

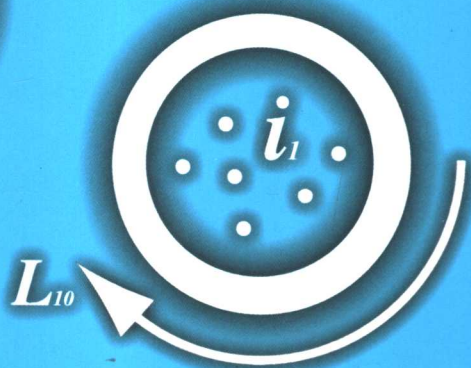


<http://www.phei.com.cn>

Ansoft

工程电磁场
有限元分析

刘国强 赵凌志 蒋继娅 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

Ansoft 工程电磁场有限元分析

刘国强 赵凌志 蒋继娅 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书共分为 18 章, 主要介绍了 ANSOFT 公司的 Maxwell 2D 与 3D 电磁场计算软件集成环境及其操作与使用方法。书中列举了大量的工程应用实例, 深入浅出地讲述了如何应用 Maxwell 软件进行仿真设计。

本书适合电工、冶金等电磁场应用领域的工程师阅读参考, 也可作为电气工程专业的大学生、研究生与博士生的参考资料。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

Ansoft 工程电磁场有限元分析/刘国强, 赵凌志, 蒋继娅 编著. —北京: 电子工业出版社, 2005.8
ISBN 7-121-01595-1

I. A… II. ①刘… ②赵… ③蒋… III. 电磁场—有限元分析—应用软件, Maxwell IV. O441.4-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 083592 号

责任编辑: 张 榕

特约编辑: 刘汉斌

印 刷: 北京市顺义兴华印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 17.5 字数: 448 千字

印 次: 2005 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 5 000 册 定价: 35.00 元

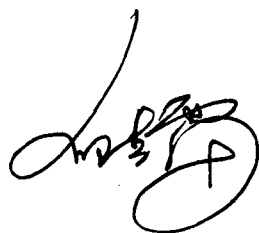
凡购买电子工业出版社的图书, 如有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系。联系电话: (010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

序

得知刘国强博士等人编写的《Ansoft 工程电磁场有限元分析》已经完成，我非常高兴。本书完整、准确地描述了 Maxwell 3D 的有限元分析理论基础，详细地讲述了如何利用 Maxwell 3D 求解工程中普遍面临的热、应力与电磁场分析问题。如果没有相当的理论功底和实践基础，能够在如此短的时间内完成这项工作几乎是不可能的。ANSOFT 公司进入中国十多年来，本书是第一本系统地讲述 Maxwell 3D 有限元理论基础与应用的中文书籍，其价值和意义远远超过工作本身。

ANSOFT 公司的 Maxwell 3D，在工业界的应用已经超过 30 年。它以其在有限元网格自适应剖分技术上的独创性，为设计工程师进行创造性的设计提供了有力的支持。刘国强博士等人的工作对中国设计工程师在软件的深层次应用、提高设计难度及产生更多独创性设计等方面，将发挥积极作用，其影响是深远的。

我热切期望，本书能够尽快送到我们工程设计人员手中，早日发挥它的作用。



ANSOFT 公司中国区总经理
2005 年 6 月

前 言

随着我国市场同国际市场的逐步接轨,各种电工及电子产品的市场竞争将不可避免地越来越激烈,产品在国际市场上的竞争力已成为企业生死存亡的关键。绝大多数的电工设备、电子元件、电气及电磁物理装置的工作状态和性能均由电磁场和其他物理场来决定。例如电机、变压器、电力传输系统、电力开系统、雷电防护系统、电磁铁、永磁磁体、集成电路、晶体管及晶闸管、显像管、电磁测量仪器、电磁医疗装置、磁悬浮列车、核磁共振成像系统、超导储能系统、高能加速器、空间站反物质探测器、磁悬浮轴承、磁推进及磁分离装置等。由于电磁场数值分析和计算机仿真模拟可为产品的设计和优化提供最可靠的依据,许多花费巨大的模型试验可以由数值模拟取而代之。它在国内外企业、研究单位和高校已受到非常普遍的重视并得到广泛的应用,成为提高产品国际竞争力的重要手段。

