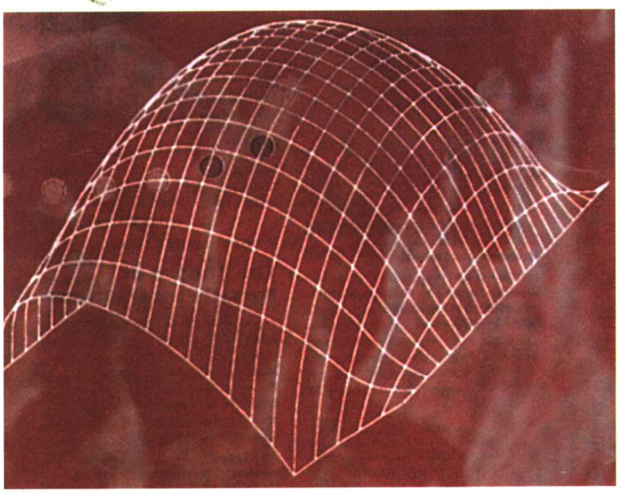
中国科学院规划教材
数学系列

南开大学数学教学丛书

微分几何

第二版

孟道骥 梁科 著



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院规划教材
南开大学数学教学丛书

微分几何

(第二版)

孟道骥　梁　科 著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

作者在长期的教学实践中编写了本书的第一版，经过几年的连续使用，在第一版的基础上，作者又修改出版了第二版．本书主要介绍了微分几何方面的基础知识、基本理论和基本方法．主要内容有：Euclid 空间的刚性运动，曲线论，曲面的局部性质，曲面论基本定理，曲面上的曲线，高维 Euclid 空间的曲面等．除第一章外其余各章均配有习题，以巩固知识并训练解题技巧与钻研数学的能力．

本书可作为大学数学各专业本科生的教学用书，也可供数学教师和数学工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

微分几何/孟道骥，梁科著．—2 版．—北京：科学出版社，2004
（中国科学院规划教材·南开大学数学教学丛书）
ISBN 7-03-013410-9

Ⅰ．微…　Ⅱ．①孟…②梁…　Ⅲ．微分几何—高等学校—教材
Ⅳ．O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 041644 号

责任编辑：林　鹏　李鹏奇/责任校对：包志虹
责任印制：安春生/封面设计：黄华斌　陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1999 年 1 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2004 年 8 月第　二　版　　印张：13
2004 年 8 月第五次印刷　　字数：228 000
印数：9 901—12 900

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

丛书第二版序

《南开大学数学教学丛书》从1998年面世以来，已经印刷了好几次，并均已售完．同时还有读者希望买到这些书．这期间正如我们的初衷一样，得到了许多老师、同学、同行的帮助．现在，我们的教学与当初已不尽相同，为了继续得到大家的帮助，与大家继续交流，对这些书作一些修改是很有必要的．因此科学出版社提出再版这套丛书是很适时的，是对我们的巨大支持，我们借此机会表示感谢．

2002年，第24届国际数学家大会于8月20日至28日在中国北京举行并取得圆满成功．这是中国第一次主办国际数学家大会，也是发展中国家第一次主办这一大会．在大会期间，陈省身先生曾说，中国已经成为“数学大国”．

陈省身先生还说：“21世纪数学的发展是很难预测的，它一定会超越20世纪，开辟出一片崭新的天地，希望中国未来的数学家能够成为开辟这片新天地的先锋．”

在数学已成为高科技的基础和现代文明标志之一的今天，我们不能满足于“中国数学的平等和独立”，即数学大国的地位，而是要成为开辟数学新天地的先锋，即要争取“数学强国”的地位．

我们清楚地知道，“数学大国”并不等于“数学强国”．为使今天的“数学大国”成为明天、后天以至永远的“数学强国”，当然要从多方面努力，数学教育是不可或缺的重要方面．我们既需要高质量的、稳定的数学教育，又需要不断推陈出新、不断发展的数学教育．这是一个艰巨的任务，这个任务历史地落在一代又一代年轻人的肩上．

