自然科学知识丛书

中国代数故事

許莼舫 著

中国青年出版社

自然科学知識丛書

中国代数故事

許莼舫著

中国青年出版社
1965年·北京

內 容 提 要

我国人民在很古的时候就掌握了許多代数知識，像正負数計算、一元任何次方程和多元任何次方程組的解法、二項式乘方的性質、級数和插值法的研究，以及几种不定問題的解法等，都是中国古代在代数学上的伟大成就。本書把这些材料择要加以介紹，使青年讀者知道祖国的代数研究在世界数学史上有着光荣的地位。

中国代数故事

許莼舫著

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

*

787×1092 1/32　5 印张　84 千字

1952 年 4 月北京第 1 版　1965 年 6 月北京第 3 版

1965 年 6 月北京第 8 次印刷

印数 30,501—50,500　定价(6)0.44 元

作者的話

我們伟大祖国的人民，远在三千多年前已經掌握了相当丰富的数学知識．他們在辛勤劳动中，克服了无数困难，作出了巨大貢献，在世界数学史上占到光輝的一頁．中国数学从上古到明代一直是独立发展的，它非但絕少受到外来的影响，而且有許多創造还传播到国外，成为世界数学的先进．

为了要使青年們对祖国在数学上的輝煌成就有較多的認識，作者特地編写了这一套書——《中国算术故事》、《中国代数故事》、《中国几何故事》．希望讀者通过它，能够激发起爱祖国的热情，并且繼承着祖先的优良传統，在原有基础上去刻苦鑽研，努力創造，为国家的社会主义建設事业作出更大的貢献．

本書是关于代数的一册，根据1952年的初版本(原名是《中算家的代数学研究》)，經过修訂，并增补新材料而編成的．內容主要是介紹：(1)《九章算术》的正負数算法和方程；(2)秦九韶的大衍求一术；(3)张丘建、沈括、楊輝、朱世杰等人的級数研究；(4)賈宪的二項式乘方系数表；(5)刘焯、一行、郭守敬等人的插値法研究；(6)刘益、賈宪、秦九韶等人的高次方程解法；(7)李冶的天元术(由应用題列一元高次方程)和

朱世杰的四元术(列多元高次方程組).

由于本書是供給中学程度的青年們閱讀的,所以內容力求浅显和通俗,避免高深的理論說明.另外,为了不讓青年讀者感到繁瑣乏味,关于考据方面都从簡略,各种参考文献也不一一列举.又本書在修訂时,蒙中国科学院中国自然科学史研究室錢宝琮同志提供了很多宝貴意見和重要資料,謹向他表示衷心的感謝.

許 莼 舫

1963 年四月

目　次

代数的原始形态

一

我国在商代的早期奴隶社会里，农业、畜牧和冶炼等生产，在奴隶辛勤劳动的基础上都比夏代有了发展。那时候人們在农业生产中长期观察天象，由此制訂历法，掌握了寒暖季节，能够及时进行耕作，使农业生产繼續推进。由于天文历法的研究必須通过相当繁复的数字計算，于是数学也随着发展起来。当时的奴隶被貴族强迫着劳动，生产的东西自己不能享用，过着牛馬一般的生活，連生命也沒有保障，因而常常起来反抗。在商末和西周时，即奴隶社会后期，奴隶主对奴隶的剝削和虐待越来越残酷，使阶級斗爭变得很激烈，更多的奴隶不断地起来反抗，他們毁坏生产工具，并大批逃亡。因此，到后来生产逐漸萎縮，这种奴隶社会的生产关系已經成为生产力发展的障碍。到了春秋、战国时期，奴隶社会漸漸瓦解，轉变为地主以地租形式剝削农民的封建社会的生产关系。这样一来，农民生产的东西除了一部分被地主剝削去以外，还可以留一些自己享用，因而他們的劳动兴趣一般要比奴隶高。由于生产关系的改变，社会生产力就显著提高起来。随着生产力的提高，出現了胜过原有青銅器的鉄制工具，发明了用牛拉