ANSOFT 公司正是在这样一种大前提下,应运而生。ANSOFT 公司推出的大型电磁场有限元分析软件 Maxwell 已成为工程设计人员和研究工作者在电子产品设计流程中必不可少的重要工具。随着 Maxwell 版本的不断更新,其应用领域也日益扩大,目前被广泛应用于电机、电子、电力电子、交直流传动、电源、电力系统、汽车、航空、航天、船舶、生物医学、石油化工、国防军工等领域,已经在通用电气、Rockwell、ABB、西门子、通用汽车、宝马、NASA (National Aeronautics and Space Administration) 等世界知名企业 with 机构得到广泛应用和验证。

本书通过简明扼要的电磁场理论、工程相关电磁参数计算方法介绍及大量的实例,详细讲述了如何利用 Maxwell 有限元软件求解电气工程、电子工程领域中的电磁场分析问题。

本书适合包括电子工程和电气工程等电磁场应用领域的工程技术人员,大学物理学的授课教师及相关专业的本科生,电子工程和电气工程专业的研究生与博士生阅读参考。电磁应用领域的工程技术人员,可利用功能强大、方便易用的电场、静磁场、涡流场、瞬态场分析模块,分析电机、传感器、变压器、永磁设备、激励器等电磁装置的静态、稳态、瞬态、正常工况和故障工况的特性。物理课教师和本本科生,可结合电磁场理论的学习,利用 Maxwell 软件提供的形象直观的电力线分布或磁力线分布矢量图与等位线云图,加深对电磁场的理解。本书还可满足电子工程、电气工程专业的研究生与博士生从事毕业设计的需要。

Maxwell SV 是 Ansoft 公司二维电磁场分析软件 Maxwell 2D 中的最常用功能组合包,没有节点和使用时间的限制,非常适合于二维电场、磁场的有限元分析。电气工程师可以用该软件来学习有关电磁部件基于电磁场的设计分析,包括电机、变压器、电磁阀、激励器等,下载网址为 <http://www.ansoft.com.cn/download.htm>。

本书由中国科学院电工研究所的刘国强博士、赵凌志硕士和北京市科技情报所的蒋继娅硕士共同执笔编写。

最后,对 ANSOFT 公司对本书的大力支持表示衷心的感谢!

由于时间仓促,书中难免存在错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 著 者

目 录

第 1 章 电磁场有限元分析简介	1
1.1 电磁场基本理论	1
1.1.1 麦克斯韦方程组	1
1.1.2 麦克斯韦方程组各方程之间的关系	2
1.1.3 本构关系	3
1.1.4 二阶电磁场微分方程	3
1.1.5 电磁场求解的边界条件	4
1.2 电磁场求解的有限元方法	5
1.2.1 一维有限元法	5
1.2.2 电磁场解后处理	10
1.3 Ansoft 电磁场分析软件简介	11
1.3.1 Maxwell 3D/2D 电磁场求解器分类	12
1.3.2 电磁分析软件应用领域	14
第 2 章 Maxwell 2D 开发环境	15
2.1 【执行命令】对话框	16
2.2 几何建模器	17
2.2.1 【2D 建模器的主框架】对话框	17
2.2.2 菜单栏	17
2.2.3 工具栏	29
2.3 边界条件管理器	30
2.3.1 菜单栏	30
2.3.2 工具栏	31
2.4 材料管理器	32
2.4.1 材料库	33
2.5 网格生成器	33
2.5.1 菜单栏	33
2.5.2 工具栏	35
2.6 参数列表器	35
2.7 后处理器	36
2.7.1 后处理命令	36
2.7.2 菜单	37
2.8 场计算器	42
2.8.1 界面描述	43
2.8.2 例【2.1】输出场计算结果到均匀网格	44

