華夏英才基金學術文庫

何育赞 袁文俊 李叶舟 著

潘勒韦方程解析理论讲义

科学出版社
www.sciencep.com

華夏英才基金學術文庫

潘勒韦方程解析理论讲义

何育赞　袁文俊　李叶舟 著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统介绍 Painlevé 方程解析理论的基本内容和最新进展，包括 Painlevé 方程解的局部的和大范围的一般性质与深入结果：解的展开和渐近性，解的极点和残数，解的表示，有理函数解和 Bäcklund 变换，解的大范围亚纯性、增长性和值分布性质，以及 Painlevé 方程与某些数学物理方程的联系.

本书适合大学数学系和物理系的高年级学生、研究生参考，也适合数学和科技工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

潘勒韦方程解析理论讲义/何育赞，袁文俊，李叶舟著. —北京：科学出版社，2005

(华夏英才基金学术文库)

ISBN 7-03-014596-8

Ⅰ.潘… Ⅱ.①何… ②袁… ③李… Ⅲ.常微分方程-解析理论
Ⅳ.O175.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 133159 号

责任编辑：吕 虹 田士勇／责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005年3月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—3 000 字数：287 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

潘勒韦 (Painlevé) 方程是下列最重要的六类二阶代数微分方程:

$(P_1)\quad w'' = 6w^2 + z$

$(P_2)\quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha$

$(P_3)\quad w'' = \dfrac{(w')^2}{w} - \dfrac{1}{z}w' + \dfrac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \dfrac{\delta}{w}$

$(P_4)\quad w'' = \dfrac{(w')^2}{2w} + \dfrac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \dfrac{\beta}{w}$

$$(P_5)\quad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z^2}(w-1)^2\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}$$

$$(P_6)\quad w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)(w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right)$$

其中 α, β, γ 和 δ 是任意复常数. 这些方程是由 P. Painlevé[131~134]、B. Gambier[35~37] 和 R. Fuchs[32] 研究 E. Picard[135] 所提的下述问题时发现的: 设 $R(z, w, w')$ 关于 w, w' 是有理函数, 对于 z 是解析函数, 寻找微分方程

$$w'' = R(z; w, w')$$

的所有类型, 使得它们的通解除了极点之外其他奇点仅依赖于所论方程而不依赖于积分常数. 上述性质又称为 Painlevé 性质, 具有此性质的方程称为 P 型方程; 但只有六类方程产生新的超越函数, 并称为 Painlevé 超越函数. 虽然 Painlevé 是从纯数学的考虑发现这些方程的, 但如今已经知道它们与许多数学物理方程密切相关. 这些联系的发现以及 Painlevé 方程理论本身的问题引起了广泛的兴趣, 使得 Painlevé 方程理论及其应用的研究成为国际上相当活跃的领域之一, 并且取得了一系列重要的进展. M. J. Ablowitz 、 A. Ramani 和 H. Segur[2~5] 以及 P. A. Clarkson 等 [17~18] 在偏微分方程的 Painlevé 理论和完全可积性方面获得丰富的成果, 还引入了对高阶 Painlevé 方程的研究. 已知 Painlevé 方程的解一般地不能由线性微分方程的解或椭圆函数表示, 但对特殊的参数值, 相应的方程之解能表为经典的特殊函数、代数函数或有理函数, 特别是 Painlevé 方程具有有理函数解

的参数定则现今已完满地得到解决，并且特殊参数的解族之间可由 Bäcklund 变换建立递推关系. V. I. Gromak 等 [57~68] 对 Painlevé 方程解的表示、 Bäcklund 变换和一般解析性质做了一系列的工作. 近年来， Painlevé 方程解析理论中最为显著的进展是 A.Hinkkanen 和 I.Laine[74~77] 、 N.Steinmetz[153] 对 Painlevé 方程解的大范围亚纯性的严格而完整的证明，以及 S.Shimomura[143~149] 、 Steinmetz[154] 关于 Painlevé 超越函数的增长性估计和值分布性质的深入结果. 我们从 20 世纪 90 年代初开始对 Painlevé 方程解析理论进行调查研究，并与芬兰、白俄罗斯的同行开展交流和合作，在 Painlevé 方程有理解的参数定则 [179] 和高阶 Painlevé 方程解的值分布 [71,104] 方面得到若干有意义的成果. 本书主要介绍 Painlevé 方程解析理论的基本内容和近年来的一些新结果. 全书共七章，第一章关于 Painlevé 方程解的亚纯性，详细地介绍 Hinkkanen 和 Laine、 Steinmetz 关于解的大范围亚纯性的证明. 第二章介绍 Painlevé 方程解的一般性质与表示. 第三章介绍不同参数下 Painlevé 方程的解关系以及 Bäcklund 变换. 第四章介绍解的渐近性、残数值和相应的极点个数估计. 第五章详细讨论存在有理函数解的参数定则，其中包括袁文俊，李叶舟关于 (P_6) 有理函数解的结果 [179]. 第六章介绍 Painlevé 方程解的增长级和值分布方面的新结果，同时包括何育赞，李叶舟关于高阶方程解的值分布结果 [71,104]. 最后，第七章介绍了 Painlevé 方程和若干数学物理方程的关系.