犁耕地，工业上又有了专門工匠，商业上已由物物交換变成用金錢做交易的媒介．这些經济上的变化也推动了各种学术向前发展．就数学方面来說，有关田地面积、仓庫容量、工程土方、商品交易、粮食分配等的計算方法，一定都产生于这时候或更早的时期．虽然沒有一本秦代以前的数学書流传下来，但在东汉初年（公元第一世紀后期）編写完成的《九章算术》中的大部分內容，无疑都是总結了秦以前的人民在生产实践中的經驗而产生的．《九章算术》中除了上述的全用已知数列式計算的方法以外，还有把未知数也列入算式中的"方程"算法，这已經越出了算术的范围，成为代数的原始形态了．方程算法和現今代数里解多元一次方程組类似，它虽然可能起源于汉代，但在世界数学史上还是最先进的．

因为在方程的算法里必須用到負数，所以《九章算术》里已經講到正負数的計算方法．在西洋数学史里面談到負数，一般都說导源于印度，其实印度在七世紀时才提出正負数的計算法則，很可能是从中国传过去的．至于在欧洲，十五世紀的数学家还不認識負数，直到十六世紀中叶，对正負数的意义也还沒有完全領会．

中国古代算書談到方程的，除《九章算术》外，較早的还有《孙子算經》（約四世紀末）和《张丘建算經》（約五世紀）．各書所用消去未知数的方法，都是所謂"直除法"，仅有刘徽在《九章算术》方程章第七題下面的注解（公元 263 年）里，补充了一个不同的解法，这个解法和現今代数里經过互乘的"加減消元法"完全一样①．这里先把正負数的計算作一簡略記述后，再

分别举例介紹方程的两种解法.

二

正負数的計算,最早見于«九章算术»的方程章第三題中.这里面只举出正負数的加减而沒有提到乘除.«九章算术»所載的"正負术",只有三十七个字,不大容易看得懂.現在先把它照抄下来,再逐句加以解释.

同名相除,异名相益,正无入負之,負无入正之.其异名相除,同名相益,正无入正之,負无入負之.

細考术文的意义,前面一半显然是正負数的减法."同名相除"就是"求同号二数的差,应該把絕对值相减",所得結果的号遇順减时仍取原号,逆减时就反号,这在原文里沒有明白指出."异名相益"就是"求异号二数的差,应該把絕对值相加",所得結果的号和被减数相同,这在刘徽注里有說明."正无入負之"就是"被减数是 0,减数是正,那末差是負"."負无入正之"就是"被减数是 0,减数是負,那末差是正".

术文的后半段是正負数的加法."异名相除"的意义是"求异号二数的和,把絕对值相减",用絕对值大者的号."同名相益"是"求同号二数的和,把絕对值相加",仍用原号."正无入正之,負无入負之"是"被加数为 0,加数为正时和也是正,加

① 从現传的"微波榭"刊本«孙子算經»里,我們看到卷下的第 28 題是一个方程問題,它的解法和刘徽在«九章算术»方程章第七題下面所注的一样,是互乘而不是直除.但是,根据南宋刻本«孙子算經»(孤本現存上海图書館),知道«孙子算經»原本也用直除,而現传本是經过清代戴震校訂的,他在卷下第 28 題的解法中加了二十三个字,于是就把原来的直除相消改作互乘相消了.

数为負时和也是負”.

从上面的解释看来，古时正負数的計算，和現今代数里的方法沒有什么两样.

东汉末年，刘洪在《乾象历》(178年)的計算中也应用了正負数. 刘洪虽較刘徽略早，但是已在《九章算术》成書之后，他的算法可能是以《九章算术》为根据的. 刘洪所用的正負数計算法則是：

强正弱負，强弱相丼，同名相从，异名相消；其相减也，同名相消，异名相从，无对互之.

这里所謂“强”应該是指“多一些”的数，就是正数；“弱”是指“欠一些”的数，就是負数. 又“相从”就是相加，“相消”就是相减，“无对互之”就是“正无入負之，負无入正之”. 可見刘洪的法則只是先提加法，后提减法，其余和《九章算术》一样.