第 3 章 二维静磁场分析	46
3.1 二维静磁分析理论	46
3.1.1 磁矢势方程的导出	46
3.1.2 磁链和电流	46
3.1.3 静磁力和力矩的计算	48
3.2 二维静磁分析中源的处理	50
3.3 二维静磁分析中的边界条件	50
3.3.1 默认边界条件	51
3.3.2 狄里克莱边界 (Value Boundary)	51
3.3.3 气球边界	52
3.3.4 对称边界	52
3.3.5 匹配边界	53
3.4 【例 3.1】螺线管电磁阀静磁场分析	53
3.4.1 生成项目	53
3.4.2 生成螺线管模型	57
3.4.3 指定材料属性	63
3.4.4 建立边界条件和激励源	67
3.4.5 设定求解参数	67
3.4.6 设定求解选项	68
3.4.7 求解分析	69
3.4.8 磁场力与磁通密度分析	72
3.5 【例 3.2】电磁体设计	75
3.5.1 问题的提出	75
3.5.2 解析解描述	76
3.5.3 Maxwell 2D 静磁求解器计算	79
第 4 章 二维涡流场分析	82
4.1 二维涡流分析理论 ($A-\Phi$ 法)	82
4.1.1 $A-\Phi$ 方程组的导出	82
4.1.2 涡流与趋肤深度	83
4.1.3 阻抗矩阵	84
4.1.4 电磁力	86
4.1.5 电磁转矩	87
4.1.6 电流	87
4.2 二维非线性涡流场理论	87
4.2.1 正弦 B	87
4.2.2 正弦 H	88
4.2.3 磁导率	88
4.3 二维涡流分析中源的处理	88
4.3.1 主动导体	89

4.3.2	被动导体	90
4.3.3	指定单相或多相系统的相位	90
4.4	二维涡流分析中的阻抗边界条件	91
4.5	【例 4.1】母线阻抗涡流分析	92
4.5.1	生成几何模型	92
4.5.2	设定模型	93
4.5.3	设定执行参数	93
4.5.4	设定求解选项	93
4.5.5	阻抗分析	94
4.6	【例 4.2】同轴线电感分析	94
4.6.1	生成几何模型	95
4.6.2	设定模型	95
4.6.3	设定执行参数	96
4.6.4	设定求解选项	97
4.6.5	计算电感	97
第 5 章	二维轴向磁场涡流分析	98
5.1	二维轴向磁场涡流分析理论	98
5.1.1	轴向磁场涡流方程	98
5.1.2	电流密度和电场强度的计算	99
5.2	二维轴向磁场涡流分析源的处理	99
5.3	【例 5.1】叠片钢涡流损耗分析	99
5.3.1	仿真分析	100
5.3.2	数值计算结果	101
第 6 章	二维静电场分析	104
6.1	二维静电分析理论(标势法)	104
6.1.1	静电场求解方程的导出	104
6.1.2	电容	104
6.1.3	电场力和转矩的计算	107
6.2	二维静电分析中的边界条件	108
6.2.1	默认边界条件	109
6.2.2	狄里克莱边界	109
6.2.3	气球边界	110
6.2.4	对称边界	110
6.3	二维静电分析中源的加载	111
6.3.1	实体电压源	111
6.3.2	边缘电压源	111
6.3.3	实体电荷源	112
6.3.4	电荷片	112
6.4	【例 6.1】微波集成电路中的微带线分析	112

