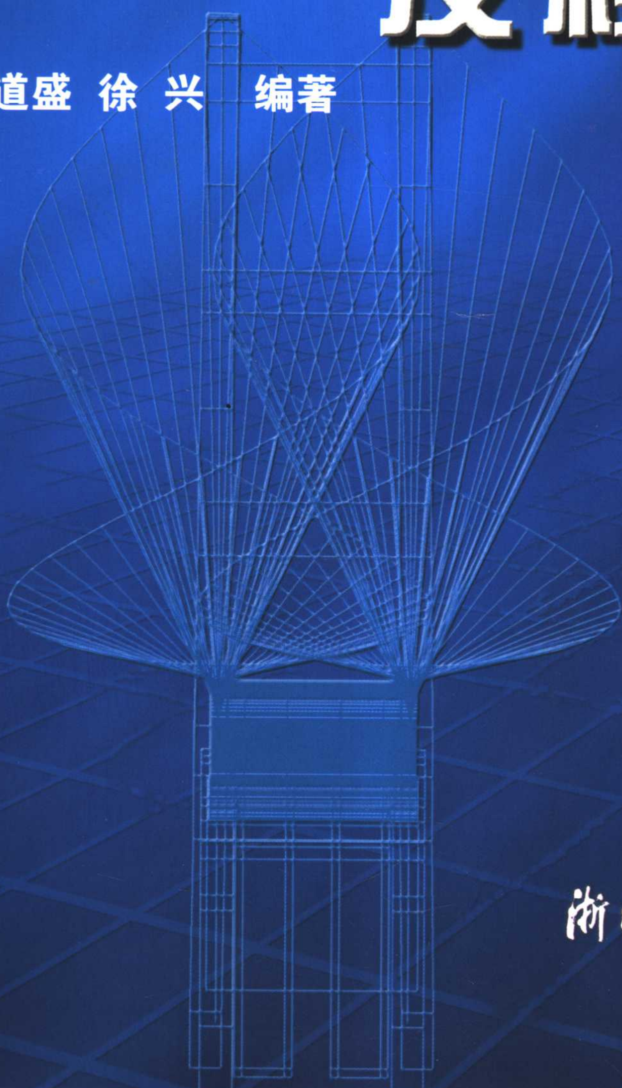
新世纪高等院校精品教材

FEIXIANXING YOUXIANYUAN JI CHENGXU

非线性有限元及程序

凌道盛 徐 兴 编著



浙江大學出版社

非线性有限元
及程序

非线性有限元及程序

凌道盛　徐　兴　编著

浙江大學出版社

内容简介

本书除简要叙述线性有限单元法以外，重点阐述非线性有限单元法的基本理论。主要内容包括：非线性有限单元法的基础知识、主要算法、软件工程的基本思想、非线性有限元程序 V-FEAP 和工程算例；本书还包括作者的最新研究成果：改进等参元和实体退化单元。

本书通过介绍一个典型的非线性有限元程序 VFEAP，阐明非线性有限元程序的基本结构、算法的程序实现等问题，为读者在非线性有限单元理论和实际应用之间架起一座桥梁。

本书可作为土木、机械、力学等学科的研究生和高年级本科生的教材，也可供工程技术人员学习非线性有限单元法和程序时参考。

图书在版编目（CIP）数据

非线性有限元及程序 / 凌道盛，徐兴编著. —杭州：浙江大学出版社，2004.8

ISBN 7-308-03872-6

Ⅰ. 非… Ⅱ. ①凌… ②徐… Ⅲ. 非线性—有限元—程序设计 Ⅳ. TP311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 088330 号

责任编辑：杜希武 沈建国
封面设计：宋纪浔
出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码：310027）
（E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版：浙江大学电脑排版中心
印　　刷：德清第二印刷厂
印　　张：25
开　　本：787mm×1092mm
字　　数：640 千
版 印 次：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：0001–2000
书　　号：ISBN 7-308-03872-6/TP・269
定　　价：36.00 元

前言

有限单元法是一种方法可靠、适用面很广的数值分析方法，其中线性的有限单元分析由于理论简明、应用简便，已被广大工程技术人员接受和应用。随着人类对客观事物认识的不断深入，设计水平的不断提高，基于线性理论的分析方法已不能满足理论研究和工程设计的需要，因此非线性有限元分析越来越得到广大科技工作者的重视。遗憾的是，非线性有限单元法所要求的基础理论知识更深、更广，其程序实现也更困难，而非线性问题本身的复杂性、多样性又决定了不存在一个能解决大部分（更不要说全部）非线性问题的通用非线性有限元分析软件。因此，非线性有限元分析要求使用者不仅要熟练地掌握有限单元的理论和技术，深刻理解研究对象的规律，并且要具有发展算法、扩充程序性能的能力，以便更有效、更经济地解决工程中的非线性问题。