在元代朱世杰的《算学启蒙》(1299年)开首的“总括”中，載“明正負术”八句，和《九章算术》的术文相仿，只是把“益”字改成“加”字、“除”字改成“减”字，更容易明白一些.《算学启蒙》总括的“明乘除段”中，又有“同名相乘为正，异名相乘为負”二句，这是古書中正負数乘算法則的最早記录. 关于正負数除法，朱世杰書中仍然沒有把法則明白写出，但是在計算中曾經用到. 例如在該書最后一門“开方释鎖”的第十二題中有 $(+3)\div(+4)=+0.75$；第十六題中有 $(-8)\div(+8)=-1$. 由于正負数的計算是因解方程上的需要而产生的，而解方程时很少用到除法(遇到以某数除方程的一边时，常換作以这数乘方程的另一边，这和現今的去分母法类似)，丼且除法原是

乘法的还原，計算的法則和乘法一样，古書里沒有把这个法則明白記載，大概就是由于这个緣故．

三

在中国古代的方程算法中，所列的方程不象現今代数里那样用字母代替未知数，而是記出每一未知項的系数于一定地位，和代数里的“分离系数法”一样．解方程所用的直除法，是从一个方程累减（或累加）另一个方程，用来消去一部分未知数，和現今的加减消元法略有不同．下面举两个例題，把古代的筹算式和代数的新記法并举，讀者对照一下就可以明了．

【例一】 今有上禾（稻棵）3秉（一秉卽一束），中禾2秉，下禾1秉，共有实（禾的果实，即稻谷）39斗．上禾2秉，中禾3秉，下禾1秉，共有实34斗．上禾1秉，中禾2秉，下禾3秉，共有实26斗．問上中下禾各一秉有实多少？答：上禾1秉有实 $9\frac{1}{4}$ 斗，中禾1秉有实 $4\frac{1}{4}$ 斗，下禾1秉有实 $2\frac{3}{4}$ 斗．（題見《九章算术》）

列上禾3秉，中禾2秉，下禾1秉，实39斗于左行．同法列得中行和右行，如（A）式（古法自右向左依次列三式，現在为便利起見，把它对調一下）．

(A)

	左行	中行	右行
上禾秉数	𝍢	𝍡	𝍠
中禾秉数	𝍡	𝍢	𝍡
下禾秉数	𝍠	𝍠	𝍢
共实斗数	𝍫𝍨	𝍫𝍣	𝍪𝍥

以左行上禾遍乘中行，如（B）式．

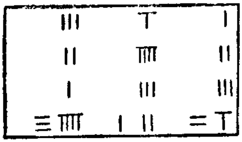
設上禾1秉的实是 x 斗，中禾1秉的实是 y 斗，下禾1秉的实是 z 斗，那末依題意可列三元一次方程組如下：

(A)

$$\begin{cases} 3x+2y+\ z=39, & \cdots\cdots\cdots\cdots(A_1) \\ 2x+3y+\ z=34, & \cdots\cdots\cdots\cdots(A_2) \\ x+2y+3z=26. & \cdots\cdots\cdots\cdots(A_3) \end{cases}$$

以（A_1）式首項的系数3乘（A_2）式，得

(B)



左行 中行 右行

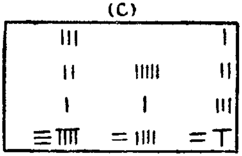
(B)

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots (B_1) \\ 6x+9y+3z=102. \cdots\cdots\cdots\cdots (B_2) \\ x+2y+3z=26. \cdots\cdots\cdots\cdots (B_3) \end{cases}$$

用直除法从中行累減左行，經二次而头位減尽，如(C)式.

从(B_2)式減(B_1)式二次，得

(C)



左行 中行 右行

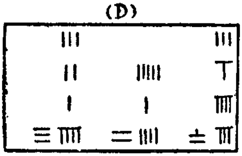
(C)

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots (C_1) \\ 5y+\ \ z=24, \cdots\cdots\cdots\cdots (C_2) \\ x+2y+3z=26. \cdots\cdots\cdots\cdots (C_3) \end{cases}$$

仿上法以左行上禾遍乘右行，如(D)式。

又以(C_1)式首項的系数 3 乘 (C_3)式，得

(D)



左行 中行 右行

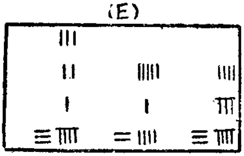
(D)

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots (D_1) \\ 5y+\ \ z=24, \cdots\cdots\cdots\cdots (D_2) \\ 3x+6y+9z=78. \cdots\cdots\cdots\cdots (D_3) \end{cases}$$

从右行減左行一次，头位已尽，如(E)式.