6.4.1	生成几何模型	112
6.4.2	设定模型	113
6.4.3	设定执行参数	114
6.4.4	设定求解选项	115
6.4.5	电容与电场强度的分析	115
第 7 章	二维直流传导稳恒电场分析	117
7.1	二维稳恒电场理论	119
7.1.1	求解方程	119
7.1.2	电导矩阵	119
7.1.3	恒定电流	119
7.2	二维稳恒电场分析中的边界条件	119
7.2.1	默认边界条件	120
7.2.2	狄里克莱 (Value Boundary) 边界	120
7.2.3	气球边界	121
7.2.4	对称边界	121
7.2.5	电阻边界	121
7.2.6	匹配边界	122
7.3	二维稳恒电场分析中源的处理	122
7.4	【例 7.1】同轴线漏电导分析	122
7.4.1	指定边界条件和源	122
7.4.2	电容与电场强度的分析	123
第 8 章	二维交变电场分析	126
8.1	二维交变电场分析理论	126
8.2	二维交变电场分析中的边界条件与源的处理	127
8.3	【例 8.1】同轴线特性阻抗分析	127
第 9 章	二维瞬态场分析	130
9.1	二维瞬态分析理论	130
9.1.1	时变磁场方程组	130
9.1.2	绞链导体 (Stranded Conductor)	130
9.1.3	实体导体 (Solid Conductor)	131
9.1.4	带有电流源的实体导体	131
9.1.5	带有电压源的实体导体	131
9.1.6	平移运动	132
9.1.7	转动	132
9.1.8	相量图	132
9.1.9	实部和虚部	132
9.2	二维瞬态分析中源的处理	133
9.2.1	实体电流 (Solid Current)	133
9.2.2	实体电压 (Solid Voltage)	133

9.2.3	表面电流 (Current Sheet)	133
9.2.4	外部连接 (External Connection)	133
9.2.5	Schematic Capture and Diodes	134
9.3	二维瞬态分析中的边界条件	134
9.4	【例 9.1】电磁激励器瞬态分析实例	134
9.4.1	生成几何模型	135
9.4.2	指定材料属性	138
9.4.3	指定边界条件和源	138
9.4.4	定义求解选项	140
9.4.5	生成解	141
第 10 章	二维温度场分析	144
10.1	二维热分析理论基础	144
10.2	二维温度场边界条件	145
10.2.1	强加温度 (Enforce Temperature)	145
10.2.2	表面热流密度 (Surface Heat Flux)	145
10.2.3	热对流 (Convection)	146
10.2.4	辐射 (Radiation)	146
10.3	【例 10.1】带有集中热源绝缘棒的温度场分析	147
10.3.1	问题分析与解析解	147
10.3.2	Maxwell 2D 温度场仿真分析	148
10.4	【例 10.2】导电棒的温度场分析	151
10.4.1	问题描述与解析解	151
10.4.2	Maxwell 2D 温度场仿真分析	152
10.5	【例 10.3】方形截面导体温度场计算检验	152
10.5.1	建立 Maxwell 2D 工程项目	152
10.5.2	创建 2D 模型	153
10.5.3	设定材料属性	153
10.5.4	设定边界条件和激励源	153
10.5.5	求解	154
10.5.6	分析求解结果及检查能量守恒	154
10.6	【例 10.4】单一导体温度场分析	155
10.6.1	建立 Maxwell 2D 工程项目	156
10.6.2	创建 2D 模型	156
10.6.3	设定材料属性	156
10.6.4	设定热边界条件和激励源	156
10.6.5	求解	156
10.6.6	结果分析	157
10.7	【例 10.5】线圈温度场分析	157
10.7.1	问题分析	157