本书第一、六章主要由何育赞撰写，第四、五、七章由袁文俊执笔，李叶舟编写了第二、三章以及第一、六章的部分内容.

我们对华夏英才基金对本书出版的资助、对国家自然科学基金委员会、广东省自然科学基金委员会、广州市教育局和广州大学对我们的研究项目的支持表示衷心的感谢.

作　者

2004 年 2 月于北京

目　　录

前　言

第一章　Painlevé 方程解的亚纯性 …… 1

§1.1　预备知识 …… 1

1.1.1　Cauchy 存在惟一性定理 …… 1

1.1.2　奇点和 Painlevé 性质 …… 3

1.1.3　具有 Painlevé 性质的一阶代数微分方程 …… 4

§1.2　Painlevé 方程解的局部性质 …… 9

§1.3　方程(P_1), (P_2)和方程(P_4)解的大范围亚纯性 …… 16

§1.4　方程(P_3)和方程(P_5)解的大范围亚纯性 …… 31

§1.5　方程(P_6)解的大范围亚纯性 …… 43

第二章　Painlevé 方程解的一般性质与表示 …… 47

§2.1　方程(P_1)的解作为含任意常数函数的一般表示 …… 47

§2.2　方程(P_1)解的一般表示 …… 48

§2.3　方程(P_1)解的特殊展式 …… 51

§2.4　方程(P_2)解的一般表示 …… 52

§2.5　方程(P_4)解的一般表示 …… 56

§2.6　方程(P_3)解的一般性质与表示 …… 57

§2.7　方程(P_3)在固定奇点处的特解 …… 62

§2.8　方程(P_5)解的一般性质 …… 65

§2.9　方程(P_6)解的一般性质 …… 70

第三章　Painlevé 方程解之间的联系 …… 76

§3.1　方程(P_2)解之间的联系 …… 76

§3.2　方程(P_4)在指定参数α, β下解之间的关系 …… 78

§3.3　方程(P_3)与方程(P_5)解之间的关系 …… 79

§3.4 方程(P_6)的等价方程组 …… 85
§3.5 Hamilton 多项式, Painlevé 方程之间的关系 …… 90
§3.6 方程(P_6)在不同参数值下解之间的联系 …… 91
第四章 Painlevé 方程解的特殊性质 …… 96
§4.1 方程(P_1)解的渐近性 …… 96
§4.2 方程(P_2)解族的渐近性 …… 98
§4.3 方程(P_2)解的极点个数和残数 …… 100
§4.4 方程(P_3)解的极点个数和残数 …… 101
§4.5 方程(P_4)解的极点和它们的残数 …… 102
§4.6 Painlevé 方程的单参数解 …… 104
§4.7 方程(P_6)包含的一阶二次的特殊微分方程 …… 118
第五章 Painlevé 方程的有理解 …… 122
§5.1 方程(P_2)的有理解 …… 122
§5.2 方程(P_3)的有理解 …… 125
§5.3 方程(P_4)的有理解 …… 129
§5.4 方程(P_5)的有理解 …… 133
§5.5 方程(P_6)的有理解 …… 134
第六章 Painlevé 方程解的增长性与值分布性质 …… 154
§6.1 准备知识 …… 154
6.1.1 Wiman-Valiron 理论概要 …… 154
6.1.2 Nevanlinna 理论概要 …… 156
§6.2 方程(P_1), (P_2)和方程(P_4)解的增长性 …… 161
§6.3 方程(P_3)和方程(P_5)解的增长性 …… 172
§6.4 方程(P_1), (P_2)和方程(P_4)解的值分布 …… 176
§6.5 方程(P_3)和方程(P_5)解的值分布 …… 191
§6.6 高阶 Painlevé 方程解的值分布 …… 198
6.6.1 第一类高阶 Painlevé 方程(${}_{2n}P_1$)亚纯解的值分布 …… 198

6.6.2 第二类高阶 Painlevé 方程($_nP_2$)亚纯解的值分布 ········· 205
第七章 Painlevé 方程与数理方程 ········· 213
§7.1 Bessel 方程与方程(P_1), (P_2)的解之间的关系 ········· 213
§7.2 KdV 方程和方程(P_2)的解之间的联系 ········· 214
§7.3 方程(P_4)与某些数理方程 ········· 217
§7.4 正弦戈登方程和方程(P_3) ········· 219
§7.5 方程(P_5)与特殊的数理方程 ········· 221
参考文献 ········· 223
人名索引 ········· 233
名词索引 ········· 234