在中国的数学教育上，也就是在争取成为“数学强国”的过程中，我们如果能够“润物”，虽然“无声”也将心满意足．因此我们既高兴看到《南开大学数学教学丛书》今天能够生存和发展，又更高兴地期待明天它被更新、更好的教材取而代之．

我们也相信经过大家不懈地努力，中国未来的数学家一定会是开辟数学新天地的先锋．

编著者

2004年3月于南开大学

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”①．平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生．这批人不在多，而在精，要层次高．也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强．

20 世纪 80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议．建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班．经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班．这些做法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广．1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”．其后南开大学数学专业成为基地之一．从 1986 年到现在的 10 余年中，南开大学数学专业是有成绩的．例如他们 4 次参加全国大学生数学竞赛获 3 次团体第一，1 次团体第三．在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖．毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩．

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的．如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等．有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新．

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，编著者们长期在南开大学数学专业任教，不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材．所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的心血．这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力．

---

① 陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话．

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版. 这对编著者是件大好事. 编著者虽然尽了很大努力,但一则由于编著者的水平所限,二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中,因此这套教材中缺欠和不足肯定存在. 我们诚挚希望各位同行不吝指正,从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长,进而扬长避短,改进我们的教学. 同时通过这套教材也可向同行们介绍南开大学的教学经验以供他们参考,或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开大学的前辈、同行们,同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助. 办好南开大学的数学专业,办好所有学校的数学专业,把中国数学搞上去,使中国成为数学大国是我们的共同愿望,这个愿望一定能实现!

编著者

1998 年 6 月于南开大学

目　　录

第一章 Euclid 空间与刚性运动

1.1 绪 论

几何学是一门有悠久历史的科学,它在数学、自然科学及思维科学中都起了重要的作用,而且仍将起重要的作用.

几何学的发展,大致分为这样几个阶段:1)Euclid 几何. 主要是研究在刚体运动下不变的图形,如在什么条件下两个三角形全等、两个圆全等等问题. 2)解析几何. 在 Descartes 建立了解析几何之后,我们有了一种手段,可以将图形数量化,可以以代数学作为研究几何学的强有力的工具,而且能够研究比直线、平面等更复杂的图形,如二次曲线与二次曲面,以及它们的不变量. 不变量不依赖于坐标系的选取,从而与图形的位置无关. 这些不变量就可以区分图形的形状. 3)微分几何. 以微积分为工具来研究一般的曲线和曲面的形状,找出决定曲线、曲面形状的不变量系统. 微分几何学几乎是与微积分同时诞生的. Newton 和 Leibniz 建立微积分的目的之一就是为解决一些几何问题,如曲线所围的面积,曲线的切线、长度等. 微积分在几何学中的应用后来发展为一门独立的学科——微分几何,或古典微分几何,包括曲线论与曲面论两大部分. 4)Riemann 几何. 5)大范围微分几何等. 它们已经大大超出了古典微分几何所局限的二维、三维空间的情形,而且在方法上也发展了活动标架法、外微分式等一系列的重要工具. 几何学中一个重要的观点是认为几何学的主要问题是研究变换群的不变量. 在 20 世纪三四十年代,Lie 群与微分几何巧妙地结合起来了. 至今,这仍然是几何学中的热点之一.

我们的课程主要是古典微分几何,但我们将尽可能地用现代微分几何的方法、观点来处理古典理论.

1.2 运动(motion)

以 E 表示三维 Euclid 空间,即

$$E = \{X^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbf{R}\} \quad (X^{\mathrm{T}} \text{ 表示 } X \text{ 的转置}).$$

E 中两点 (x_1, x_2, x_3) 与 (y_1, y_2, y_3) 之间的距离 d 定义为

$$d = \Big(\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

于是有 E 中的变换 $X\to X'$,定义为

$$X' = AX + B. \tag{1.2.1}$$

注 1.2.1　此变换也可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}X'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix}. \tag{1.2.1$'$}$$

命题 1.2.1　变换(1.2.1)保持两点间距离不变的充要条件是 A 为正交矩阵,即

$$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I. \tag{1.2.2}$$

证　略.

