。因此 $k_A=k_B=C_3^1 6!$，故

$$P(A)=P(B)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7}$$

所以两人抽到好跑道的概率相同。

这正是抽签这种方法的科学性以及被广泛地使用的原因。另外此例有助于加深对随机事件是“还未发生的事件”这一概念的理解。

例 1-7 在如图1-4所示的串联线路中，元件 A 发生故障的概率为0.1，元件 B 发生故障的概率为0.2，而元件 A、B 同时发生故障的概率为0.05，求线路发生故障的概率。

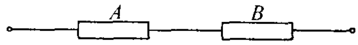


图 1-4

【解】 设 A=“元件 A 发生故障”；B=“元件 B 发生故障”，

则 AB=“元件 A、B 同时发生故障”。

$A+B$=“元件 A、B 至少一个发生故障” = “线路发生故障”

由已知 $P(A)=0.1$，$P(B)=0.2$，$P(AB)=0.05$，故

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.1+0.2-0.05=0.295\end{aligned}$$

例 1-8 某班有 m 个人，求该班至少有两人的生日相同的概率(一年按365天计)。

【解】 设 A=“该班至少有两人的生日相同”。要直接求 $P(A)$ 很困难，因此，考虑先求 $P(\overline{A})$，再用性质3求 $P(A)$。m 个人中的每一个人的生日可以是一年365天中的任一天，因此基本事件总数 $n=365^m$，事件 $\overline{A}$ 是指的这 m 个人的生日在一年365天中的不同天，因此 $\overline{A}$ 包含的基本事件数 $k=P_{365}^m$，故

$$P(\overline{A})=\frac{k}{n}=\frac{P_{365}^m}{365^m}，于是$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^m}{365^m}$$

令人吃惊的是，当 $m=23$ 时，$P(A)$ 就超过0.5；当 $m=50$ 时，$P(A)=0.97$。即当该班有23人时，至少有两人的生日相同的概率就超过了0.5，当该班有50人时，至少有两人的生日相同的概率高达0.97。

第三节 条件概率、全概率公式和贝叶斯公式

一、条件概率与乘法公式

前面学过概率的加法公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，其中关于