大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（一）

微积分学习指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

微积分学习指导

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（一）

微积分学习指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

SCJ 25/08

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导（经济类与管理类）/周晋达编著
北京：中国人民大学出版社，2005
大学本科经济应用数学基础特色教材系列
经济应用数学基础（一）
ISBN 7-300-06567-8

Ⅰ.微…
Ⅱ.周…
Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 068815 号

大学本科经济应用数学基础特色教材系列
经济应用数学基础（一）
微积分学习指导
（经济类与管理类）
周晋达 编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东君印刷有限公司		
开　本	787×965 毫米 1/16	版　次	2005 年 7 月第 1 版
印　张	14	印　次	2005 年 7 月第 1 次印刷
字　数	248 000	定　价	16.00 元

前　言

大学本科经济应用数学基础特色教材系列是为大学本科经济类与管理类各专业编著的教材与辅导书，包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》及《微积分学习指导》、《线性代数与线性规划学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》。这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

《微积分学习指导》是经济应用数学基础(一)《微积分》的辅导书，包括两部分内容：各章学习要点与全部习题详细解答。本书引导读者在全面学习的基础上抓住重点，明确主要内容，深入理解主要概念与主要理论，熟练掌握主要运算方法，把好钢用在刀刃上，达到事半功倍的效果。

本着对读者高度负责的精神，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现计算零差错。欢迎广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

周誓达

2005年4月20日于北京

目　录

第一章

函数与极限

一 学习要点

1. 函数定义域

从函数表达式本身确定函数定义域的基本情况只有四种：

(1) 对于分式$\dfrac{1}{P(x)}$,要求 $P(x) \neq 0$；

(2) 对于偶次根式$\sqrt[2n]{Q(x)}$(n 为正整数),要求 $Q(x) \geqslant 0$；

(3) 对于对数式 $\log_a R(x)(a > 0, a \neq 1)$,要求 $R(x) > 0$；

(4) 对于反正弦式 $\arcsin S(x)$ 与反余弦式 $\arccos S(x)$,要求 $-1 \leqslant S(x) \leqslant 1$.

求函数定义域的方法是：观察所给函数表达式是否含上述四种基本情况. 如果函数表达式含上述四种基本情况中的一种或多种,则解相应的不等式或不等式组,得到函数定义域;如果函数表达式不含上述四种基本情况中的任何一种,则说明对自变量取值没有任何限制,所以函数定义域为全体实数,即 $D = (-\infty, +\infty)$.

若两个函数的定义域相同且对应规则也相同,则这两个函数是同一个函数;若两个函数的定义域不相同或对应规则不相同,则这两个函数不是同一个函数.

2. 函数值

关于函数值问题的类型有两种：

(1) 已知函数 $f(x)$ 与 $u(x)$，求复合函数 $f(u(x))$ 的表达式

这时在函数 $f(x)$ 的表达式中，将变量记号 x 都改写为括号，即把函数 $f(x)$ 的对应关系表示为括号的形式，再在括号内填上中间变量 $u(x)$，实际上就是在函数 $f(x)$ 的表达式中，自变量记号 x 都换成中间变量 $u(x)$，就得到复合函数 $f(u(x))$ 的表达式.

(2) 已知复合函数 $f(u(x))$，求函数 $f(x)$ 的表达式

这时令中间变量 $u=u(x)$，通过计算得到函数 $f(u)$ 作为中间变量 u 的表达式，再将中间变量记号 u 换成自变量记号 x，就得到函数 $f(x)$ 的表达式.

3. 函数奇偶性

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于任意点 $x\in D$，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

当然，许多函数既不是奇函数，也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

4. 极限的概念

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 成立等价于极限

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论，极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 中只要有一个不存在，或者虽然都存在但不相等，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 成立等价于

$$\begin{cases}\text{左极限 }\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\\ \text{右极限 }\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论，左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中只要有一个不存在，或者虽然都存在但不相等，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

由于在 $x\to x_0$ 的过程中，恒有 $x\neq x_0$，因而在一般情况下，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限是否存在与它在点 x_0 处有无定义没有必然联系，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义都不影响它在点 x_0 处的极限情况.

5. 极限基本运算法则

法则 1　如果极限$\lim u$与$\lim v$都存在,则极限

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$$

法则 2　如果极限$\lim u$与$\lim v$都存在,则极限

$$\lim uv = \lim u \lim v$$

法则 3　如果极限$\lim u$与$\lim v$都存在,且极限$\lim v \neq 0$,则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

法则 4　如果极限$\lim u(x)$存在,且函数值$f(\lim u(x))$有意义,则极限

$$\lim f(u(x)) = f(\lim u(x))$$

法则 5　如果函数$f(x)$是定义域为D的初等函数,且有限点$x_0 \in D$,则极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

推论 1　如果有限个变量$u_1, u_2, \cdots, u_m$的极限都存在,则极限

$$\lim(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) = \lim u_1 + \lim u_2 + \cdots + \lim u_m$$

推论 2　如果有限个变量$u_1, u_2, \cdots, u_m$的极限都存在,则极限

$$\lim u_1 u_2 \cdots u_m = \lim u_1 \lim u_2 \cdots \lim u_m$$

推论 3　如果极限$\lim v$存在,k为常数,则极限

$$\lim kv = k \lim v$$

6. 无穷大量与无穷小量的概念

若变量y的绝对值在变化过程中无限增大，则称变量y为无穷大量；若极限$\lim y = 0$,则称变量y为无穷小量,无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量.