满足(1.2.2)的变换(1.2.1)称为 E 的**运动**.

命题 1.2.2　E 中所有运动构成一个群,称为 E 的**运动群**.

证　事实上,有

$$\begin{pmatrix}I&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}A_1&B_1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2&B_2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_2&A_1B_2+B_1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}A&B\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}B\\0&1\end{pmatrix}.$$

故命题 1.2.2 成立. 证毕.

由(1.2.2)知

$$\det A = \pm 1.$$

若 $\det A=1$,此运动称为**固有的**(propose).

若 $\det A=-1$,此运动称为**非固有的**(impropose).

例如,镜面反射: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 是非固有运动.

$A=I$,此运动称为**平移**.

$B=0$,此运动称为**正交变换**. 固有的正交变换也叫作**转动**.

命题 1.2.3 1) 所有固有运动为运动群的正规子群(指数为 2);

2) 所有平移为正规子群;

3) 所有正交变换为子群;

4) 所有转动为子群,为保持原点不变的固有运动构成的群.

证 略.

Euclid 几何是研究 E 中在运动群下不变的性质.

1.3 向量(vector)

首先,我们给 Euclid 空间中的向量以确切的定义.

在 E 中的有序点对集 $\{(P,Q)\mid P,Q\in E\}=E\times E$ 中建立一个等价关系~如下:称

$$(P,Q)\sim(P',Q'),$$

如果存在平移 τ,使得

$$\tau(P)=P',\ \tau(Q)=Q'.$$

容易证明:"~"的确是一个等价关系.

设 P,Q,P',Q' 的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,$(x_1',x_2',x_3')^{\mathrm{T}}$,$(y_1',y_2',y_3')^{\mathrm{T}}$. 则

$$(P,Q)\sim(P',Q')\ \text{iff}\ y_i'-x_i'=y_i-x_i,\ 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{1.3.1}$$

定义 1.3.1 上述关系的一个等价类称为一个**向量**. (P,Q) 的等价类,即从 P 到 Q 的向量记为 $V=\overrightarrow{PQ}$,称

$$v_i=y_i-x_i,\quad i=1,2,3 \tag{1.3.2}$$

为它的**分量**,记为

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}.$$

由(1.3.1)式知,一个向量由其分量完全决定. 从几何上说,$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P'Q'}$ 当且仅当线段

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{P'Q'}|,$$

且

$$\overrightarrow{PQ}\ /\!/\ \overrightarrow{P'Q'}\quad \text{(同方向的意义下)}.$$

设 $P\in E$,称 $\overrightarrow{OP}$ 为 P 的**位置向量**.

对向量可定义加法,向量与数(标量)的乘法,而构成一个线性空间.

对于一个运动(1.2.1),对应的向量的变换为 $V \to V' = AV$,即

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

V 的**长度**

$$|V| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{1.3.3}$$

在运动下不变.

两个向量的内积(数量积,点积)

$$\langle V, W \rangle = V \cdot W = W \cdot V = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i \tag{1.3.4}$$

也在运动下不变,且有 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$|V| \cdot |W| \geqslant V \cdot W. \tag{1.3.5}$$

V 与 W 之间的**夹角** θ,由下式定义:

$$\cos\theta = \frac{V \cdot W}{|V| \cdot |W|}. \tag{1.3.6}$$

V 与 W **正交**,若 $W \cdot V = 0$.

行列式　$U = (u_i)$, $V = (v_i)$, $W = (w_i)$的行列式为

$$(U, V, W) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

向量积(外积)　V, W 的向量积 $V \times W$ 由下式定义:

$$(V, W, X) = (V \times W) \cdot X, \quad \forall X.$$

若 $V = (v_i)$, $W = (w_i)$,则

$$\begin{aligned} V \times W &= \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \end{aligned}$$

显然

$$V \times W = - W \times V,$$

$$(V_1 + V_2) \times W = V_1 \times W + V_2 \times W,$$

$$(\lambda V) \times W = \lambda (V \times W),\ \lambda \text{ 标量},$$

$$(V \times W) \perp V,\ (V \times W) \perp W,$$

$$(U, V, W) = 0 \quad 当且仅当 \quad U, V, W 线性相关.$$

$(U, V, W) > 0$,称 U, V, W 为右手标架;$(U, V, W) < 0$,称 U, V, W 为左手标架.