第一章　Painlevé 方程解的亚纯性

设 S_j 是方程 $(P_j)(j=1,2,\cdots,6)$ 的固定奇点集. 由方程知道 $S_1=S_2=S_4=\{\infty\}$, $S_3=S_5=\{0,\infty\}$, $S_6=\{0,1,\infty\}$. 设 $\hat{C}$ 为扩充复平面，于是 $\hat{C}\setminus S_j$ 的万有覆盖曲面共形等价于 U_j, 其中 $U_j=C, j=1,2,\cdots,5$,C 为复平面， $U_6=D$, 即单位圆. 另一方面，根据 Painlavé 性质，方程 (P_j) 应是其解除了流动极点而无其他奇点的二阶代数微分方程，因此普遍接受的性质是方程 (P_j) 的解应是 U_j 上的单值亚纯函数. 关于方程 $(P_1),(P_2)$ 解的亚纯性的证明在许多数学文献中可以找到. 如 E. Ince[78]、W. Golubew[44] 和 E. Hille[73] 的书中都有，它们本质上是 Painlevé[131] 的原证，但这些证明有明显的漏洞，都不严格. 本章根据新近 A. Hinkkanen 和 I. Laine[74~77] 以及 N. Steinmets[153] 给出的方程 $(P_j), j=1,2,\cdots,6$, 解的亚纯性的严格证明. 本章开始还介绍必要的预备知识.

§1.1　预 备 知 识

1.1.1　Cauchy 存在惟一性定理

定理 1.1 (Cauchy)　设 $f(z,w)$ 在区域 $\bar{G}=\{(z,w),|z-z_0|\leqslant r,|w-w_0|\leqslant\rho\}$ 上为全纯函数，则

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dz}=f(z,w),\\ w(z_0)=w_0\end{cases}\tag{1.1.1}$$

在 $B_h(z_0)=\{z\in C,|z-z_0|<h\}$, 其中 $h=r\left(1-e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$ 内存在惟一的全纯解， $M=\max\limits_{\bar{G}}\{|f(z,w)|\}$. 即存在 $B_h(z_0)$ 内全纯函数 $w(z)$, 满足 $w(z_0)=w_0$, 当 $z\in B_h(z_0)$ 时， $(z,w(z))\in G$ 且满足 $w'(z)=f(z,w(z))$.

关于微分方程组有以下的定理：

定理 1.2 (Cauchy)　设 $f_j(z,w_1,\cdots,w_n)(j=1,2,\cdots,n)$ 在 $\bar{G}=\{(z,w_1,\cdots,w_n)\in C^{n+1},|z-z_0|\leqslant r,|w_j-w_j^0|\leqslant\rho_j(j=1,\cdots,n)\}$ 上为全纯函数，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dw_j}{dz}=f_j(z,w_1,\cdots,w_n),\\ w_j(z_0)=w_j^0,\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,n,\tag{1.1.2}$$

在 $B_h(z_0)$ 存在惟一的全纯解, $h=r(1-e^{-\frac{\rho}{(n+1)Mr}})$, 其中 $M=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{|f_j(z,w_1,\cdots,w_n)|,$

$(z, w_1, \cdots, w_n) \in \bar{G}\}$, $\rho = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\rho_j\}$.

对于一般高阶方程

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f(z, w, w', \cdots, w^{(n-1)}),$$

这与下述方程组等价

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = w_1, \\ \dfrac{dw_1}{dz} = w_2, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dw_{n-1}}{dz} = f(z, w_1, \cdots, w_{n-1}). \end{cases}$$

因而有下述定理:

定理 1.3 (Cauchy) 若方程

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f(z, w, w', \cdots, w^{(n-1)})$$

的右端 $f(z, w, w', \cdots, w^{(n-1)})$ 是其变元在点 $(z_0, w_0, w_0', \cdots, w_0^{(n-1)})$ 邻域的全纯函数, 则在 z_0 的某个邻域存在满足条件: $w(z_0) = w_0, w'(z_0) = w_0', \cdots, w^{(n-1)}(z_0) = w_0^{(n-1)}$ 的全纯解, 并且是惟一的.

以上定理是通过幂级数法或逐次逼近法得到的, 其详细证明可参阅 L. Bieberbach[10], Hille[73], Golubew[44].

由上述幂级数法和逐次逼近法求得的函数元素 $(w(z), B_h(z_0))$ 是方程 (1.1.1) 在其右端 $f(z, w)$ 为全纯的点 (z_0, w_0) 的邻域内的一个解. 我们能通过解析延拓由函数论中的恒等性定理得到 (1.1.1) 的更大范围的解. 但值得注意的是解析延拓得到的解析函数在方程 (1.1.1) 右端 $f(z, w)$ 的奇点处仍可能是解析的. 例如

$$\frac{dw}{dz} = 1 + (w - z)g(w),$$

其中 $g(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{n!}$, 它在 $|w| < 1$ 内解析, 以 $|w| = 1$ 为其自然边界. 显然全平面的解析函数 $w(z) = z$ 在 $|z| < 1$ 内满足上方程; 而当 $|z_0| > 1$ 时, $\{z_0, w(z_0)\} = \{z_0, z_0\}$ 并不是 $f(z, w) = 1 + (w - z)g(w)$ 的解析点. 但 Painlevé 曾证明, 若 z_0 是 (1.1.1) 的解 $w(z)$ 的奇点, $w_0 = \lim\limits_{z \to z_0} w(z)$, 则 (z_0, w_0) 必不是 $f(z, w)$ 的全纯点.