如果变量y为无穷大量,则变量$\frac{1}{y}$为无穷小量;如果变量$y \neq 0$为无穷小量,则变量$\frac{1}{y}$为无穷大量.

如果极限$\lim u \neq 0, \lim v = 0$,且变量$v \neq 0$,则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \infty$$

重要的无穷小量与无穷大量:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$$

可以推广为

$$\lim_{u(x) \to -\infty} a^{u(x)} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{u(x)\to+\infty} a^{u(x)} = +\infty \quad (a>1)$$

7. 无穷小量的阶

已知变量α,β都是无穷小量,以无穷小量β作为比较标准,那么:

若极限$\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$,则称无穷小量$\alpha$是比$\beta$较高阶无穷小量;

若极限$\lim \frac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称无穷小量$\alpha$是比$\beta$较低阶无穷小量;

若极限$\lim \frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$,则称无穷小量$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小量;

特别地,若极限$\lim \frac{\alpha}{\beta}=1$,则进而称无穷小量$\alpha$与$\beta$是等价无穷小量.

8. 未定式极限

(1) 已知函数$P(x)$与$Q(x)$都是多项式,当$x\to x_0$(有限值)时,若$P(x)\to 0$且$Q(x)\to 0$,则有理分式极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$为$\frac{0}{0}$型未定式极限.

解法:分子$P(x)$、分母$Q(x)$分解因式,约去使得分子、分母同趋于零的$x-x_0$的正整次幂非零公因式.

(2) 已知函数$R(x)$与$S(x)$中至少有一个含二次根式,当$x\to x_0$(有限值)时,若$R(x)\to 0$且$S(x)\to 0$,则无理分式极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R(x)}{S(x)}$为$\frac{0}{0}$型未定式极限.

解法:分子$R(x)$、分母$S(x)$同乘以它们的有理化因式,约去使得分子、分母同趋于零的$x-x_0$的正整次幂非零公因式.

(3) 已知函数$P(x)$与$Q(x)$都是多项式,当$x\to\infty$时,当然有$P(x)\to\infty$与$Q(x)\to\infty$,则有理分式极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限.

解法:分子$P(x)$、分母$Q(x)$同除以它们中x的最高次幂,并应用无穷大量的倒数为无穷小量、其极限为零这一结论.

应用上述解法,得到一般的结果:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_l x^l+\cdots+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_0}=\begin{cases}\infty, & l>m\\ \dfrac{a_l}{b_m}, & l=m\\ 0, & l<m\end{cases}$$

(l,m为正整数;$a_l,\cdots,a_0,b_m,\cdots,b_0$皆为常数,且$a_l\neq 0,b_m\neq 0$)

对于相应的无理分式极限,也同样可以应用上述解法求解.

(4) 已知函数$P(x)$与$Q(x)$都是多项式,当$x\to+\infty$时,若$P(x)\to+\infty$且

$Q(x) \to +\infty$，则二次根式之差极限$\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)})$为$\infty - \infty$型未定式极限.

解法：乘以有理化因式且除以有理化因式，化为无理分式极限，若其为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限，则分子、分母同除以分子中x的最高次幂.

9. 第一个重要极限

第一个重要极限为

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

可以推广为

$$\lim_{u(x) \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

它有两个特征：

(1) 角度一定趋于零；

(2) 分子是角度的正弦函数，分母一定是这个角度本身.

第一个重要极限应用于求含三角函数的$\frac{0}{0}$型未定式极限，所求极限同时满足两个特征时，极限值就等于 1.

10. 第二个重要极限

第二个重要极限为

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$$

可以推广为

$$\lim_{u(x) \to \infty}\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = \mathrm{e}$$

它也有两个特征：

(1) 底一定是数 1 加上无穷小量；

(2) 指数一定是底中无穷小量的倒数.

第二个重要极限应用于求1^{∞}型未定式极限，所求极限同时满足两个特征时，极限值就等于 e.

11. 函数的连续性

已知函数$f(x)$在点x_0处及其左右有定义，若有关系式$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续.

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，存在最大值与最小值；

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0 \qquad (a<\xi<b)$$

12. 渐近线

如果极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则函数曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线为直线 $y=b$；

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则函数曲线 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线为直线 $x=x_0$.