第二章　曲　线　论

本章讲述曲线的基本理论,将引入曲线的重要几何不变量——曲率与挠率,并以此来刻画曲线. 此外,还将论述平面曲线与空间曲线的一些整体性质.

2.1　参数曲线

下面我们叙述一些概念:

Ⅰ. 设 $I=(a,b)$是 $\mathbf{R}$ 的一个区间,由 I 到 $\mathbf{R}^3=\mathbf{E}$ 中的 $C^k(k\geqslant 3)$映射 P

$$P(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad a<t<b,$$

称为 $\mathbf{R}^3$ 的一条**参数曲线**,t 称为曲线 P 的参数. 又若

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}(t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\neq 0, \quad \forall\, t\in(a,b),$$

则称曲线 $P(t)$是**正则的**(immersed, regular).

这里,所谓 C^k 映射,是指 $x(t)$, $y(t)$与 $z(t)$均有 k 阶以上的连续导数.

我们将曲线视为映射或向量值的函数,而不是看成像集(像集称为几何曲线). 这样做,就可以将曲线视为一个质点在空间中的运动,而不同的运动可以留下相同的轨迹.

例 2.1.1　$P,Q:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$:

$$P(t)=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q(t)=\begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 中两条不同的参数曲线. $P(t)$是正则的,而 $Q(t)$是非正则的,因为 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(0)=0$.

Ⅱ. 设 $P:I\to\mathbf{R}^3$ 是一条参数曲线. 我们称

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_0)\end{pmatrix}=\dot{P}(t_0)$$

为 $P(t)$在 $P(t_0)$处的切向量. 而映射 $t\to\dot{P}(t)$为参数曲线 $P(t)$的**切向量场**.

如果我们将 $P(t)$考虑为质点的运动,则相应的名称改为速度向量,速度向量场.

通常,设 $P:I\to\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$为一参数曲线,$X:I\to\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$是一可微映射(即一可微的向量值函数),则称 X 是沿曲线 P 的**向量场**(图 2.1.1).

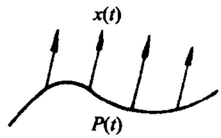


图 2.1.1

Ⅲ. 设 $P:I\to\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$,$\widetilde{P}:\tilde{I}\to\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$是两条参数曲线. 若一微分同胚(diffeomorphism)$\phi:\tilde{I}\to I$ 使得 $\widetilde{P}=P\circ\phi$,则称 ϕ 为 P 到 $\widetilde{P}$ 的**参数变换或变量改变**(parameter transformation or change of variables). 如果 $\phi'>0$,则称 ϕ 保持定向.

$\phi:\tilde{I}\to I$ 称为微分同胚,如果 ϕ 可逆,且 ϕ,ϕ^{-1}均是可微映射.

从这里可以看出 $\widetilde{P}(\tilde{I})$与 $P(I)$作为 $\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$的子集是相同的. 从几何上来看应是一条曲线. 因而,曲线的定义可以采用下面严格的方式:参数变换导致参数曲线间的一个等价关系. 对于此等价关系的等价类称为一条(正则)**(非参数)曲线**.

例 2.1.2 对 $v,v_0\in\mathbf{R}^3(\mathbf{R}^n)$,设

$$P(t)=tv+v_0,$$

则 $P(t)$正则当且仅当 $v\neq0$. 这是一条直线.

例 2.1.3 圆(circle)与螺旋线(helix)

$$P(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\quad a,b,t\in\mathbf{R}.$$

其中 $a^2+b^2\neq0$. $P(t)$正则.

$b=0$,半径 a 的圆.