定理 1.4 (Painlevé) 若方程 (1.1.1) 具有初值 $w(z_1) = w_1$ 的局部解 $w(z)$ 能沿着任意连接 z_1 和 z_0 的曲线 Γ 解析延拓到 Γ 上除端点 z_0 以外的所有点, 并且 (z_0, w_0) 是 $f(z, w)$ 的解析点, 其中 $\lim\limits_{z \to z_0} w(z) = w_0$, 则 $w(z)$ 在 z_0 点解析, 并且它与始值为 $w(z_0) = w_0$ 的方程 (1.1.1) 的解在 z_0 点邻域重合.

定理的详细证明参看 Bieberbach[10] 或 Hille[73].

1.1.2 奇点和 Painlevé 性质

定义 1.1 设点 $a \in \hat{C}$. 若函数 $w(z)$ 在 a 不解析，则称 a 为 $w(z)$ 的奇点.

奇点有多种分类，如孤立奇点和非孤立奇点. 一般复变函数论中只讨论孤立奇点，而上节中函数 $w(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ 以 $|z| = 1$ 为自然边界，其上每一点都是奇点. 奇点亦可分为单值的奇点和多值的奇点，或称后者为临界奇点，前者为非临界奇点. 当自变量围绕奇点环行一周回到起点位置时，函数值不变，则称 a 为单值奇点；当围绕 a 环行一周时函数值改变，则称此奇点为临界奇点，它可以是有限多值亦可以是无限多值. 如 $w(z) = z^{\alpha}$, 若 α 为负整数，则 $z = 0$ 为单值极点； α 为正 (或负) 有理数，则 $z = 0$ 为有限多值分支点 (或分支极点); 若 α 为无理数，则 $z = 0$ 为无穷多值分支点，亦称超越奇点. 奇点还能根据自变量趋于奇点 a 时函数 $w(z)$ 趋于确定之值 (有穷或否) 或无确定之值来分类，后者称为本性奇点，前者为非本性奇点. 如 $w(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 以 $z = 0$ 为本性奇点， $w(z) = \frac{1}{z}$ 以 $z = 0$ 为非本性奇点. 这些不同的分类不是相互排斥的，一个奇点可以兼有不同类型，如 $w(z) = \exp \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, 以 $z = 0$ 为分支本性奇点.

设 $w(z)$ 是次之不可约代数方程

$$\Psi(z, w) := A_n(z)w^n + A_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \tag{1.1.3}$$

确定的代数函数， $A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, n)$ 为 z 的多项式，它所具有的奇点称为代数奇点. 它包含有三类: 即 $A_n(z)$ 的零点 a 对应 $w(z)$ 的极点；使得 $\Psi(z, w)$ 和 $\frac{\partial \Psi(z,w)}{\partial w}$ 有公根的点，即 $\Psi(z, w)$ 和 $\Psi_w(z, w)$ 的判别式之零点. 这时又分两种情形： (i) $\Psi(a, b) = \Psi_w(a, b) = 0$, 而 $A_n(a) \neq 0$ 时， $w(z)$ 在 a 点邻域可展成 $z - a$ 的分数幂级数

$$w(z) = b + b_{\tau}(z - a)^{\frac{\tau}{\lambda}} + b_{\tau+1}(z - a)^{\frac{\tau+1}{\lambda}} + \cdots,$$

此时 a 为代数分支点； (ii) $\Psi(a, b) = \Psi_w(a, b) = 0$, 而 $A_n(a) = 0, w(z)$ 有

$$w(z) = b_{-\tau}(z - a)^{-\frac{\tau}{\lambda}} + b_{-\tau+1}(z - a)^{-\frac{\tau-1}{\lambda}} + \cdots,$$

此时 a 为 $w(z)$ 的代数分支极点.

现考虑一般微分方程

$$F(z; w, w', \cdots, w^{(n)}) = 0. \tag{1.1.4}$$

如果 $F(z; \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是 $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ 的多项式 (或线性函数), 系数是 $z \in \Omega$ 的亚纯函数， Ω 为 C 上一域，则称 (1.1.4) 为代数微分方程 (或线性微分方程). 若

$(c_0, c_1, \cdots, c_n) \in C^{n+1}, z_0 \in \Omega$ 使得 $F(z_0; c_0, \cdots, c_n) = 0$, 设 $w(z; z_0, c_0, \cdots, c_n)$ 是 (1.1.4) 在 z_0 点邻域的全纯解，满足

$$\left.\frac{d^j w(z; z_0, c_0, \cdots, c_n)}{d^j z}\right|_{z=z_0} = c_j \ (j = 0, 1, \cdots, n).$$

我们仍以 $w(z; z_0, c_0, \cdots, c_n)$ 表示它的解析延拓.

定义 1.2　微分方程 (1.1.4) 的解不解析的点，称为奇点；位置依赖于积分常数的奇点称为流动奇点；位置仅依赖于方程系数的奇点称为固定奇点.

例 1.1　$mw'w^{m-1} = 1$.

其解 $w(z) = (z-c)^{\frac{1}{m}}, c \in C$ 为积分常数. 当 $m > 1$ 为正整数时， c 为流动代数分支点； m 为负整数时， c 为流动代数分支极点.

例 1.2　$w' = \frac{w^2}{z}$.

其解 $w = \frac{1}{\log cz}, c$ 为积分常数， $z = 0$ 是固定奇点. 在此处方程系数不解析， $\frac{1}{c}$ 是流动奇点 (对数支点).