从 1983 年开始，作者为浙江大学力学系和土木工程系的硕士研究生开设“有限单元法和程序设计”课程。随着有限元技术的发展，课程内容得到不断更新和丰富。1988 年开始开设“非线性有限单元法及程序设计”课程，讲稿几经修改，逐步形成本教材。该课程已成为土木工程博士学位课程。作者 20 年的教学经验表明，学习本课程的研究生开始的时候多少都会感到一些困难，但学完之后都会觉得有较大的收获，所学内容对其学位论文的研究帮助颇大。

本书重点阐述了非线性有限单元法的基本理论和程序设计，主要内容包括：非线性有限单元法的基础知识、主要的数值算法、软件设计工程的基本思想、非线性有限元程序 VFEAP 以及一些工程实例。为确保教材的系统性和可读性，本书还简要地叙述了线性有限单元法，同时收集了作者近年来的最新研究成果。通过系统地介绍一个典型的非线性有限元程序 VFEAP，阐明非线性有限元程序的基本结构、算法的程序实现等关键问题，为读者在非线性有限单元理论和实际应用之间架起一座桥梁。

本书第 1 章简要地介绍了有限单元法的发展历史和固体力学非线性问题的分类。第 2 章介绍非线性有限元分析过程中涉及的主要数值方法，包括线性与非线性代数方程组的解法、广义特征值问题的解法、瞬态响应问题的解法以及常用的各种数值积分公式等。这一章是非线性有限单元法的数学基础。

第 3 章介绍了笛卡儿坐标系下物体有限运动和变形的描述方法。第 4 章阐述了有限变形条件下的应力描述和微、积分形式的运动方程。第 5 章则简要地介绍了部分常见的材料本构关系，包括非线性弹性、弹塑性、粘弹性和粘弹塑性等。这三章是非线性有限单元法的力学基础。

第 6 章介绍了线性有限单元法。非线性有限单元法是从线性有限单元法发展而来，所以本章也是非线性有限单元法的基础。第 7 章包括作者近几年的最新研究成果：退化单元和虚拟层合单元，并介绍了它们在建筑工程和机械工程中的应用。

第 8、9 章分别介绍了大变形问题、小变形材料非线性问题的有限单元法，这两章基于第 3、4、5 章非线性理论和第 6 章线性有限单元法的基础之上，是将理论转化为应用的关键。

第 10 章介绍了有限元软件设计的基本思想，这些思想大多是前人花费了巨大代价才得出的经验总结。掌握软件工程的基本思想，遵循其基本要求和规范，在编制软件时可以少走弯路，获得意想不到的效果。第 11 章比较系统地介绍非线性有限元分析软件 VFEAP。这一章将为有限元软件再开发提供一个很好的平台。第 12 章介绍了一些比较典型的工程实例。

必须指出的是，VFEAP 是在 FEAP 的基础上发展而来。FEAP 最早是美国加利福尼亚大学 R.L.Taylor 教授领导开发的非线性有限元程序，主要适用于教学和研究。1986 年 R.L.Taylor 教授和 J.C.Simo 教授受联合国教科文组织的派遣，来浙江大学讲学，并赠送了一套 FEAP 源程序。在此基础上，我们进一步研制开发了 ZD－FEAP 和 VFEAP。在此，我们对 FEAP 程序的赠送者 R.L.Taylor 教授和 J.C.Simo 教授以及在开发过程中作出过贡献的教师和研究生表示衷心感谢。

本书可作为土木、机械、力学等学科的研究生和高年级本科生的教材，也可供工程技术人员学习非线性有限元法和程序时参考。

本书第 1、第 7 章由徐兴教授编写，第 13 章由蔡金标博士编写，其余各章均由凌道盛博士编写。全书由徐兴教授统稿。

由于作者水平有限，定有不妥和错误之处，恳请专家和读者批评指正。

徐　兴

2004 年 8 月

目 录

第1章

绪论

1.1 有限元发展历史、现状及应用前景

在实际工程中，对许多力学问题或场问题，人们已经得到了它们应当遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的定解条件。弹性力学告诉我们，一般的固体力学问题需要满足几何关系、物理关系和平衡方程（或运动方程）。能用解析的方法求出精确解的只是方程性质比较简单、几何边界相当规则的少数问题。大多数的实际工程问题，或由于几何边界比较复杂，或由于问题的某个或某些方面表现为非线性，很难得到解析解。对于这类问题，工程和研究人员经常采用两种方法来解决。一种方法就是引入简化假定,将相对复杂的问题简化为可以通过解析方法求解的简单问题。这种方法的局限性是显而易见的，因为过多的简化可能导致不精确甚至错误的结果。另一种方法就是借助计算机利用数值方法求解。目前，数值解法已成为解决工程问题的最重要方法之一。

