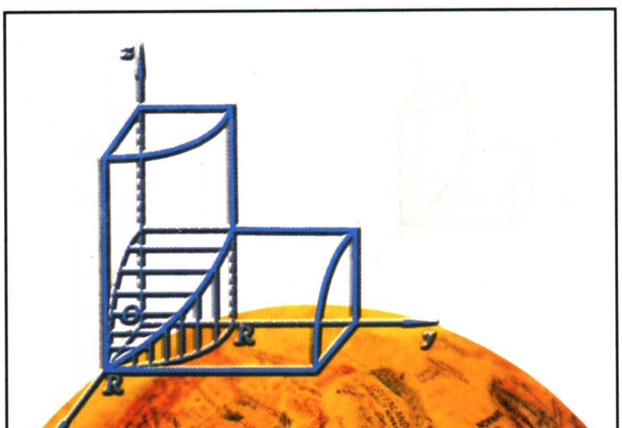
高等学校数学教材系列丛书

工科数学试题详解

——高等数学·线性代数·概率统计



刘三阳 主编
刘三阳 于 力 马建荣 宋 月 编

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

工科数学试题详解

——高等数学·线性代数·概率统计

刘三阳　主编

刘三阳　于力　马建荣　宋月　编

西安电子科技大学出版社

2005

图书在版编目(CIP)数据

工科数学试题详解：高等数学·线性代数·概率统计/刘三阳等编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2005.6
（高等学校数学教材系列丛书）
ISBN 7-5606-1518-X
Ⅰ．工… Ⅱ．刘… Ⅲ．①高等数学-高等学校-解题 ②线性代数-高等学校-解题 ③概率论-高等学校-题解 Ⅳ．O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033892 号

策　　划　夏大平
责任编辑　夏大平
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88227828　　邮　　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安文化彩印厂
版　　次　2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 6 月第 1 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 8.75
字　　数　211 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　12.00 元
ISBN 7-5606-1518-X/O·0075
XDUP 1809001-1

内 容 简 介

本书汇编了西安电子科技大学2000年以来本科生、本硕连读生高等数学、线性代数(高等代数)、概率统计三课程的考试试题及其解答.

此外，书末附有2001年至2005年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及其解答.

本书收集的是全真试题，题型多样，搭配合理，难易适当，解答详尽，知识点广，适用面宽.

本书可供各类高等学校的师生，特别是工科院校师生作为辅导、复习参考资料，也适合作为成人高校师生和参加自学考试或网络教学的读者的学习参考书，亦也供报考硕士研究生的大学生参考.

目　　录

第一篇　高等数学试题及解答

试题部分

一、二〇〇〇级高等数学试题 …… 3
（一）第一学期期中试题 …… 3
（二）第一学期期末试题 …… 5
（三）第二学期期中试题 …… 7
（四）第二学期期末试题 …… 9
二、二〇〇一级高等数学试题 …… 12
（一）第一学期期中试题 …… 12
（二）第一学期期末试题 …… 13
（三）第二学期期中试题 …… 15
（四）第二学期期末试题 …… 17
三、二〇〇二级高等数学试题 …… 19
（一）第一学期期末试题 …… 19
（二）第二学期期中试题 …… 21
（三）第二学期期末试题 …… 23
四、二〇〇三级高等数学试题 …… 26
（一）第一学期期中试题 …… 26
（二）第一学期期末试题 …… 27
（三）第二学期期中试题 …… 29

（四）第二学期期末试题 …………………………………………………… 31
五、二〇〇四级高等数学试题 …………………………………………………… 33
（一）第一学期期中试题 …………………………………………………… 33
（二）第一学期期末试题 …………………………………………………… 35

解答部分

一、二〇〇〇级高等数学试题解答 …………………………………………… 37
（一）第一学期期中试题解答 ……………………………………………… 37
（二）第一学期期末试题解答 ……………………………………………… 40
（三）第二学期期中试题解答 ……………………………………………… 46
（四）第二学期期末试题解答 ……………………………………………… 50
二、二〇〇一级高等数学试题解答 …………………………………………… 54
（一）第一学期期中试题解答 ……………………………………………… 54
（二）第一学期期末试题解答 ……………………………………………… 57
（三）第二学期期中试题解答 ……………………………………………… 63
（四）第二学期期末试题解答 ……………………………………………… 66
三、二〇〇二级高等数学试题解答 …………………………………………… 70
（一）第一学期期末试题解答 ……………………………………………… 70
（二）第二学期期中试题解答 ……………………………………………… 75
（三）第二学期期末试题解答 ……………………………………………… 79
四、二〇〇三级高等数学试题解答 …………………………………………… 84
（一）第一学期期中试题解答 ……………………………………………… 84
（二）第一学期期末试题解答 ……………………………………………… 88
（三）第二学期期中试题解答 ……………………………………………… 93
（四）第二学期期末试题解答 ……………………………………………… 98
五、二〇〇四级高等数学试题解答 …………………………………………… 102
（一）第一学期期中试题解答 ……………………………………………… 102
（二）第一学期期末试题解答 ……………………………………………… 106