从(D_3)式減去(D_1)式，得

(E)



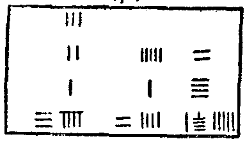
左行 中行 右行

(E)

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots (E_1) \\ 5y+\ \ z=24, \cdots\cdots\cdots\cdots (E_2) \\ 4y+8z=39. \cdots\cdots\cdots\cdots (E_3) \end{cases}$$

再以中行中禾遍乘右行，如(F)式。

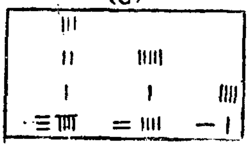
(F)



左行 中行 右行

从右行累减中行，經四次而第二位也尽，再把右行約簡，如(G)式。

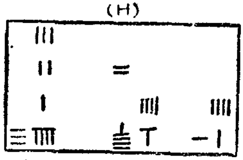
(G)



左行 中行 右行

以右行下禾遍乘中行，如(H)式。

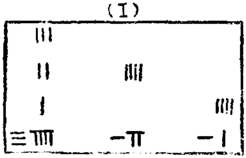
(H)



左行 中行 右行

从中行减右行一次，第三位已尽，以(G)式中行中禾来除它，如(I)式。

(I)



左行 中行 右行

再以(E_2)式首項的系数 5 乘(E_3)式，得

(F)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots(F_1) \\ 5y+z=24, \cdots\cdots\cdots\cdots(F_2) \\ 20y+40z=195. \cdots\cdots\cdots\cdots(F_3) \end{cases}$$

从(F_3)式减(F_2)式四次，再以 9 除所余的式，得

(G)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots(G_1) \\ 5y+z=24, \cdots\cdots\cdots\cdots(G_2) \\ 4z=11. \cdots\cdots\cdots\cdots(G_3) \end{cases}$$

以(G_3)式首項的系数 4 乘(G_2)式，得

(H)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots(H_1) \\ 20y+4z=96, \cdots\cdots\cdots\cdots(H_2) \\ 4z=11, \cdots\cdots\cdots\cdots(H_3) \end{cases}$$

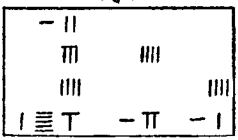
从(H_2)式减(H_3)式，再以(G_2)式首項的系数 5 除，得

(I)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \cdots\cdots\cdots\cdots(I_1) \\ 4y=17, \cdots\cdots\cdots\cdots(I_2) \\ 4z=11. \cdots\cdots\cdots\cdots(I_3) \end{cases}$$

以右行下禾遍乘左行，如(J)式。

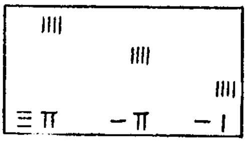
(J)



左行　中行　右行

从左行减右行一次，又累减中行二次，第二、三两位都尽，以(I)式左行上禾除之，如(K)式。

(K)



左行　中行　右行

三行各以上数为除数，下数做被除数，除得商数就是上中下禾各一秉的斗数。

以(I_3)式首项的系数 4 乘(I_1)式，得

(J)

$$\begin{cases} 12x+8y+4z=156, & \cdots\cdots(J_1) \\ 4y=17, & \cdots\cdots(J_2) \\ 4z=11. & \cdots\cdots(J_3) \end{cases}$$

从(J_1)式减(J_2)式二次，再减(J_3)式，再以(I_1)式首项的系数 3 除，得

(K)

$$\begin{cases} 4x=37, & \cdots\cdots(K_1) \\ 4y=17, & \cdots\cdots(K_2) \\ 4z=11. & \cdots\cdots(K_3) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=9\frac{1}{4}, \\ y=4\frac{1}{4}, \\ z=2\frac{3}{4}. \end{cases}$$