二　习题一详细解答

1.01　确定下列函数的定义域 D：

(1) $y=\sqrt{x+4}$

解：注意到所给函数表达式为第二种基本情况，解不等式

$$x+4\geqslant 0$$

得到函数定义域为

$$x\geqslant -4$$

或者表示为

$$D=[-4,+\infty)$$

(2) $y=\log_2(x^2-1)$

解：注意到所给函数表达式为第三种基本情况，解不等式

$$x^2-1>0$$

得到函数定义域为

$$x<-1 \text{ 或 } x>1$$

或者表示为

$$D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

(3) $y=\dfrac{x^2}{x+3}+\sqrt{1-x}$

解：注意到所给函数表达式含第一种与第二种基本情况，解不等式组

$$\begin{cases} x+3\neq 0 \\ 1-x\geqslant 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} x \neq -3 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

得到函数定义域为

$$x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq -3$$

或者表示为

$$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1]$$

(4) $y = \dfrac{1}{\lg(x-5)}$

解:注意到所给函数表达式含第一种与第三种基本情况,解不等式组

$$\begin{cases} \lg(x-5) \neq 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} x \neq 6 \\ x > 5 \end{cases}$$

得到函数定义域为

$$x > 5 \text{ 且 } x \neq 6$$

或者表示为

$$D = (5, 6) \cup (6, +\infty)$$

1.02　已知函数 $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$,求下列复合函数:

(1) $f(f(x))$　　(2) $f(g(x))$

(3) $g(f(x))$　　(4) $g(g(x))$

解:把函数 $f(x), g(x)$ 的对应关系分别用括号表示为

$$f(\quad) = (\quad)^2$$

$$g(\quad) = \sin(\quad)$$

在括号内分别填上中间变量 $f(x), g(x)$,得到所求复合函数

(1) $f(f(x)) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$

(2) $f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

(3) $g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin x^2$

(4) $g(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin\sin x$

1.03　已知复合函数 $f(x+1) = x^2 - 1$,求下列函数:

(1) $f(x)$　　(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

解:(1) 令中间变量 $u = x + 1$,从而有 $x = u - 1$,得到

$$x^2 - 1 = (u - 1)^2 - 1 = u^2 - 2u$$

这样将所给复合函数表达式化为

$$f(u) = u^2 - 2u$$

再将中间变量记号 u 换成自变量记号 x,得到所求函数

$$f(x) = x^2 - 2x$$

(2) 把函数 $f(x)$ 的对应关系用括号表示为

$$f(\quad) = (\quad)^2 - 2(\quad)$$

在括号内填上中间变量 $\frac{1}{x}$,得到所求复合函数

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

1.04　判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

解:由于关系式

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$$

所以函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 为偶函数.

(2)$f(x) = 2^x - 2^{-x}$

解:由于关系式

$$f(-x) = 2^{-x} - 2^{-(-x)} = 2^{-x} - 2^x = -f(x)$$

所以函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ 为奇函数.

(3)$f(x) = \lg\frac{1 - x}{1 + x}$

解:由于关系式

$$f(-x) = \lg\frac{1 - (-x)}{1 + (-x)} = \lg\frac{1 + x}{1 - x} = \lg\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{-1} = -\lg\frac{1 - x}{1 + x}$$
$$= -f(x)$$

所以函数 $f(x) = \lg\frac{1 - x}{1 + x}$ 为奇函数.

(4)$f(x) = x^2\cos x$

解:由于关系式

$$f(-x) = (-x)^2\cos(-x) = x^2\cos x = f(x)$$

所以函数 $f(x) = x^2\cos x$ 为偶函数.

1.05　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}10^{\frac{1}{x}}$

解：根据极限基本运算法则 4，得到极限

$$\lim_{x\to\infty}10^{\frac{1}{x}}=10^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=10^0=1$$

(2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}$

解：根据极限基本运算法则 5，得到极限

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}$

解：根据极限基本运算法则 5，得到极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=$ ______.

解：注意到绝对值 $|x|$ 作为自变量 x 的函数是分段函数，分界点为点 $x=0$，其表达式为

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

考虑到 $x\to0^-$ 意味着点 x 从原点的左方无限接近于原点，从而在 $x\to0^-$ 的过程中，恒有 $x<0$，这时绝对值 $|x|=-x$，得到左极限

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1$$

1.06　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}$

解：当 $x\to0$ 时，变量 x 为无穷小量，这时由于角度 $\dfrac{1}{x}$ 的绝对值 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 无限增大而使得变量 $\cos\dfrac{1}{x}$ 振荡无极限，但恒有 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，说明变量 $\cos\dfrac{1}{x}$ 为极限不存在的有界变量．根据无穷小量的性质，积 $x\cos\dfrac{1}{x}$ 仍为无穷小量，所以极限

$$\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$

解：当 $x \to \infty$ 时，由于变量 $1+x^2$ 为无穷大量，从而其倒数即变量 $\frac{1}{1+x^2}$ 为无穷小量，所以极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^x}{x}$

解：当 $x\to 0$ 时，由于分子 10^x 的极限为 1，分母 x 的极限为零，所以分式的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{10^x}{x}=\infty$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x^2}$

解：当 $x\to\infty$ 时，由于指数表达式 $u(x)=-x^2\to-\infty$，所以指数函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}2^{-x^2}=0$$

1.07 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-25}$

解：$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-25}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x}{x+5}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

解：$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+2}=\frac{2}{5}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$

解：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3}=\frac{5}{6}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$