在所有数值解法中，有限差分法是人们较早普遍采用的数值方法。借助于有限差分技术，人们能够比较容易地得到一些复杂问题的解。目前,这一方法仍然被广大科研和工程人员采用。但是，当遇到复杂的几何形状和边界条件时，有限差分法解的精度受到限制，甚至发生求解困难。

随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，一种新的功能强大、适用范围广泛的数值方法——有限单元法出现了。“有限单元法”（Finite Element Method，缩写为 FEM）这一名称最早是由 Clough[1] 在 1960 年的一篇关于平面弹性问题的论文中提出的。其实，有限单元法最初是在 20 世纪 50 年代作为处理固体力学问题的一种方法出现的,它是结构分析矩阵方法的一个分支。据文献记载，早在 1943 年 Courant[2] 就应用了“单元”，他在求解 St.Vnant 扭转问题时，将杆的横截面剖分为三角形“单元”,假设翘曲函数在三角形单元中呈线性分布。在 Courant 之后 10 多年，这一方法逐渐流行起来。

Besseling[25]于 1963 年将有限单元法和传统的里兹（Ritz）法比较后指出，有限单元法是里兹法的另一种形式，其试函数就是分片插值函数，在单元上解析，在整个域上仅满足连续的条件。试函数的这一改进，使有限单元法比普通的里兹法更灵活，适应性更强。目前，有限单元法在工程界获得了广泛的应用，已成为杰出的工程分析工具。

我国学者对有限单元法的创建和发展也有不少贡献。著名学者冯康在 1965 年提出的“基于变分原理的差分格式”[3]，就是有限单元法。卞学璜[4]于 1971 年指出，对某些边值问题，

有限单元法和有限差分法得出的方程组是一致的。

初期的有限单元法是建立在虚功原理或最小势能原理基础上的。在1960—1970年这十年中，发展了以各种不同变分原理为基础的有限单元法，并在许多方面对有限单元法进行了研究：

（1） 有限单元法与加权残数法的关系[5-8]；

（2） 发展了弯曲元、曲元和等参元[9-11]；

（3） 作为偏微分方程的数值解法，广泛应用于结构的非线性问题和动力学问题、固体力学问题、流体力学问题、热力学问题以及其他方法难以处理的工程问题[12]；

（4） 建立在函数分析概念上的数学基础[13, 14]。

自1967年以来，出版了许多有限单元法的专著[12, 15-18]，发行了不少有限单元法的杂志[19-24]，关于有限元理论和应用的论文也层出不穷，展现出数值方法前所未有的生命力。板壳结构有限元分析的研究尤其活跃，这是由于按板壳理论直接构造协调的简单有效的板壳单元碰到巨大的困难，研究人员提出了多种解决办法，获得一定的成功，譬如龙驭球等提出的拟协调单元等。1993年以来，作者及其研究生，从三维实体等参单元出发，直接引入相应的基本假定，构造了中厚板壳单元、Kirchhoff 薄板单元、空间梁单元、平面梁单元等一系列退化单元。另外，为适应层合板壳和箱梁等复杂结构的计算，发展了层合板壳单元、虚拟层合板壳单元和组合单元[26-30]，突破了不同材料应划分为不同单元的要求。这一改进，使得复杂结构的整体空间分析、动力分析、非线性分析、形状优化等复杂问题变得简单有效。

现在有限单元法已广泛应用于航空航天、船舶建造、核能电站、地下建筑等结构工程，在潮汐运动、热传导、化学反应中物质的传递和扩散以及流体和结构的相互作用等领域，也有广泛的研究和应用。随之而来，有限单元法的专用和通用软件也大量出现，比较著名的通用软件有 NASTRAN、ASKA、MARC、ANSYS、TITUS、ADINA 等。