第二篇　线性代数(高等代数)试题及解答

试 题 部 分

一、二〇〇一级线性代数试题 …………………………………… 113

二、二〇〇二级线性代数试题 …………………………………… 116

三、二〇〇三级线性代数试题 …………………………………… 119

四、二〇〇三级本硕班高等代数(线性代数)试题 ……………… 122

五、二〇〇四级本硕班高等代数(线性代数)试题 ……………… 125

解 答 部 分

一、二〇〇一级线性代数试题解答 ………………………………… 128

二、二〇〇二级线性代数试题解答 ………………………………… 134

三、二〇〇三级线性代数试题解答 ………………………………… 141

四、二〇〇三级本硕班高等代数(线性代数)试题解答 …………… 147

五、二〇〇四级本硕班高等代数(线性代数)试题解答 …………… 155

第三篇　概率统计试题及解答

试 题 部 分

一、二〇〇一级概率统计试题 …………………………………… 167

二、二〇〇二级概率统计试题 …………………………………… 170

三、二〇〇三级概率统计试题 …………………………………… 173

四、二〇〇三级本硕班概率统计试题 …………………………… 175

解答部分

一、二〇〇一级概率统计试题解答 …………………………………………… 178
二、二〇〇二级概率统计试题解答 …………………………………………… 181
三、二〇〇三级概率统计试题解答 …………………………………………… 185
四、二〇〇三级本硕班概率统计试题解答 ……………………………… 188

附录 A　2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 ………… 194
附录 B　2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 ………… 198
附录 C　2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 ………… 203
附录 D　2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 ………… 208
附录 E　2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 ………… 213
附录 F　2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题答案 …… 218
附录 G　2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题答案 …… 225
附录 H　2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题答案 …… 234
附录 I　2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题答案 …… 248
附录 J　2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题答案 …… 261

第一篇

高等数学试题及解答

试题部分

一、二〇〇〇级高等数学试题

（一）第一学期期中试题

1．填空题：

（1）函数 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$ 的定义域为________.

（2）设 $y=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ （$x\geqslant 1$），则 $y'=$ ________.

（3）设 $y=(1+x^2)^x$，则 $\mathrm{d}y=$________.

（4）设 $y=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}}\arcsin x$，则 $y'=$________.

（5）若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(a\sin x)}{2x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$________.

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{5+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=$________.

（7）设 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

（8）设 $\begin{cases}x=2t\mathrm{e}^t\\ y=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$，则曲线在 $t=0$ 处的切线方程为________.

(9) 函数 $f(x)=\dfrac{x(x-\pi)}{\sin x}$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},3\pi\right)$内的第一类间断点为__________；第二类间断点为__________.

(10) 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}(-\infty<x<+\infty)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f[g(x)]=$__________.

2. 已知 $f(x)=-\dfrac{1}{1+x}$，

(1) 求 $f[f(x)]$的定义域；

(2) 已知 $f(x_0)=1$，求 $f[f'(x_0)]$.

3. 设 $y=y(x)$由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>-2$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$，

(1) 证明：$|x_{n+1}-2|\leqslant\dfrac{1}{2}|x_n-2|$；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. 设 $f(x)$对其定义域$(-\infty,+\infty)$内的任意两点 x、y，有

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$$

(1) 证明 $f(0)=0$；

(2) 若 $f'(0)=a$，证明 $f(x)$可导，并求 $f'(x)$.

6. 证明曲线$\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t\right)\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(a>0,\ 0<t<\pi)$上任一点的切线与 x 轴的交点至切点的距离恒为常数.

7. 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，又设 $f(x)$在 x_0 处可导，$a<x_0<b$，并设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足条件：

$$a<a_n<x_0<b_n<b$$

且 $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$$

试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

（二）第一学期期末试题

1. 填空题：

(1) 设 $y = f(\sin x) + \sin[f(x)]$，其中 f 可微，则 $y' =$ ________.