10.7.2	Maxwell 2D 仿真过程	158
第 11 章	二维参数化电磁场分析	159
11.1	《例 11.1》螺线管电磁阀的参数化求解	159
11.1.1	施加几何约束	160
11.1.2	建立模型	161
11.1.3	磁场力与线圈电感数值结果	167
11.1.4	磁场力、电感随位置变化的函数图	168
11.1.5	磁场力、电感随电流变化的函数图	170
11.2	《例 11.2》冶金选矿领域磁选机的设计	172
11.2.1	比磁力的计算	173
11.2.2	求解步骤	174
11.2.3	磁场强度分布和磁选力的计算	175
第 12 章	三维静电场分析	177
12.1	生成几何模型	177
12.2	指定材料属性	178
12.3	指定边界条件和源	178
12.4	设定求解选项	179
12.5	数值计算分析	179
第 13 章	三维静磁场分析	181
13.1	三维静磁场分析理论	181
13.1.1	传导电流求解	181
13.1.2	静磁场求解	182
13.1.3	电感理论与计算	182
13.1.4	磁场储能与伴随储能	182
13.1.5	洛仑兹力	182
13.1.6	洛仑兹力距	183
13.1.7	虚位移法计算磁场力	183
13.1.8	虚位移法计算磁场转矩	183
13.2	三维静磁分析中源的处理	183
13.2.1	电压	184
13.2.2	电压降	184
13.2.3	电流源	184
13.2.4	电流密度源	184
13.2.5	电流密度端口 (Current Density Terminals)	185
13.3	三维静磁分析中的边界条件	185
13.3.1	默认边界条件	186
13.3.2	H 磁场边界	186
13.3.3	对称边界	188

13.3.4	匹配边界	189
13.3.5	绝缘边界	189
13.4	【例 13.1】静磁力分析	190
13.4.1	生成几何模型	190
13.4.2	指定材料属性	192
13.4.3	指定边界条件和源	194
13.4.4	设定执行参数	195
13.4.5	指定求解规范	195
13.4.6	磁场力与磁通密度的分析	196
第 14 章	三维涡流场分析	199
14.1	三维涡流场理论	199
14.1.1	直接方法和磁标势方法的导出	199
14.1.2	常用电磁参数公式	200
14.2	三维涡流分析中源的处理	202
14.2.1	电流源	202
14.2.2	电流密度源	202
14.2.3	电流密度端口 (Current Density Terminals)	202
14.3	三维涡流分析中的辐射边界条件	203
14.4	【例 14.1】正弦涡流分析 (TEAM Workshop 7)	203
14.4.1	生成几何模型	204
14.4.2	设定模型	206
14.4.3	计算数据与测量数据对比	207
14.4.4	表面电流分布和磁通密度分布	208
14.5	【例 14.2】训练后处理器的应用实例	209
14.5.1	仿真分析	210
14.5.2	后处理	211
14.6	【例 14.3】母线阻抗分析	215
14.6.1	生成几何模型	215
14.6.2	设定模型	216
14.6.3	设定执行参数	216
14.6.4	指定求解规范	217
14.6.5	细化网格	217
14.6.6	阻抗分析	217
第 15 章	三维瞬态场分析	219
15.1	Maxwell V10.0 & ePhysics™	219
15.2	【例 15.1】爪极电机瞬态场分析	219
15.2.1	生成几何模型	219
15.2.2	指定材料属性	220
15.2.3	指定边界条件和源	222

15.2.4	定义求解参数	225
15.2.5	定义求解选项	226
15.2.6	结果后处理	228
第 16 章	三维参数化电磁场分析	232
16.1	宏 (3D Macros)	232
16.1.1	类型	232
16.1.2	主要功能	233
16.1.3	命令提示窗口	233
16.1.4	建模器宏	233
16.1.5	后处理器宏	233
16.1.6	全局宏	234
16.2	【例 16.1】有隙感应器的参数化分析	234
16.2.1	生成几何模型	234
16.2.2	指定材料属性	237
16.2.3	指定边界条件和源	237
16.2.4	设定计算参数	237
16.2.5	设定求解选项	237
16.2.6	设定参数化变量	237
16.2.7	进行参数化求解	238
16.2.8	后处理	238
第 17 章	三维温度场分析	240
17.1	三维温度场理论基础	240
17.1.1	稳态温度场理论	240
17.1.2	瞬态温度场理论	242
17.1.3	边界条件	244
17.2	【例 17.1】母线瞬态温度场分析	246
17.2.1	生成几何模型	246
17.2.2	指定材料属性	247
17.2.3	指定边界条件和源	247
17.2.4	设定求解参数	248
17.2.5	定义稳态温度场求解选项	248
17.2.6	定义瞬态温度场求解选项	251
17.2.7	求解	252
17.2.8	结果后处理	252
第 18 章	三维应力场分析	254
18.1	三维应力场理论基础	254
18.1.1	3D 静态应力求解器	254
18.1.2	位移法	254
18.1.3	体积载荷和表面引力	255