应当说有限单元法已经相当成熟，因此不大可能再有戏剧性的突破了。但是在进一步扩大应用范围、提高和完善有限单元法的使用技巧等方面还有许多工作要做。例如断裂、损伤等材料破坏问题，各种非线性问题、流体问题和大规模复杂结构的求解效率、误差界限和收敛速度的估计，网格剖分的自动化，自适应有限单元，以及有限单元和优化相结合的计算机辅助设计等等。

1.2 固体力学非线性问题的分类

从本质上讲，所有固体力学问题都是非线性的，很少有解析解，线性弹性力学问题只是实际问题的一种简化假定。在有限元分析中，线性化假设通常包含以下内容：第一，节点位移为微小量；第二，材料是线性弹性的；第三，物体运动或变形过程中，边界条件的性质保持不变。上述三个假设中的任何一个不满足，都属于非线性问题。

有鉴于此，我们通常把固体力学非线性问题分成三大类，即材料非线性、几何非线性和边界条件非线性。

一、材料非线性

材料非线性是指材料的物理定律是非线性的，简单地说，就是材料的应力应变关系是非线性的。通常，位移分量仍假设为无限小量，即应变位移间满足线性关系。材料非线性问题一般分成两大类，第一类是非线性弹性问题，橡皮、塑料、岩石等材料的应力应变关系在很小的应

变下就表现出明显的非线性性质。非线性弹性问题的一个重要特点是所有变形卸载后都是可以恢复的。另一类是具有不可逆的塑性变形的材料非线性问题，如弹塑性问题、粘弹塑性问题等，岩土工程中的软粘土就属于这类材料。

二、几何非线性

几何非线性问题一般指的是大位移问题，或者结构内部的应变较大，或者结构经历了较大的刚体位移（如平动或转动）但应变分量仍假设为微小，此时假定应力-应变关系仍然是线性的。大多数的大位移问题都属于后者，只有在材料出现塑性变形时，以及类似橡皮这样的材料才会遇到大的应变。一般的，几何非线性问题的应变和位移间不再满足线性关系。

几何非线性问题的另一个表现是，平衡方程必须相对于预先未知的变形后的几何位置给出。实际上，所有问题的平衡都是在变形后的位置上达到的，因此必须用已变形的位置写出它的平衡方程。在弹性力学中，由于假设位移很小，且假定问题的基本特征不因变形而改变，因此不需要严格区分平衡方程是基于变形前还是变形后的位置写出的。必须理解，位移的大小并不是区分几何线性和非线性的惟一标准。如图 1 示，外荷载不大时，图 1.1（a）所示结构近似为线性结构是合理的，但图 1.1（b）所示结构必须由变形后的几何位置写出。压杆失稳后的变形研究、板壳大挠度问题等均属于几何非线性问题。

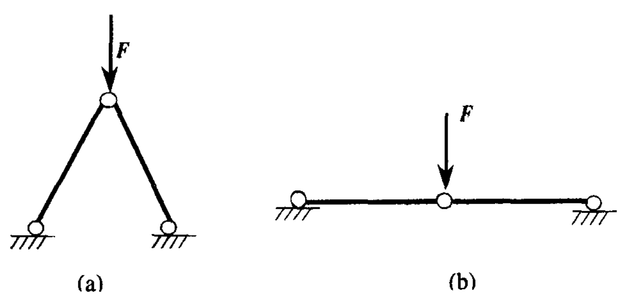


图1.1　几何非线性示意图

三、边界非线性

边界非线性问题的非线性效应是由于边界条件随物体的运动发生变化所引起的。其中最典型的例子是接触问题和随动荷载问题。实际上，几乎所有力学问题都或多或少地存在边界非线性，特别是在支座连接处，只是大部分情况下，由于这种非线性对结构的内力和变形影响很小而被忽略了。而机械加工过程中的边界非线性效应往往是不可忽略的。

关于非线性问题的分类，有两点是必须注意的：第一，不可能存在一个明确、不变的定量标准可以作为材料、几何或边界非线性的判断依据。分析人员必须依据实际的工程问题进行判断。仍以图 1.1(a)和(b)所示结构为例，两根完全相同的杆件构成不同的结构，在相同的杆件应变条件下，两者表现出来的非线性性质可能完全不同。第二，实际的非线性问题很难简单地归纳为某一类非线性，一般的情况是，物体的位移和应变都不是无限小量，本构关系也是非线性的，同时边界条件也可能随变形的发展而改变，这就大大地增加了问题分析的困难。为简化分析，抓住主要的非线性影响因素，将一些对物体运动和变形影响不大的非线性因素线性简化是必需的。