(2) 设 a 为常数，对 $\forall\ x > 1$，有 $\int_1^x \ln t\ \mathrm{d}t = x\ \ln\frac{ax}{2}$，则 $a =$ ________.

(3) 如果直线

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$$

与平面 $3x - 2y + z = 0$ 平行，则 $\lambda =$ ________.

(4) 设 $y = f(\mathrm{e}^{2x})$，$f'(x) = \ln x$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$ ________.

(5) 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x) = \sin x + \int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x$，则 $f(x) =$ ________.

2. 单项选择题：

(1) 曲线 $xy + \mathrm{e}^{x+y} = 1$ 在点 $(0, 0)$ 的切线斜率 y' 为 ________.

(A) 1　　(B) -1

(C) 0　　(D) e^{-1}

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} (0 < x < 1) =$ ________.

(A) $\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+C$　　(B) $2\arcsin\sqrt{x}+C$

(C) $2\arcsin(2x-1)+C$　　(D) $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+C$

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int\frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

(A) $\frac{1}{x}+C$　　(B) $\ln x+C$

(C) $-\frac{1}{x}+C$　　(D) $-\ln x+C$

(4) 若非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足关系式 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则必有 ________.

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　(B) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

(C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　(D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(5) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t=0$$

在 (a,b) 内有 ________ 根.

(A) 0 个　　(B) 1 个

(C) 2 个　　(D) 3 个

3. 计算下列各题：

(1) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

(2) 求定积分 $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f(2)=1$，$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

4. 计算下列各题：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln x}{x-1}, & x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\ b, & x=1\end{cases}$，求 a、b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$.

(2) 已知直线 L：$\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ 与平面 Π：$3x-y+2z-5=0$ 的交点为 P_0，在平面 Π 上求一条过点 P_0 且与直线 L 垂直的直线方程.

5. 求曲线 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\dfrac{1}{2}\sin t\end{cases}$ 自 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

6. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$，其中函数

$$f(x)=\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan t^2}$$

7. 设曲线 $\begin{cases}x=at^3\\ y=t^2-bt\end{cases}$ $(a>0,\ b>0)$ 在 $t=1$ 处的切线斜率为 $1/3$，求当 a，b 为何值时，该曲线与 x 轴所围部分的面积为最大，并求出其面积.

8. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证明：对任意 $x\in(0,a)$，存在 $\theta\in(0,1)$，使

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

（三）第二学期期中试题

1. 填空题：

(1) 设 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin xy$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}=$ ________.

(2) 设 $z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(3) 由方程 $z=xy+\ln\frac{x}{z}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ ________.

(4) 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 ________.

(5) 空间曲线 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=2t$ 上点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的法平面方程为________.

(6) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint_L(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=$ ________.

(7) 已知曲线积分 $\int_L[\mathrm{e}^x\cos y+yf(x)]\,\mathrm{d}x+(x^3-\mathrm{e}^x\sin y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $f(x)=$ ________.

(8) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$. 则曲线积分

$$\oint_L\frac{(2xy+2y)\,\mathrm{d}x+(x^2-4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

(9) 函数 $u=xy^2z^3$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(2,3,3)$ 方向的方向导数为________.

(10) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}y=$ ________.

2. 设 $z=f(y\mathrm{e}^x,\ xy^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 计算曲线积分

$$I=\int_L(x\mathrm{e}^x+3x^2y)\,\mathrm{d}x+(x^3+\sin y)\,\mathrm{d}y$$

其中 L 是沿曲线 $y=x^2-1$ 从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(2,3)$ 的一段弧.

4. 求 $I=\iint\limits_{D}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant x+y$.

5. 设由方程 $x^2+y^2+z^2=f(x,f(x,y))$ 可确定 $z=z(x,y)$，其中 f 具有连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$.

6. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 yOz 面上的直线 $z=0$，$z=2$ 及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 所围成的平面图形绕 z 轴旋转而成的空间区域.

7. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

（四）第二学期期末试题

1. 填空题：

(1) 设 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$，则 $\mathrm{d}f|_{(1,2,1)}=$__________.

(2) 交换积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{x-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(3) 若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，则常数 $a=$__________.

(4) 已知数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，$b_n\neq0(n=1,2,3,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$ 的和是__________.

(5) 微分方程 $y''+4y'+4y=8$ 的解是__________.

2. 单选题：

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿任一方向导数存在，是 $f(x,y)$ 在该点可微的__________.