18.1.4 热应力 256

18.1.5 位移约束 256

18.1.6 应变能 257

18.1.7 主应力 257

18.1.8 Von Mises 等价应力 257

18.1.9 执行参数 257

18.2 【例 18.1】通用电机应力场分析..... 258

18.2.1 生成几何模型 258

18.2.2 指定材料属性 259

18.2.3 指定边界条件和源 259

18.2.4 设定求解参数 261

18.2.5 定义求解选项 261

18.2.6 求解 261

18.2.7 结果后处理 261

参考文献 265

第 1 章 电磁场有限元分析简介

电磁场的边值问题实际上是求解给定边界条件下的麦克斯韦 (Maxwell) 方程组及由方程组演化出的其他偏微分方程问题。从求解问题的技术手段上来说, 它可以分为解析求解和数值求解两大类。对于简单模型, 有时可以得到方程的解析解。若模型复杂度增加, 则往往很难获得模型的解析解。随着计算工具, 特别是高速大容量电子计算机的发展, 电磁场数值分析已深入到工业生产各个领域, 解决问题的面越来越广, 分析的问题也日趋复杂。电磁场数值分析是一门综合性的学科, 涉及电磁场理论、数值分析、计算方法、计算机基础知识及高级语言等多个方面, 但在计算上存在着共性。有限元法是一种常用的数值方法, 并有相应的电磁软件问世, 其中 ANSOFT 公司的 Maxwell 3D/2D 就是非常优秀的电磁分析软件。

本章将对电磁场的基本理论、电磁场有限元的求解及 ANSOFT 公司的 Maxwell 3D/2D 作简单的介绍。至于完整的电磁理论描述, 读者可以参考许多教科书。如果读者已熟悉电磁理论, 完全可以略过本章, 直接从第 2 章开始学习如何使用 Maxwell 电磁软件。

1.1 电磁场基本理论

1.1.1 麦克斯韦方程组

在 19 世纪中叶, 麦克斯韦在总结前人工作的基础上, 提出了适用于所有宏观电磁现象的数学模型, 称之为麦克斯韦方程组。它是电磁场理论的基础, 也是工程电磁场数值分析的出发点。

麦克斯韦方程组包括微分和积分两种形式, 在此仅给出它们的微分形式, 通过它们可以导出能用有限元处理电磁问题的微分方程。

麦克斯韦方程组为

$$\text{法拉第电磁感应定律} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\text{麦克斯韦-安培定律} \quad \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\text{高斯电通定律} \quad \nabla \cdot D = \rho \quad (1.3)$$

$$\text{高斯磁通定律} \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{电荷守恒定律} \quad \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.5)$$

式中, E 为电场强度, V/m ; D 为电通量密度, C/m ; H 为磁场强度, A/m ; B 为磁通量密度, T ; J 为电流密度, A/m^2 ; ρ 为电荷密度, C/m^3 。

上面 5 个方程中包含两个旋度方程式 (1.1)、式 (1.2) 和 3 个散度方程式 (1.3)、式 (1.4) 和式 (1.5)。

1.1.2 麦克斯韦方程组各方程之间的关系

上面提到的麦克斯韦方程组的 5 个方程中，只有 3 个方程是独立的，另外两个相关方程可以从独立方程中导出。其中两个旋度方程肯定是独立方程，另外一个独立方程可以在散度方程式 (1.3) 和式 (1.5) 中任选一个，方程式 (1.4) 只能作为相关方程。读者可以参考表 1.1。

表 1.1 麦克斯韦方程组中的独立方程与相关方程

独立方程			相关方程	
1	2	3	1	2
(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)
(1.1)	(1.2)	(1.5)	(1.4)	(1.3)