参考文献

[1]R.W.Clough.The finite element method in plane stress analysis.Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., 1960

[2]R.Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1943, 49(2)

[3]冯康.基于变分原理的差分格式.应用数学与计算数学，1965, 2(4)

[4]T.H.H.Pian. Variational formulation of numerical methods in solid continua, Computer-Aided Engineering, G.M.L.Gladwell,ed, University of Waterloo Press, Waterloo, Canada, 1971

[5]O.C.Zienkiewicz and G.S.Holister. Stress analysis. Wiley, New York, 1965

[6]R.E.Greene, R.E.Jones, R.W.Mclay and D.R.Strome. Generalized variational principles in the finite element method. *AIAA J.*, 1969, 7(7)

[7]B.A.Finlayson. Weighted residual methods and their relation to finite element methods in flow problems. *Finite Element in Fluids*, 1975, 2

[8]E.R.de Arantes, E. Oliverra. Theoretical foundations of the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, 4

[9]C.A.Felippa. Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures, Report US SESM 66-22, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, October 1966

[10]J.G.Ergatoudis, B.M.Irons and O.C.Zienkiewicz. Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations, Symposium on Arch Dams, Institute of Civil Engineering, London, 1968

[11]B.M.Irons and O.C. Zienkiewicz. The iso-parametric finite element system-A new concept in finite element analysis, Proceedings Conference on Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, 1968

[12]O.C. Zienkiewicz, The finite element method (third edtion), McGraw-Hill, New York, 1977

[13]A.K.Aziz. The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. New York:Academic press, 1972

[14]J.R.Whiteman. The mathematics of finite elements and applications. London: Academic press, 1973

[15]J.T.Oden. Finite elements of non-linear Continua. New York: McGraw-Hill, 1972

[16]R.D.Cook, Concepts and applications of finite element analysis, Wiley, 1974

[17]K.J.Bathe and E.L.Wilson. Numerical methods in finite element analysis. Pratice-Hall, 1976

[18]K.H.Huebuer, The Finite element method for engineers, Wiley, 1975

[19]International Journal for Numerical Methods in Engineering (eds O.C.Zienkiewicz and R.H. Gallagher), Wiley

[20]International Journal of Computers and Structures (ed. H.liebowitz), Pergamon Press

[21]Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (ed.J.H.Argyris), North Holland

[22]International Journal of Computers and Fluids (ed. C.Taylor), Pergamon Press

[23]International Journal of Numerical Methods in Geotechnics (ed. C.S.Desai), Wily

[24]Finite Element News, Robinson and Associates, Dorset, England

[25]J.F.Bosseling. The complete snalogy between the martin equations and the continuous fluid equations of structural analysis, International Symposium on Analogue and Digital Techniques Applied to Aeronautics. Liege, Belgium, 1963

[26]X.Xu and R.F.Cai.A new plate-shell element of 16 nodes 40 degrees of freedom by relative

displacement method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1993, 9
[27]凌道盛等.虚拟层合板单元及其在桥梁工程中的应用.土木工程学报，1998，(3)
[28]徐兴，凌道盛.实体退化单元系列.固体力学学报，2001，(计算力学专辑)
[29]李芳.结构形状和拓扑优化的虚拟层合单元法.浙江大学博士学位论文，2002
[30]蔡金标.组合单元及其在桥梁工程中的应用.浙江大学博士学位论文，2002

第2章

有限元分析中的数值方法

作为一种工程中广泛应用的数值方法，有限单元法涉及大量的基本数学问题，掌握这些问题的求解方法，有利于加深对有限元法分析过程的理解，是有效应用和开发有限元程序的基础。本章对位移法有限元分析过程中经常涉及的数值方法作一简单归纳，以供读者参考。

对于以位移为基本未知量的有限元法，力学模型经有限元离散、单元分析、系统组集和引入边界条件后，一般可以得到以下形式的运动方程，

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \tag{2.1}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 为 N 阶的矢量；$\boldsymbol{x}$ 是节点位移矢量，为待求量；$\boldsymbol{f}$ 为等效节点力矢量，反映了物体力的边界条件，一般为已知量。顶标一点和两点分别代表对时间的一阶和二阶导数。$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 为 $N\times N$ 的方阵，分别代表离散系统的质量阵、阻尼阵和刚度阵，适当引入位移边界条件后的系统刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 一般为正定矩阵。注意到系统的质量阵、阻尼阵和刚度阵一般为对称且稀疏矩阵，在计算机中多采用二维等带宽或一维变带宽存贮。对于简单结构（如土木工程中围护桩的内力分析），除对角元附近的少数元素外，其他元素全部为零，此时可以采用等带宽存贮，以提高存贮和计算效率。一维变带宽存贮具有存贮紧凑、需要计算机的物理内存小的优点，但由于寻找元素较前者复杂，故不易编程且存取元素耗时较多。