例 1.3　$(1+w^2)w'' = (w)^2(2w-1)$.

有通解 $w(z) = \tan[\log(c_1 z - c_2)]$, 其中 c_1, c_2 为任意常数， $\frac{c_2}{c_1}$ 是流动本性奇点.

定义 1.3　若代数微分方程所有流动奇点是单值的 (如极点), 则称该微分方程具有 Painlevé 性质，简称 P 性质，并称具有此性质的方程为 Painlevé 型方程，简称 P 型方程.

已知有下述经典的结论 [45]:

定理 1.5　线性微分方程的积分没有流动奇点.

1.1.3　具有 Painlevé 性质的一阶代数微分方程

下面讨论具有 P 性质的一阶代数微分方程的 Fuchs 条件，为此首先介绍代数函数的一些性质. 设 s 是下述不可约代数方程确定的代数函数

$$P(w, s) := A_0(w)s^n + A_1(w)s^{n-1} + \cdots + A_n(w) = 0, \tag{1.1.5}$$

其中 $A_j(w)(j = 0, 1, \cdots, n)$ 为 w 的多项式. 若 $w_0, s_0 \in C$ 使得 $P(w_0, s_0) = 0$ 和 $\frac{\partial P(w_0, s_0)}{\partial s} \neq 0$, 则由隐函数定理知在 w_0 点的邻域 $B_\rho(w_0)$ 存在惟一的解析函数元素 $s = s(w) = s_0 + a_1(w - w_0) + a_2(w - w_0)^2 + \cdots$, 满足 $P(w, s(w)) = 0$ 并且 $s(w_0) = s_0$. 显然上述命题不成立的点有三种情形： 1°. $w_0 = \infty$; 2°. $w_0 \in C$ 但 $s_0 = \infty$; 3°. $w_0 \in C$ 存在 $s_0 \in C$ 使得 $P(w_0, s_0) = 0$ 和 $\frac{\partial P(w_0, s_0)}{\partial s} = 0$. 现分别讨论之. 对情形 2°, 令 $t = \frac{1}{s}$, 则有

$$P(w, s) = \frac{1}{t^n}\{A_0(w) + A_1(w)t + \cdots + A_n(w)t^n\} = \frac{1}{t^n}Q(w, t).$$

此时我们考虑由 $Q(w,t)=0$ 确定的代数函数 $t(w)$, 使得 $s(w)=\infty$ 的点对应 $t(w)=0$. 此种点即为 $Q(w,0)=A_0(w)$ 之零点. 情形 3° 的点表明 $P(w_0,s)$ 有重根, 此种点为判别式 $D(w)$ 之零点. 因 $P(w,s)$ 为不可约, 故 $D(w)\neq 0$.

今若 w_0 不是上述三种点, 则由代数基本定理 $P(w_0,s)=0$ 恰有 n 个不同的根 $s_0^{(1)},\cdots,s_0^{(n)}$. 此时我们有

定理 1.6 在 w_0 点邻域 $B_\rho(w_0)$ 恰有 n 个不同的解析函数元素 $s_j(w)=s_0^{(j)}+a_1^{(j)}(w-w_0)+\cdots$, 满足 $P(w,s_j(w))=0$ 并且 $s_j(w_0)=s_0^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$.

下面讨论上述三种点的邻域代数函数元素的性质. 对于情形 3° 的点 w_0, 此时 $P(w_0,s)=0$ 有重根. 令 $s_0^{(j)}$ 分别是 λ_j 重根, $j=1,2,\cdots,l,\sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j=n$. 此时在 w_0 点穿洞的邻域 $B_\rho(w_0)\backslash\{w_0\}$ 内 n 个函数元素分为 l 个组 (亦称循环), 每个组有 λ_j 个元素, 同一组的函数元素当 w 围绕 w_0 开拓时彼此互换, 当绕行 λ_j 次时回到原来的元素位置, 并且当 w 趋于 w_0 时同一组的函数元素趋于相同的根. 设 $s_1(w),\cdots,s_\lambda(w)$ 是其中一个组, 当 w 趋于 w_0 时它们趋于 $s_0\in C$. 令 $\zeta^\lambda=w-w_0$, 此时 ζ 围绕 $\zeta=0$ 一周时 w 围绕 w_0 点 λ 次, 因此复合函数 $s(w_0+s^\lambda)=\tilde{s}(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 点是单值解析的, 于是

$$\tilde{s}(\zeta)=s_0+b_m\zeta^m+b_{m+1}\zeta^{m+1}+\cdots,$$

即

$$s(w)=s_0+b_m(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}+b_{m+1}(w-w_0)^{\frac{m+1}{\lambda}}+\cdots. \tag{1.1.6}$$

对于情形 2° 的点, 即 $A_0(w)$ 之零点再分两种子情形讨论之: (i) $A_0(w_0)=0$, 但 $A_n(w_0)\neq 0$, 此时考虑 $t=\frac{1}{s},Q(w,t)=0$ 便可回到情形 3°, 即有 l 个单值或多值的函数元素

$$t_j=\frac{1}{s_j(w)}=t_0^{(j)}+b_{m_j}^{(j)}(w-w_0)^{\frac{m_j}{\lambda_j}}+\cdots,$$