从上举的解法，可見古时的方程算法很是别致，虽較新法略繁，但步驟非常整齐，在使用筹算时可說是很便利的。

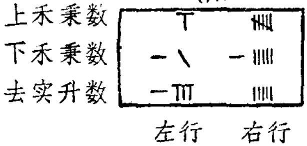
【例二】 今有上禾 6 秉的实，去掉 1 斗 8 升，等于下禾 10 秉的实。下禾 15 秉的实，去掉 5 升，等于上禾 5 秉的实。問上下禾各 1 秉有实多少？答：上禾 1 秉有实 8 升，下禾 1 秉有实 3 升。(題見«九章算术»)

列上禾 6 秉正，下禾 10 秉負，实 18升正于左行；又列上禾 5 秉負，下禾 15 秉正，实 5 升正于右行，如 (A) 式 (負数的筹式，«九章算术» 用颜色分別，現在为便利計，仿宋代的方法在末位加一斜划)。

設上禾 1 秉的实是 x 升，下禾 1 秉的实是 y 升，那末依題意可得二元一次方程組如下：

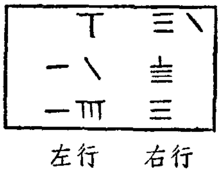
$$\begin{cases} 6x-18=10y, \\ 15y-5=5x. \end{cases}$$

(A)



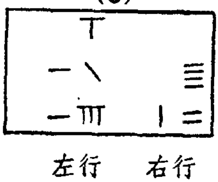
以左行上禾遍乘右行，如(*B*)式。

(B)



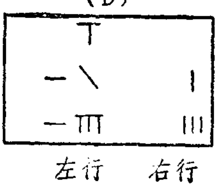
从右行累加左行，經五次而头位尽，如(*C*)式。

(C)



右行上数做除数，下数做被除数，除得商数是下禾1乘的实，如(*D*)式。

(D)



移項，整理，得

(*A*)

$$\begin{cases} 6x-10y=18, & \cdots\cdots (A_1) \\ -5x+15y=5. & \cdots\cdots (A_2) \end{cases}$$

以(A_1)式首项的系数6乘(A_2)式，得

(*B*)

$$\begin{cases} 6x-10y=18, & \cdots\cdots (B_1) \\ -30x+90y=30. & \cdots\cdots (B_2) \end{cases}$$

(B_2)式加上(B_1)式五次，得

(*C*)

$$\begin{cases} 6x-10y=18, & \cdots\cdots (C_1) \\ 40y=120. & \cdots\cdots (C_2) \end{cases}$$

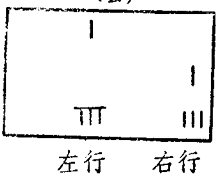
去掉(C_2)式左边的系数，得

(*D*)

$$\begin{cases} 6x-10y=18, & \cdots\cdots (D_1) \\ y=3. & \cdots\cdots (D_2) \end{cases}$$

又以所得数乘左行下禾，从左行末位减，再以头位除，得上禾1秉的实，如(E)式.

(E)



以(D_2)式右边的3乘(D_1)式的第二项系数，从右边18减，再以第一项系数6除，得

(E)

$$\begin{cases} x=8, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E_1) \\ y=3. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E_2) \end{cases}$$

在上举的解法中，有$(-30)+(+6)=-24$，$(+90)+(-10)=+80$，$(+18)-(-30)=+48$ …… 的正負数加减法，又有$(-5)\times(+6)=-30$的乘法.

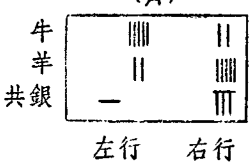
四

刘徽在《九章算术》方程章第七题的注里所举的方程解法，和現今代数里的加減消元法完全一样. 現在用古法筹算把这个解法举示于下.

【例】 今有牛5头和羊2头，共值銀10两；牛2头和羊5头，共值銀8两. 問牛、羊每头各值銀多少？ 答：牛每头值銀$1\frac{13}{21}$两，羊每头值銀$\frac{20}{21}$两.

列牛5、羊2、銀10于左行，又列牛2、羊5、銀8于右行，如(A)式.

(A)



設牛每头值銀x两，羊每头值銀y两，那末依題意可得二元一次方程組如下：

(A)

$$\begin{cases} 5x+2y=10, \cdots\cdots\cdots\cdots (A_1) \\ 2x+5y=\ 8. \cdots\cdots\cdots\cdots (A_2) \end{cases}$$