1. 方程式 (1.1) 与式 (1.4) 的关系

对方程式 (1.1) 两边取散度，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) = -\nabla \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.6)$$

根据矢量恒等式，可知式 (1.6) 左端恒等于零

$$\nabla \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

设在场域内 B 关于时间和场点二阶混合偏导数连续，则式 (1.7) 可以化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot B = 0 \quad (1.8)$$

即

$$\nabla \cdot B = C \quad (1.9)$$

C 是与时间无关的常数。同理， $\nabla \cdot B$ 也是与时间无关的常数，只要在初始时刻 $t=0$ 取 $C=0$ ，则在 $t>0$ 以后的任意时刻恒有

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.10)$$

由此，可以看出方程式 (1.1) 与式 (1.4) 是相关的，由方程式 (1.1) 可以推导出式 (1.4)。

2. 方程式 (1.2)、式 (1.3) 与式 (1.5) 之间的关系

对方程式 (1.2) 两边取散度，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot D = 0 \quad (1.11)$$

显然，如果仅仅利用方程式 (1.2) 不能同时导出方程式 (1.3) 和式 (1.5)。这时，要么将方程式 (1.3) 设为独立方程，联合方程式 (1.11) 推导出方程式 (1.5)；要么将方程式 (1.5) 设定为独立方程，联合方程式 (1.11) 推导出方程式 (1.3)。

1) 方程式 (1.11) 与式 (1.3) 联合推导出式 (1.5)

将方程式 (1.3) 代入式 (1.11)，有

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

2) 方程式 (1.11) 与式 (1.5) 联合推导式 (1.3)

将方程式 (1.5) 代入式 (1.11), 有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot D - \rho) = 0 \quad (1.13)$$

即

$$\nabla \cdot D - \rho = C \quad (1.14)$$

这里, C 为与时间无关的常数, 那么只要在初始时刻 $t=0$ 取 $C=0$, 则在 $t>0$ 以后的任意时刻恒有

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1.15)$$

1.1.3 本构关系

场量 E 、 D 、 B 、 H 之间的关系, 由媒质的特性决定。对于线性介质, 本构关系为

$$D = \epsilon E \quad (1.16)$$

$$B = \mu H \quad (1.17)$$

$$J = \sigma E \quad (1.18)$$

式中, ϵ 为介质的介电常数, F/m; μ 为介质的磁导率, H/m; σ 为介质的电导率, S/m。

还需要说明的是, 对于各向同性介质, ϵ 、 μ 和 σ 是标量; 对于各向异性介质, 它们是张量。

如果希望得到电磁场问题的惟一解, 除了上述方程外, 还需要配备定解条件; 对于瞬变场, 需要配备边界条件和初始条件; 对于静态场、稳态场、时谐场, 只需配备边界条件。

1.1.4 二阶电磁场微分方程

在实际有限元计算中, 通常并不针对麦克斯韦方程组中的一阶方程, 常常先将方程化为二阶方程, 然后针对二阶方程进行有限元数值求解。实际上, 比较方便的做法是根据场的基本性质, 引入辅助的计算量, 如标量电势 ϕ 、矢量磁位 A 等。

Maxwell 常用的求解方程有

二维、三维静电场求解器所满足的泊松方程

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = -\rho \quad (1.19)$$

二维稳恒电场求解器所满足的拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (1.20)$$

二维交变电场求解器所满足的复数拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot [(\sigma + j\omega\epsilon)\nabla \phi] = 0 \quad (1.21)$$

二维静磁场求解器所满足的非齐次标量波动方程

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A_z = J_z \quad (1.22)$$

二维涡流场求解器所满足的波动方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times A) = (-\nabla \phi - j\omega A)(\sigma + j\omega\epsilon) \\ I_T = \int_{\Omega} J^* d\Omega = \int_{\omega} (-\nabla \phi - j\omega A)(\sigma + j\omega\epsilon) d\omega \end{cases} \quad (1.23)$$