其中 $t_0^{(j)}(j=1,2,\cdots,l)$ 是 $Q(w_0,t)=0$ 的 λ_j 重零点. 因为 $A_0(w_0)=0$, 故至少有一个 $t_0^{(j)}=0$. 此时相应的函数元素的形式为

$$t(w)=\frac{1}{s(w)}=b_m(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}+b_{m+1}(w-w_0)^{\frac{m+1}{\lambda}}+\cdots,$$

从而有

$$s(w)=\frac{1}{b_m}(w-w_0)^{-\frac{m}{\lambda}}+a_{m+1}(w-w_0)^{-\frac{m+1}{\lambda}}+\cdots. \tag{1.1.7}$$

对应于 $t_0^{(j)}\neq 0$ 的函数元素的形式为

$$s(w)=s_0+a_m(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}+a_{m+1}(w-w_0)^{\frac{m+1}{\lambda}}+\cdots. \tag{1.1.8}$$

子情形 (ii), $A_0(w_0)=A_n(w_0)=0$. 此时取 β 使得 $P(w_0,\beta)\neq 0$ 并命 $s=\beta+\zeta$, 于是

$$P(w,s)=P(w,\beta+\zeta)=\tilde{P}(w,\zeta)=\tilde{A}_0(w)\zeta^n+\cdots+\tilde{A}_n(w). \tag{1.1.9}$$

此时 $\tilde{A}_n(w_0)=\tilde{P}(w_0,0)=P(w_0,\beta)\neq 0$, 即化归为子情形 (i).

对情形 1°, $w_0=\infty$. 令 $\xi=\frac{1}{w}$, 此时化为前面的情形.

现考虑下述一阶代数微分方程

$$P(w',w;z):=A_0(w,z)(w')^n+\cdots+A_n(w,z)=0, \tag{1.1.10}$$

其中 $A_j(w,z)$ 是 w 的多项式, 系数为 z 的解析函数. 首先我们分析 (1.1.10) 可能有的固定奇点, 它们可分为下面几类:

1° 若 $P(w',w;z)=\sum\limits_{j=0}^{n}A_j(w,z)(w')^{n-j}=\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{m}a_{ij}(z)(w)^i(w')^{n-j}$, 令 $\{a_{ij}(z)\}$ 的奇点集合记为 M_1.

2° $z\in C$, 存在 w 使得 $A_j(w,z),(j=0,1,\cdots,n)$ 同时为零的点的全体记为 M_2.

3° 方程 (1.1.10) 视 z 为参数, 则它是 $s=w'$, w 的代数方程, $D(w,z)$(或记为 $D(w)$) 是其判别式. 判别方程 $D(w,z)=0$ 确定的函数为 μ 值代数体函数, 其单值分支记为 $g_1(z),\cdots,g_\mu(z)$.$D(w,z)=0$ 的判别式的零点, 即 $D(w,z)=0$ 和 $\frac{\partial D(w,z)}{\partial w}=0$ 的公共零点的集合记为 M_3. 若 $z_0\in M_3$, 则 $D(w,z_0)=0$ 有重根, 即 $g_j(z)(j=1,2,\cdots,\mu)$ 中某些函数在 z_0 点取相同的值.

4° 作变换 $w=\frac{1}{W}$,(1.1.10) 变为 $P(w',w;z)=\tilde{P}(W',W;z)=0$. 相应于新方程 $\tilde{P}(W',W;z)=0$ 的上述三类点集记为 $\tilde{M}_j(j=1,2,3)$, 则 $M_4:=\bigcup\limits_{j=1}^{3}\tilde{M}_j\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{3}M_j$.

显然 (1.1.10) 的固定奇点集合含于 $M=\bigcup\limits_{j=1}^{4}M_j$ 中.

关于具有 Painlevé 性质的一阶代数微分方程我们有下述著名的 Fuchs 条件.

定理 1.7 (Fuchs, Painlevé)　方程 (1.1.10) 具有 Painlevé 性质的充要条件:

1° $\frac{\partial A_0(w,z)}{\partial w}=0$, 即 $A_0(w,z)$ 不含 w, 无妨设 $A_0(w,z)=A_0(z)=1$.

2° $A_k(w,z)$ 对 w 的次数 $Deg_wA_k(w,z)\leqslant 2k$.

3° 由判别方程 $D(w,z)=0$ 确定的函数 $w_0(z)$ 为方程 (1.1.10) 之解, 如此得到的解亦称为奇异积分.

4° 若在 $w_0(z)$ 之附近, w' 的展式为

$$w'=s_0+b_m(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}+\cdots,$$

则 $m\geqslant\lambda-1$.