对于静力学问题，方程组（2.1）简化为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f} \tag{2.2}$$

对于动力学问题，加上初始条件，

$$\boldsymbol{x}\big|_{t=0}=\boldsymbol{x}_0 \qquad \dot{\boldsymbol{x}}\big|_{t=0}=\dot{\boldsymbol{x}}_0 \tag{2.3}$$

方程(2.1)便为适定，可以求得惟一解。采用数值方法对(2.1)式关于时间离散后也可得到类似（2.2）的方程组。因此，求解方程组（2.2）是有限元分析的重要步骤之一。

随着分析模型的不断复杂化和对精度要求的不断提高，代数方程组的规模越来越大，解代数方程组的时间在整个解题时间中占很大的比例，动力学问题和非线性问题尤其如此。因此，时间离散和方程组求解的方法对计算精度和速度有很大的影响，有时甚至直接关系到计算的成败。一些经典著作[1][2]均对有限元法中的数值方法进行过细致的介绍。

2.1 线性代数方程组的解法

若式（2.2）中 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 都为常数矩阵和矢量，则方程组为线性代数方程组，它的求解是非线性方程组求解的基础。线性代数、数值分析和许多有限元教材对线性代数方程组的求解都

有详细的介绍，本节只简单介绍部分方法的基本原理。

目前常用的线性方程组求解方法可分成两类：直接解法和迭代解法。直接解法以高斯消去法为基础，求解效率高，但计算过程中的舍入误差会随着方程组阶数的提高而不断累加，因此一般适用于阶数不是很高（例如不超过 10000 阶）的方程组[3]。常用的直接解法有三角分解法、分块解法和波前法等。当方程组阶次过高时，可以考虑采用迭代方法，其中常见的迭代法有高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法、超松弛迭代法(SOR 法)等。

2.1.1 直接解法

高斯消去法是所有直接解法的基础。对于 N 阶线性方程组，系数矩阵经 $N-1$ 次消元(行变换)后化为一个上三角阵，回代计算后可得到方程组的解。与高斯消去法不同，高斯-约当消去法则是直接把系数矩阵消成一个单位矩阵，因此在形式上没有回代的过程。但实际上，高斯-约当消去法的反消过程就相当于高斯消去法的回代过程。

三角分解法则利用了三角分解定理和有限元分析中系数矩阵的对称正定性质，将系数矩阵分解为如下形式，

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^T \tag{2.4}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为对角元素为 1 的下三角矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵，上标 T 表示矩阵转置。可以证明这样的分解存在且惟一。分解后，分别向前、向后回代即可求得方程组的解。

与高斯消去法相比，三角分解的过程实际上相当于消去过程，两者的运算量基本相同。如果考虑系数矩阵一维变带宽存贮时取数和送数所消耗的时间，三角分解法较高斯消去法要节省时间。

为达到一定的计算精度，离散模型划分的单元一般很多，相应的节点和节点自由度很多，方程组的阶次很高。即使采用一维变带宽存贮，系数矩阵有时也不能全部进入内存。分块解法和波前法是解决计算机内存不足的有效方法。

分块解法和波前法的基本思想都是基于对高斯消去法的再分析上，由先组集后消元发展到组集和消元交替进行[3]。分块解法采用自由度组集完一批消去一批的方法，而波前法采用组集完一个自由度消去一个的方法。与分块解法比较，波前法需要的内存更小，但程序编制复杂，内外存交换频繁。基于组集和消元交替进行思想派生出的解法不少，不同的解法各有特点，但基本思想相同。

2.1.2 迭代解法

雅可比(Jacobi)迭代法和高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法是求解线性方程组的常用迭代法，两种方法求解思路是相似的。

将(2.2)式改写成如下形式，

$$x_i=\frac{1}{K_{ii}}(f_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}K_{ij}x_j)\qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{2.5}$$

式中，x_i，f_i 分别为矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的第 i 个分量，K_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的第 i 行第 j 列对应的元素，下同。本章中，同一项中相同指标不满足爱因斯坦求和约定。