$a=0$,直线.

例 2.1.4 曲线

$$P(t)=(t^2,\ t^3)$$

满足 $\dot{P}(0)=0$,所以是非正则的,它在 $t=0$ 处有一个尖点(cusp)(见图 2.1.2).

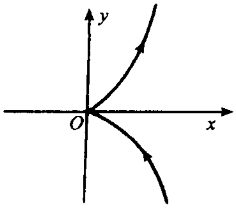


图 2.1.2

从例 2.1.1 看到，$\mathbf{R}^3$ 中同一点集可以表示为不同的参数曲线，有的可以是正则的，有的不一定是正则的．因而有的数学家给正则曲线另一个定义．

定义 2.1.1 $\mathbf{R}^3$ 中点集 C 称为正则曲线，如果它至少有一个参数方程表示

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \quad t \in (a,b), \\ z = h(t), \end{cases}$$

并且具有下列性质：

(1) $f,g,h \in C^k(a,b)$，其中 $k \geqslant 3$；

(2) $P:(a,b) \to C, t \mapsto (f(t),g(t),h(t))$ 是双方单值一一的；

(3) 参数方程对 $\forall t \in (a,b)$ 正则．

注 2.1.1 从正则参数曲线的定义，不难看出即使最简单的曲线单位圆 S^1 也不是正则参数曲线．事实上，$\mathbf{R}^1$ 上的开区间是非紧集，而 S^1 是紧的，因此它们不可能微分同胚．为了克服定义 2.1.1 的这个不足，我们给出曲线一个更一般的定义．

定义 2.1.2 $\mathbf{R}^3$ 中点集 C 称为正则曲线，如果满足下列条件：

(1) 存在 $\mathbf{R}^3$ 中一族正则参数曲线 $\{C_i\}$，使

$$C = \bigcup C_i;$$

(2) 设 $\alpha_i(t^i)$ 与 $\alpha_j(t^j)$ 分别为 C_i 与 C_j 的正则参数方程．如果 $C_i \cap C_j \neq \varnothing$，则 $\alpha_i(t^i)$ 与 $\alpha_j(t^j)$ 限制在 $C_i \cap C_j$ 上相差一个正则参数变换．

虽然定义 2.1.2 给出了一般正则曲线的定义，但本书重点研究局部性质，因此除特别声明外，本书的正则曲线特指定义 2.1.1 的曲线．

2.2 弧长参数

设曲线 C 的一个正则参数方程是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}, \; t \in (a,b),$$

$P_0, P_1 \in C, P_0 = P(t_0),\ P_1 = P(t_1)$，其中 $t_0 < t_1$．于是 P_0 至 P_1 间的弧长是

$$l(P_0,P_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2+h'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

定义 2.2.1 s 是 C 的一个参数. 若 $\forall P_0,P_1\in C$ 有
$$l(P_0,P_1)=|s_1-s_0|,$$
$P_0=P(s_0)$, $P_1=P(s_1)$, 则称 s 是 C 的一个弧长参数.

引理 2.2.1 C 的参数 s 是弧长参数,当且仅当 s 是正则参数且 $\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right|=1$.

证 若 s 是弧长参数,t 为正则参数,有
$$|s_1-s_0|=l(P_0,P_1)=\left|\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\right|.$$
适当选取参数 t 或 $-t$,则有
$$s-s_0=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t.$$
故$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$存在,且
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|\neq 0.$$
故 s 为正则参数. 由
$$s-s_0=\int_{s_0}^{s}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s,$$
对 s 求导,则有
$$\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right|=1.$$

反之,s 为正则参数,且
$$\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right|=1,$$
则
$$l(P_0,P_1)=\left|\int_{s_0}^{s_1}\left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s\right|=\left|\int_{s_0}^{s_1}\mathrm{d}s\right|=|s_1-s_0|,$$
故 s 为弧长参数.

引理 2.2.2 C 为正则曲线,则弧长参数存在.

证 取 t 为任意正则参数. $P_0=P(t_0)$, $P\in C$. 定义