证明 1° 若 $A_0(w,z)$ 含有 w, 我们将证明方程 (1.1.10) 的解具有流动代数支点. 取 z_0 不是固定奇点, 若 $Deg_w A_0(w,z) \geqslant 1$, 则根据代数基本定理 $A_0(w,z_0)$ 有 $Deg_w A_0(w,z) \geqslant 1$ 个零点, 设 w_0 为其中一个. 由 (1.1.7) 我们有

$$w' = \frac{1}{b_m}(w-w_0)^{-\frac{m}{\lambda}} + a_{m+1}(w-w_0)^{-\frac{m-1}{\lambda}} + \cdots = \frac{F((w-w_0)^{\frac{1}{\lambda}},z)}{(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}},$$

其中 $F(\zeta,z)$ 是其变元的全纯函数, 并且 $F(0,z_0)=\frac{1}{b_m}\neq 0$. 令 $W^\lambda = w-w_0$, 上述方程成为

$$\frac{dW}{dz} = \frac{F(W,z)}{\lambda W^{m+\lambda-1}}.$$

根据 Cauchy 定理, 下述初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dW} = \dfrac{\lambda W^{m+\lambda-1}}{F(W,z)}, \\ z(0)=z_0 \end{cases} \tag{1.1.11}$$

之解为

$$z = z_0 + c_1 W + c_2 W^2 + \cdots.$$

但由方程 (1.1.11) 知 $\frac{d^k z}{dW^k}\big|_{(0,z_0)} = 0$, 故 $c_k = 0, k=1,2,\cdots,m+\lambda-1$. 因此

$$z = z_0 + c_{m+\lambda}(w-w_0)^{\frac{m+\lambda}{\lambda}} + \cdots,$$

于是

$$w = w_0 + \left(\frac{1}{c_{m+\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{m+\lambda}}(z-z_0)^{\frac{\lambda}{m+\lambda}} + \cdots, \quad \lambda, m \geqslant 1.$$

这就表明 z_0 为 $w(z)$ 之流动代数支点. 换言之, 若方程 (1.1.10) 无流动代数支点, 则 1° 成立.

2° 令 (1.1.10) 写为

$$w'^n + A_1(w,z)(w')^{n-1} + \cdots + A_n(w,z) = 0, \tag{1.1.10$'$}$$

其中 $Deg_w A_k(w,z) = p_k$. 现令 $w=\frac{1}{W}$, 则 $A_k(w,z) = A_k\left(\frac{1}{W},z\right) = \frac{B_k(W,z)}{W^{p_k}}$, 注意到 $w' = -\frac{W'}{W^2}$, (1.1.10)$'$ 变为

$$(W')^n - \frac{B_1(W,z)}{W^{p_1-2}}(W')^{n-1} + \cdots + (-1)^n \frac{B_n(W,z)}{W^{p_n-2n}} = 0,$$

其中 $B_k(W,z)$ 为 W 的多项式, $B_k(0,z)\neq 0$. 根据 1° 的同样理由, 若方程之解没有流动代数分支点, 则必 $p_1-2\leqslant 0, p_2-4\leqslant 0,\cdots,p_n-2n\leqslant 0$, 此即为条件 2°.

3° 现设 w_0 是判别方程 $D(w,z)=0$ 确定之函数. 另外方程 (1.1.10)′ 视 z 为参数，则它是 $s=w'$ 和 w 的代数方程. 根据 (1.1.8)

$$w'=s_0+a_m(w-w_0)^{\frac{m}{\lambda}}+\cdots,\tag{1.1.12}$$

其中 $a_m\neq 0, 1\leqslant\lambda\leqslant n, m\geqslant 1$. 令 $w-w_0=W^\lambda$, 上式成为

$$W'=\frac{s_0-w_0'+a_mW^m+a_{m+1}W^{m+1}+\cdots}{\lambda W^{\lambda-1}}=\frac{F(W,z)}{\lambda W^{\lambda-1}}.\tag{1.1.13}$$

若 $s_0-w_0'\neq 0$, 即 $F(0,z)\neq 0$, 则类似于 1° 的讨论方程 (1.1.13) 对初值 $(0,z_0)$ 之解为

$$W=c_\lambda^{-\frac{1}{\lambda}}(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda}}+\cdots.$$

由此 (1.1.13) 可写为

$$\begin{aligned}w'&=\lambda W^{\lambda-1}W'+w_0'\\&=s_0+a_m\{c_\lambda^{-\frac{1}{\lambda}}(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda}}+\cdots\}^m+\cdots\\&=s_0+a_m(z-z_0)^{\frac{m}{\lambda}}+b_{m+1}(z-z_0)^{\frac{m+1}{\lambda}}+\cdots,\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

其中 $b_m=a_mc_\lambda^{-\frac{m}{\lambda}}\neq 0$, 可知其解 $w(z)$ 以 z_0 为流动代数分支点. 换言之，若解无流动支点，必须

$$w_0'(z)=s_0(z).\tag{1.1.15}$$

此即表示判别方程 $D(w,z)=0$ 确定之函数 $w_0(z)$ 满足方程 (1.1.12), 即 $w(z)$ 为 (1.1.10) 之解.

4° 现设 $w_0'=s_0$, 则 (1.1.13) 写为

$$W'=\frac{a_mW^m+a_{m+1}W^{m+1}+\cdots}{\lambda W^{\lambda-1}}.\tag{1.1.16}$$

若 $m<\lambda-1$, 则 (1.1.16) 改写为

$$W'=\frac{a_m+a_{m+1}W+\cdots}{\lambda W^{\lambda-m-1}}=\frac{F(W,z)}{\lambda W^{\lambda-m-1}},$$

$F(0,z_0)=a_m(z_0)\neq 0$. 上述方程对初值 $(z_0,0)$ 有解

$$W(z)=b_1(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda-m}}+b_2(z-z_0)^{\frac{2}{\lambda-m}}+\cdots,$$

计及 (1.1.16), 则方程 (1.1.14) 可写为

$$w'=s_0+a_m\{b_1(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda-m}}+b_2(z-z_0)^{\frac{2}{\lambda-m}}+\cdots\}+\cdots=s_0+a_mb_1^m(z-z_0)^{\frac{m}{\lambda-m}}+\cdots.$$

积分上方程可知 z_0 是解的一个流动代数分支点. 换言之, 若使 (1.1.10) 无流动分支点, 必须 $m \geqslant \lambda - 1$.

综上所述, 我们讨论了取确定值的局部解出现流动代数分支点的各种可能, 因此上述必要条件亦是充分条件. 但当积分存在流动本性奇点时, 上述必要条件是否仍然为充分还要证明. 这由下述 Painlevé 定理所解决.

定理 1.8 (Painlevé) 方程 (1.1.10) 的积分没有流动本性奇点.

证明 设 M 是上面定义的所有可能的固定奇点的集合. 取 $z_0 \notin M$, 我们将证明方程的积分 $w(z)$ 当沿着路径 L 趋于 z_0 时取固定的值, 即 z_0 不是本性奇点.

令判别方程 $D(w,z) = 0$ 和系数 $A_0(w,z) = 0$ 确定的函数的单值分支分别是 $g_1(z), \cdots, g_\mu(z)$ 和 $h_1(z), \cdots, h_\nu(z)$, 设 $z \to z_0$ 时它们趋向于 $\{W_j\}_{j=1}^N, N \leqslant \nu + \mu$. 今以 γ_j 表 w 平面上以 W_j 为中心 ρ 为半径的圆, $\gamma = \bigcup\limits_{j=1}^N \gamma_j$. Γ 表示以 $w = 0$ 为中心充分大的 R 为半径的圆. 令 G 为 Γ 和 γ 围成的域即 $G = B_R(0) \Big\backslash \bigcup\limits_{j=1}^N B_\rho(W_j)$. 因为当 $z \to z_0$ 时, $g_1(z), \cdots, h_\nu(z)$ 趋于 $\{W_j\}_{j=1}^N$, 故对充分小的 r, 当 $z \in B_r(z_0)$ 时, $g_1(z), \cdots, h_\nu(z)$ 之值落入 $\bigcup\limits_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{3}}(W_j)$. 现设 $\tilde{G} = B_{R+\rho}(0) \Big\backslash \bigcup\limits_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{3}}(W_j)$, 当 $z_0 \in B_r(z_0), w \in \tilde{G}$ 时, 方程 (1.1.10) 确定 n 个全纯单值分支 $w_1' = f_1(w,z), \cdots, w_n' = f_n(w,z)$. 今取 $z_1 \in B_{\frac{r}{2}}(z_0), w_1 \in G$, 则初值问题

$$\begin{cases} w' = f_j(w, z), \\ w(z_1) = w_1 \end{cases}$$

在 $B_\sigma(z_1)$ 内存在惟一的全纯解, $\sigma = \frac{r}{2}(1 - e^{-\frac{\rho}{2Kr}})$, 其中 $K = \max\{|f_j(w,z)|, w \in \tilde{G}, z \in B_r(z_0)\}$. 现考虑 (1.1.10) 的任一积分 $w(z)$, 当 z 沿 L 趋于 z_0 时有两种情形出现: (i) $w(z)$ 不趋于 $\{W_j\}_{j=1}^N \bigcup \{\infty\}$ 之一值; (ii) $w(z)$ 趋于 $\{W_j\}_{j=1}^N \bigcup \{\infty\}$ 之一值. 对于情形 (i), 当 z 充分接近 z_0 时 $w(z)$ 之值落入 G. 现取 $z_1 \in B_\sigma(z_0)$, 计及 $\sigma < \frac{r}{2}$ 和相应的 $w_1 \in G$, 由上面 Cauchy 问题之解知 $w(z)$ 在 $B_\sigma(z_1)$ 内全纯, 但 $z_0 \in B_\sigma(z_1)$. 故 $w(z)$ 在 z_0 点全纯. 对于情形 (ii), 如定理 1.7 所证, z_0 成为 $w(z)$ 的代数分支点, 或为极点. 因此两种情形都不出现本性奇点. 定理证毕.

§1.2 Painlevé 方程解的局部性质

先考虑第一类 Painlevé 方程

$$w'' = 6w^2 + z \tag{P_1}$$

解的性质. 设 $w(z)$ 是 (P_1) 的满足初值条件 $w_0 = w(z_0), w_0' = w'(z_0)$ 的局部解. 无妨设 $(z_0, w_0, w_0') \in C^3$, 则由 Cauchy 存在惟一性定理, $w(z)$ 在 z_0 点邻域全纯. 若